策划统筹：王　者　　杨卫平
责任编辑：李　波　　柳　丰
责任校对：廖爱平
封面设计：殷建华

一样的假日
不一样的收获

冬日的闹钟，总在朦胧中
打破我甜美的梦境
刺骨的寒意，堆成难以攀援的阶梯
但我相信，只要努力
就能翻山越岭，领略山那边的风景

我知道，寒风每年不断地轮回
但是，只要朝着太阳飞奔
便可迎来阳光倾泻的黎明
或累或闹，或哭或笑
不再疲惫，云淡风轻

带上父母的期盼
带上老师殷切的叮咛
带上我五彩的梦想
去收获不一样的快乐

ISBN 978-7-5648-1015-3
9 787564 810153 0 2 >
定价：7.07元

假日知新·寒假学习与生活
高一数学
湖南师范大学出版社

紧扣课标要求　凸显学以致用　倡导高效学习　体验知新假日

NEW CONCEPT HOLIDAY
假日知新
寒　假　学　习　与　生　活

高一
数学

华语教育　编

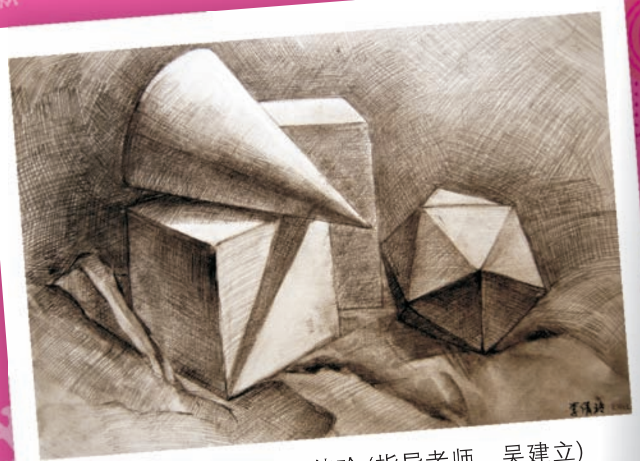
答案解析　资源助学

湖南师范大学出版社

校园原创
给力SHOW

这是一个创意与智慧的展台
一片分享成功与欢乐的园地
只要你乐于创作，勇于投稿
在一样的假期里
就会收获不一样的乐趣

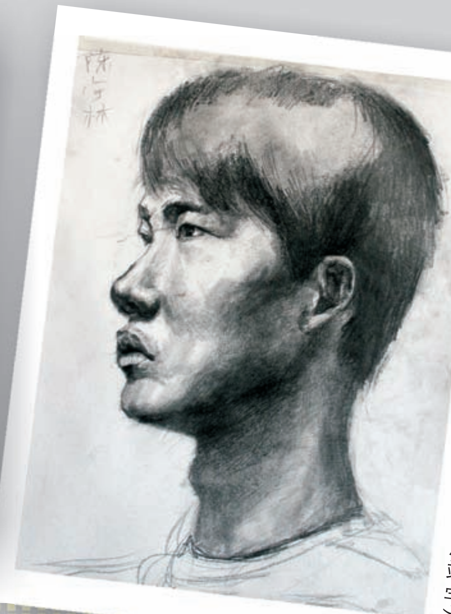
师生作品



长沙市周南中学　李倩玲（指导老师　吴建立）

长沙市田家炳实验中学　焦磊明（指导老师　李勇韬）

益阳市南县四中　袁花（指导老师　李一梁）



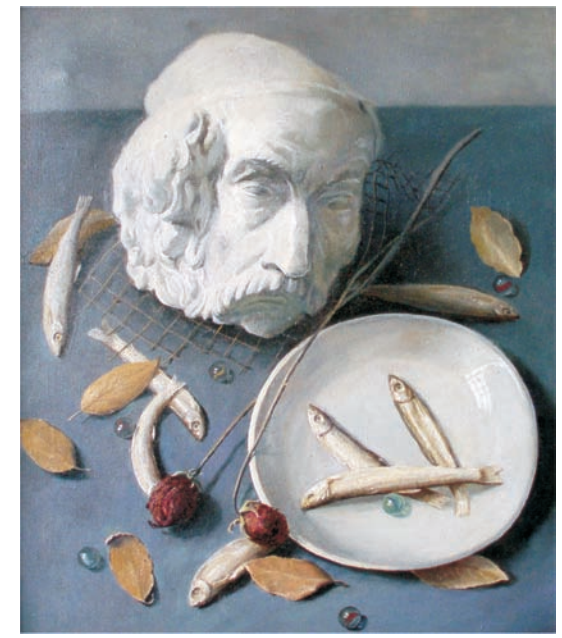
益阳市南县一中　陈宇林（指导老师　唐靖宇）

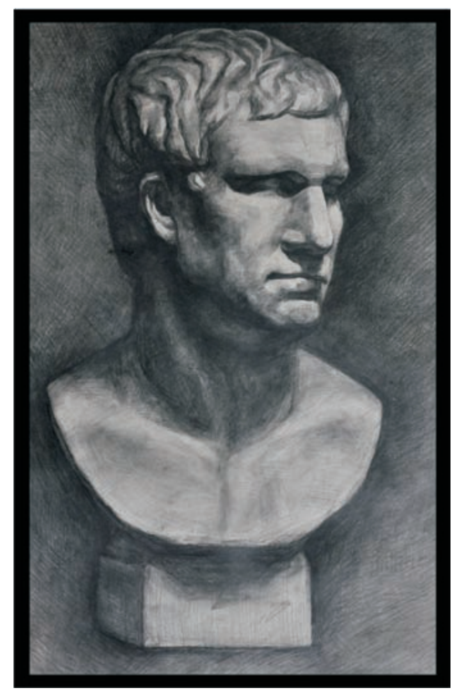
欢迎投稿（投稿时请注明地区、学校、班级及指导老师，并留下联络方式）

电子投稿：2138195118@qq.com　　mikeywp@126.com
纸质投稿：长沙市开福区北辰三角洲B1E1区5栋15楼　葛老师（收）　邮编：410008

校园原创
给力SHOW

学生作品





1	2
3	4

1. 长沙市麓山国际实验学校　易正耀
2. 益阳市南县第一中学　曹　伟
3. 长沙市周南中学　戴宇鑫
4. 长沙市田家炳实验中学　陈秋文

（指导老师　龙平涛　吴建立　刘清峨　唐靖宇）

华语教育◎编

假日知新

寒假学习与生活

BETTER HOLIDAY · BETTER HARVEST

高一 数学

审定单位：（排名不分先后）
长沙市周南中学
长沙市田家炳实验中学
长沙市南雅中学
长沙市麓山国际实验学校
长沙市湘府中学

编写人员：唐 亮 杨振新 陈秀丽 史启胜 喻可湘
龙立荣 陈迪华 王建华 罗毅夫 叶立高

湖南师范大学出版社 · 长沙

图书在版编目（CIP）数据

假日知新·寒假学习与生活．高一数学 / 华语教育编．—长沙：湖南师范大学出版社，2012.12（2022.11 重印）

ISBN 978-7-5648-1015-3

Ⅰ．①假… Ⅱ．①华… Ⅲ．①中学数学课—高中—习题集 Ⅳ．① G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 312319 号

JIARI ZHIXIN · HANJIA XUEXI YU SHENGHUO　GAOYI SHUXUE

假日知新·寒假学习与生活　高一数学

华语教育◎编

◇策划统筹：王　者　　杨卫平
◇责任编辑：李　波　　柳　丰
◇责任校对：廖爱平
◇封面设计：殷建华
◇出版发行：湖南师范大学出版社
　　　　　　地址/长沙市岳麓山
　　　　　　邮编/410081
　　　　　　电话/0731-88872751
◇经　销：各地新华书店
◇印　刷：湖南版艺印刷有限公司
◇开　本：787mm × 1092mm　1/16
◇印　张：5.5
◇字　数：90 千字
◇版　次：2012 年 12 月第 1 版
◇印　次：2022 年 11 月第 11 次印刷
◇书　号：ISBN 978-7-5648-1015-3
◇审批号：湘发改价费〔2017〕343 号
◇定　价：7.07 元

客服电话：0731-85515368　　　联系人：蒋老师
微 信 号：hunanhuayujiaoyu　　邮　箱：2138195118@qq.com

编者寄语

PREFACE

“千里黄云白日曛，北风吹雁雪纷纷。” 亲爱的同学，期盼已久的寒假如约而至！在这岭秀松寒的冬日时光里，你心中一定充满了许多度假想法和美好期望。

假期是另一片求知的天地。同学们暂别校园，回归家庭，温习所学知识之余，将有更多的时间和机会接触广阔的社会，感受多样的生活。

假期是另一个生活的课堂。同学们走入社会，体验生活，可充分利用学习与生活结合的良机，学以致用，实现自我规划，寻求个性发展。

这本散发着清香的新书，从形式到内容均有别于传统用书，分设学习版和生活版，两者既独立又共融，全新的理念统摄全书，独特的编排彰显创意。

1. 系统温故知新

学习版以主题形式呈现，主要依据课程标准并综合相关教材知识点，系统梳理和有机整合上学期所学内容，引导同学们循序渐进并有所侧重地温习所学知识，巩固基本知能，帮助同学们在间隔一个假期之后，能够轻松顺利地融入新学期的学习之中。

2. 生活体验知新

“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。” 全书注重引导同学们参与社会实践，培养自主探究精神。生活版独立成篇，结合学科知识和城乡特点，精心设计栏目，密切联系学生的实际生活，并设置富于开放性、趣味性、多样性的主题体验活动或现实思考题，引领同学们在轻松愉悦的体验中思考生活、发现生活，并学会解决生活问题，形成新的学习理念，让同学们在社会生活环境中获得更多的自主成长空间。

3. 趣味预习知新

根据下学期学习的内容及要求，全书将某些知识背景和方法准备穿插于学习版和生活版内容之中，通过创设富含趣味性的情境，引导同学们自主预习，旨在激发同学们新的求知欲和探究欲，并为迎接新学期的学习做好心理准备。

4. 多元互动知新

全书将相关学科内涵有机融合，形成了学科互动、亲子互动、师生互动和编读互动等多元互动模式，使同学们在互动之中体味学习的快乐和生活的美好；同时，各科均设置了形成性阶段评价表和终结性评价卷，有利于同学们返校后学科老师对同学们做出假期综合评价，了解同学们新的进步。

一样的假日，不一样的收获。衷心祝愿同学们在本书的陪伴下，度过一段快乐如歌、感悟良多的美好假期。

编　者

2022年11月

目录 Contents

学习版

生活版

一样的假日　不一样的收获

温故知新篇

假日导学 亲爱的同学，快乐假日如约而至！我们根据数学学科及假日环境特点，并考虑下学期学习要求，精心设计了涵盖上学期学习重点的12个主题，每个主题按“主题概说—典例剖析—学以致用”的编排体系呈现，希望能帮助你系统高效地梳理整合上学期所学知识，达到温故知新的目的. 你可以根据实际情况，科学合理地制订假期个人学习计划，自主灵活地安排好每天的学习与生活时间. 愿《假日知新》陪伴你度过一段快乐如歌的缤纷假期.

主题一 集合的概念及其运算

主题概说

一、重要知识梳理

1. 一个概念

集合：具有相同属性的事物的全体.

(1)集合的三要素：确定性、互异性与无序性.

(2)集合的表示方法：列举法、描述法或图示法.

(3)常用数集及其记法：自然数集 $\mathbf{N}$，正整数集 $\mathbf{N}^*$ ($\mathbf{N}_+$)，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$.

2. 两种关系

(1)元素与集合的关系——属于关系(符号：$\in$，$\notin$).

(2)集合与集合的关系——包含关系(符号：$\subseteq$，$\subsetneqq$，$=$).

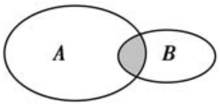
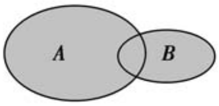
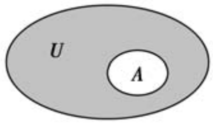
①子集($A\subseteq B$)与真子集($A\subsetneqq B$).

②集合相等：若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 等于 B，记作 $A=B$.

③简单性质：$A\subseteq A$；$\varnothing\subseteq A$；若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

④若集合 A 含有 n 个元素，则集合 A 有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集.

3. 三种运算

运算	交　集	并　集	补　集
定义	$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$	$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$
韦恩图示			
性质	$A\cap A=A$　$A\cap\varnothing=\varnothing$ $A\cap B=B\cap A$ $A\cap B\subseteq A$ $A\cap B\subseteq B$	$A\cup A=A$　$A\cup\varnothing=A$ $A\cup B=B\cup A$ $A\cup B\supseteq A$ $A\cup B\supseteq B$	$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$ $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$ $A\cup(\complement_U A)=U$ $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$

二、规律方法总结

1. 容易混淆的符号

(1)$\in$ 与 $\subseteq$ 的区别：$\in$ 表示元素与集合之间的关系；$\subseteq$ 表示集合与集合之间的关系.

(2)a 与 $\{a\}$ 的区别：a 表示一个元素；$\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合.

(3)$\{(1,2)\}$ 与 $\{1,2\}$ 的区别：$\{(1,2)\}$ 表示元素为点 $(1,2)$ 的集合；$\{1,2\}$ 表示元素为 1 和 2 的集合.

(4)$\varnothing$ 与 0，$\{0\}$，$\{\varnothing\}$ 的区别

对比项	$\varnothing$ 与 0	$\varnothing$ 与 $\{0\}$	$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$
相同点	都表示无的意义	都是集合	都是集合
不同点	$\varnothing$ 是集合 0 是实数	$\varnothing$ 不含任何元素 $\{0\}$ 含一个元素 0	$\varnothing$ 不含任何元素 $\{\varnothing\}$ 含一个元素，该元素是 $\varnothing$
关系	$0\notin\varnothing$	$\varnothing\subsetneqq\{0\}$	$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$ 或 $\varnothing\in\{\varnothing\}$

2. 集合问题的解题思路

(1)结合 Venn 图或数轴进而用集合语言表达，学会数形结合的思想方法.

(2)明确 $A\cap B=B$，$A\cup B=B$，$A\cap B\neq\varnothing$ 与 $A\cap B=\varnothing$ 的含义，根据问题的需要，可以分别转化为等价的关系式：$B\subseteq A$，$A\subseteq B$，A，B 有公共元素与 A，B 没

有公共元素.

(3)对于有限集的基本运算,一般是根据定义直接运算或者借助于 Venn 图解决;对于无限集的基本运算,一般都要借助于数轴解决,即先将两个集合用数轴表示出来,它们的公共部分是两个集合的交集,它们覆盖数轴的全部区域是两个集合的并集.

典例剖析

【例 1】已知集合 A 中含有两个元素 a 和 a^2. 若 $1\in A$,求实数 a 的值.

【思路分析】本题已知集合 A 有两个元素且 $1\in A$,根据集合中元素的特点需分 $a=1$ 和 $a^2=1$ 两种情况讨论,另外还要注意集合中元素的互异性.

【解析】

【思维拓展】当一个集合中的元素含有字母,求解字母的取值范围时,一般可先利用集合中元素的确定性解出集合中字母的所有可能的值或范围,再根据集合中元素的互异性进行检验.

【例 2】设集合 $M=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$,$N=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$,则 $M\cap N=$ (　　)

A. $(0,4]$　　B. $[0,4)$　　C. $[-1,0)$　　D. $(-1,0]$

【思路分析】本题主要考查集合的交集运算,先化简集合,然后求出两个集合的交集. 若集合的表示比较抽象,可借助韦恩图或数轴使抽象问题直观化.

【解析】

【思维拓展】学会用数形结合思想解题,解决集合的子集、交集、并集、补集关系问题时,要特别注意区间端点的值能否取到.

学以致用

一、选择题

1. (多选题)现有以下说法,其中正确的是 ( )

A. 接近于0的数的全体构成一个集合

B. 正方体的全体构成一个集合

C. 未来世界的高科技产品构成一个集合

D. 不大于3的所有自然数构成一个集合

2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x\leqslant 8\}$,$a=5$,$b=9$,则 ( )

A. $a\in A$ 且 $b\notin A$　B. $a\notin A$ 且 $b\in A$　C. $a\in A$ 且 $b\in A$　D. $a\notin A$ 且 $b\notin A$

3. 已知集合 $A=\{x|(x+1)(x-2)\leqslant 0\}$,集合 B 为整数集,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{-1,0\}$　B. $\{0,1\}$　C. $\{-2,-1,0,1\}$　D. $\{-1,0,1,2\}$

4. 集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|0\leqslant x<3\}$的真子集的个数是 ( )

A. 5　B. 6　C. 7　D. 8

5. 集合 A 中含有三个元素 2,4,6. 若 $a\in A$,$6-a\in A$,则 $a=$ ( )

A. 2　B. 2 或 4　C. 4　D. 0

二、填空题

6. 用“$\in$”“$\notin$”“$\subsetneqq$”“$\supsetneqq$”或“$=$”填空:

(1)5 ________ $\{5\}$;　(2)$\{a,b,c\}$ ________ $\{a,c\}$;

(3)$\{1,2,3\}$ ________ $\{3,2,1\}$;　(4)$\varnothing$ ________ $\{0\}$.

7. 下列五个关系式:①$\{0\}=\varnothing$;②$\varnothing=0$;③$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;④$0\in\varnothing$;⑤$\{0\}\supseteq\varnothing$. 其中正确的是________.

8. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $M=\{1,3,4\}$,$N=\{2,4,5\}$,则 $\complement_U M\cap\complement_U N=$ ________.

9. 定义集合运算:$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合 $A*B$ 的所有元素之和为________.

10. 设集合 $A=\{(x,y)|x+y=0\}$,$B=\{(x,y)|x-y=2\}$,则 $A\cap B=$ ________.

三、解答题

11. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$，$B=\{x\mid 3x-7\geqslant 8-2x\}$. 求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$.

12. 设集合 $A=\{-4,0\}$，$B=\{x\mid (x+a)(x+4)=0\}$.

(1)若 $A\cup B=B$，求 a 的值；

(2)若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对______题 错______题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题二 常用逻辑用语

主题概说

一、重要知识梳理

1. 充分条件、必要条件与充要条件

(1)若 $p \Leftrightarrow q$,则 p 与 q 互为充要条件.

(2)若 $p \Rightarrow q$,但 $q \nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件.

(3)若 $q \Rightarrow p$,但 $p \nRightarrow q$,则 p 是 q 的必要不充分条件.

(4)若 $p \nRightarrow q$,且 $q \nRightarrow p$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2. 全称量词命题与存在量词命题及其否定

全称量词命题"对 M 中任意一个 x,$p(x)$成立"可用符号简记为 $\forall x \in M$,$p(x)$. 它的否定:$\exists x \in M$,$\neg p(x)$.

存在量词命题"存在 M 中的元素 x,$p(x)$成立"可用符号简记为 $\exists x \in M$,$p(x)$. 它的否定:$\forall x \in M$,$\neg p(x)$.

二、规律方法总结

1. 充分条件与必要条件的判断方法

(1)定义法:①认清 p,q,分清哪个是条件,哪个是结论. ②找推式,判断"若 p,则 q"及"若 q,则 p"的真假. ③下结论,根据推式及定义下结论.

(2)等价法:将命题转化为另一个等价的又便于判断真假的命题.

2. 全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法

(1)要判定全称量词命题"$\forall x \in M$,$p(x)$"是真命题,需要对集合 M 中的每个元素 x,证明 $p(x)$都成立;如果在集合 M 中找到一个元素 x,使 $p(x)$不成立,那么这个全称量词命题就是假命题.

(2)要判定存在量词命题"$\exists x \in M$,$p(x)$"是真命题,只需在集合 M 中找到一个元素 x,使 $p(x)$成立即可;如果在集合 M 中,使 $p(x)$成立的元素 x 不存在,那么这个存在量词命题就是假命题.

典例剖析

【例 1】已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}, ax^2+x+1\leqslant 0$. 若命题 p 是假命题，则 a 的取值范围为（　　）

A. $a<\frac{1}{4}$　　B. $a\geqslant\frac{1}{4}$　　C. $a>\frac{1}{4}$　　D. $a>\frac{1}{4}$ 或 $a=0$

【思路分析】先写出存在量词命题的否定，然后求出 a 的取值范围.

【解析】

【思维拓展】对全称量词命题和存在量词命题进行否定的步骤与方法：(1)确定类型，是存在量词命题还是全称量词命题.(2)改变量词，把全称量词换为恰当的存在量词，把存在量词换为恰当的全称量词.(3)否定结论，原命题中“是”“有”“存在”“成立”等改为“不是”“没有”“不存在”“不成立”等.

【例 2】若 p：$x^2+x-6=0$ 是 q：$ax+1=0$ 的必要不充分条件，求实数 a 的值.

【思路分析】利用一元二次方程的解法得出 p 中 x 的值，再利用充分条件和必要条件的定义即可得出 a 的值.

【解析】

【思维拓展】利用充分、必要、充要条件的关系求参数范围：(1)化简 p，q 两个命题.(2)将 p 与 q 的关系(充分、必要、充要条件)转化为集合间的关系.(3)利用集合间的关系建立相等或不等关系.(4)求解参数.

学以致用

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 一次函数 $y=-\frac{m}{n}x+\frac{1}{n}$ 的图象同时经过第一、三、四象限的必要不充分条件是 ( )

A. $m>1$，$n<-1$　　B. $mn<0$

C. $m>0$，$n<0$　　D. $m<0$，$n<0$

3. 已知命题 p：存在实数 m，使方程 $x^2+mx+1=0$ 有实数根，则“$\neg p$”形式的命题是 ( )

A. 存在实数 m，使方程 $x^2+mx+1=0$ 无实数根

B. 不存在实数 m，使方程 $x^2+mx+1=0$ 无实数根

C. 对任意的实数 m，方程 $x^2+mx+1=0$ 无实数根

D. 至多有一个实数 m，使方程 $x^2+mx+1=0$ 有实数根

4. 命题“所有能被 2 整除的数都是偶数”的否定是 ( )

A. 所有不能被 2 整除的数都是偶数

B. 所有能被 2 整除的数都不是偶数

C. 存在一个不能被 2 整除的数是偶数

D. 存在一个能被 2 整除的数不是偶数

5. 设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x>2$”是“$|x|>2$”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. (多选题)下列命题是真命题的是 ( )

A. 存在 $x\in\mathbf{Z}$，$x^2=3$　　B. 存在 $x\in\mathbf{R}$，$x^2=2$

C. 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+3>0$　　D. 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$x^2+x-5>0$

7. 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 (　　)

A. $a<0$　　B. $a>0$　　C. $a<-1$　　D. $a<1$

二、填空题

8. 命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}, x^2+2x+5<0$ 是______(填"全称量词"或"存在量词")命题，它是______(填"真"或"假")命题，它的否定为 $\neg p$：______.

9. "$x\in M\cap N$"是"$x\in M\cup N$"的______条件.

10. 已知 a,b 是实数，则"$a>0$ 且 $b>0$"是"$a+b>0$ 且 $ab>0$"的______条件.

三、解答题

11. 已知 p：$m-1<x<m+1$，q：$\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$. 若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

互动评价

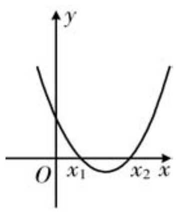
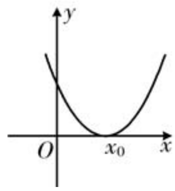
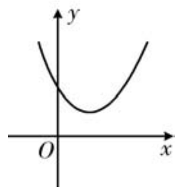
	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题三 二次函数与一元二次方程、不等式

主题概说

一、重要知识梳理

1. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，则二次函数、一元二次方程、一元二次不等式间的关系如下表：

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=f(x)$的图象			
$f(x)=0$ 的根	x_1,x_2	$x_0=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$f(x)>0$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	**R**
$f(x)<0$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

2. 基本不等式

如果 $a>0,b>0$，那么$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

二、规律方法总结

利用基本不等式求最值必须满足的三个条件

(1)一正：即所求最值的各项必须都是正值.

(2)二定：即含变量的各项的和或者积必须是定值，如要求 $a+b$ 的最小值，ab 必须是定值；要求 ab 的最大值，$a+b$ 必须是定值.

(3)三相等：具备不等式中等号成立的条件，使函数取得最大值或最小值.

典例剖析

【例 1】(1)求函数 $y=\frac{1}{x-3}+x(x>3)$ 的最小值;

(2)求函数 $y=x(1-3x)(0<x<\frac{1}{3})$ 的最大值.

【思路分析】配凑出和为定值或积为定值的形式,再利用基本不等式求解即可.

【解析】

【思维拓展】利用基本不等式求函数的最值:(1)利用基本不等式求函数最值的关键是获得定值条件,解题时应对照已知和要求的式子运用适当的拆项、添项、配凑、变形等方法创设应用基本不等式的条件.(2)等号取不到时,注意利用求函数最值的其他方法.

【例 2】解关于 x 的不等式 $ax^2-2(a+1)x+4>0$.

【思路分析】不等式的二次项含有参数 a,要对 a 的取值范围进行讨论.在讨论 a 不等于 0 的情况时,应按两根的大小关系分情况进行讨论.

【解析】

【思维拓展】对系数中含有参数的一元二次不等式的求解,一般需从三个方面分类讨论:(1)当二次项系数的符号不确定时,要按二次项系数的正、负进行分类,以确定不等式解集的形式(是在两根之间,还是在两根之外).(2)当判别式 Δ 不确定时,要按 $\Delta>0,\Delta=0,\Delta<0$ 进行分类,以确定根的个数.(3)当方程的两根的大小不确定时,应按 $x_1<x_2,x_1=x_2,x_1>x_2$ 进行分类,得出不同的解集.

学以致用

一、选择题

1. 若 $a>b,c>d$,则下列不等式成立的是 ( )

A. $a-c>b-d$　B. $a+c>b+d$　C. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　D. $ac>bd$

2. 已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$,$N=\{x|x^2-x-6<0\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{x|-4<x<3\}$　B. $\{x|-4<x<-2\}$

C. $\{x|-2<x<2\}$　D. $\{x|2<x<3\}$

3. 下列不等式一定成立的是 ( )

A. $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$　B. $\frac{a+b}{2}\leqslant-\sqrt{ab}$　C. $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$　D. $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$

4. 已知 a,b 均为正数,且 $a+b=1$,则 $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 ( )

A. 13　B. $5+\sqrt{6}$　C. 4　D. $5+2\sqrt{6}$

二、填空题

5. 已知 $a>0,b>0$,且 $a+2b=8$,则 ab 的最大值等于________.

6. 已知关于 x 的不等式 $x^2-5ax+2a^2<0(a>0)$ 的解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$,则 $x_1+x_2+\frac{a}{x_1x_2}$ 的最小值是________.

7. 已知当 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时,$x^2+(a-4)x+4-2a>0$ 恒成立,则实数 x 的取值范围是________.

8. 已知 x,y 均为正实数,且 $x+3y=2$,则 $\frac{2x+y}{xy}$ 的最小值为________.

三、解答题

9. 求函数 $y=1-2x-\dfrac{3}{x}(x<0)$ 的最小值.

10. 已知 $a>0,b>0$,且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$.

(1)求 ab 的最小值;

(2)求 $a+b$ 的最小值.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对______题 错______题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题四 函数的概念与表示

主题概说

一、重要知识梳理

1. 函数的三要素:定义域、值域和对应关系.

2. 函数的表示:解析法、列表法和图象法.

二、规律方法总结

1. 判断函数相等必须同时满足的条件

(1)定义域相同;

(2)对应关系相同(与表示自变量和函数值的字母无关).

2. 求函数定义域的主要依据

(1)分式的分母不等于零;

(2)偶次方根的被开方数不小于零;

(3)对数式的真数大于零;

(4)指数、对数式的底数大于零且不等于 1;

(5)若函数由几个式子构成,则分别求出各个式子的定义域,然后求交集;

(6)实际问题中的函数的定义域还要保证实际问题有意义.

3. 求函数值域的常用方法

(1)观察法:有的函数的结构并不复杂,可以通过几种常见函数的值域及不等式的性质直接观察出函数的值域.

(2)配方法:配方法是求"二次函数类"值域的基本方法,形如 $F(x)=a[f(x)]^2+bf(x)+c$ 的函数的值域问题,均可使用配方法.解题过程中,要特别关注自变量的取值范围.

(3)分离常数法:此方法主要是针对有理分式,即将有理分式转化为"反比例函数类"的形式,便于求值域.

(4)换元法:对于一些无理函数(如 $y=ax\pm b\pm\sqrt{cx\pm d}$),通过换元把它们转化为有理函数,然后利用有理函数求值域的方法,间接地求解原函数的值域.

4.分段函数的注意点

(1)分段函数是一个函数,不要把它误认为是几个函数.

(2)分段函数的定义域是各段定义域的并集,值域是各段值域的并集.

(3)画分段函数的图象时,应根据不同定义域上的不同解析式分别画出,并且注意区间端点的虚实之分.

典例剖析

【例 1】设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的函数.当 $x\in[-1,1)$ 时,$f(x)=\begin{cases}-4x^2+2,-1\leqslant x<0,\\x,0\leqslant x<1,\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{3}{2}\right)=$________.

【思路分析】解分段函数求值问题时,应先看清自变量的值所在的区间.若不在已知区间内,要根据已知条件进行转化,再代入相应的解析式求解.

【解析】

【思维拓展】函数的求值问题常以分段函数为载体,以函数的周期性、奇偶性为手段,不断对自变量的值进行转化,直到转化在已知解析式的区间上,再代入求值.

【例 2】求下列函数的值域:

(1)$y=\sqrt{x}-1$;　　(2)$y=x^2-2x+3,x\in[0,3]$;

(3)$y=\dfrac{2x+1}{x-3}$;　　(4)$y=2x-\sqrt{x-1}$.

【思路分析】根据函数解析式的特征,灵活地选取求值域的方法.

【解析】

【思维拓展】求函数值域时要先求出函数定义域，再观察函数解析式，灵活运用观察法、配方法、换元法等求出函数值域.

学以致用

一、选择题

1. 下列各组函数中，表示同一函数的是 ( )

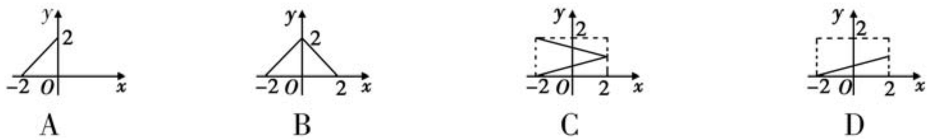
A. $y=1$，$y=\frac{x}{x}$

B. $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$，$y=\sqrt{x^2-1}$

C. $y=x$，$y=\sqrt[3]{x^3}$

D. $y=|x|$，$y=(\sqrt{x})^2$

2. 集合 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，给出下列四个图形，其中能表示以 M 为定义域，N 为值域的函数关系的是 ( )



3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2-x^2, x\leqslant 1,\\ x^2+x-2, x>1,\end{cases}$ 则 $f[f(0)]=$ ( )

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

4. 函数 $y=\frac{1}{x^2+1}$ 的值域是 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $\{y|y\neq 1\}$　　D. $(0,1]$

5. 若函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$ 的定义域和值域都是 $[1,b](b>1)$，则 $b=$ ( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

二、填空题

6. 函数 $y=\lg(2-x)$的定义域是____________________.

7. 函数 $f(x)=\sqrt{-4x^2+4x+8}$的值域为____________________.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4, 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x, x>2,\end{cases}$ 则 $f(2)=$__________;若 $f(x_0)=8$,则 $x_0=$__________.

9. 若函数 $f(2x+1)=x^2-2x$,则 $f(3)=$________.

三、解答题

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+4, x\leqslant 0,\\ x^2-2x, 0<x\leqslant 4,\\ -x+2, x>4.\end{cases}$

(1)求 $f\{f[f(5)]\}$的值;

(2)画出函数 $f(x)$的图象.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对______题 错______题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题五 函数的基本性质

主题概说

一、重要知识梳理

函数的单调性是在定义域内的某个区间上的性质，是函数的局部性质. 函数的单调区间只能是其定义域的子区间，不能把单调性相同的区间写成其并集，只能用“和”或者“，”连接.

二、规律方法总结

1. 利用单调性定义判断函数单调性的步骤

(1)取值：任取 $x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$.

(2)作差：计算 $f(x_1) - f(x_2)$.

(3)变形判号：得出 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负(一般通过通分、因式分解、提取公因式等变形方法将 $f(x_1) - f(x_2)$ 变为几个简单因式的乘积或商的形式，以便于判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号).

(4)得出结论：由(3)得出函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性.

2. 复合函数的单调性

复合函数 $f[g(x)]$ 的单调性与构成它的函数 $u = g(x)$，$y = f(u)$ 的单调性密切相关，其规律为“同增异减”.

3. 函数的最大(小)值

(1)利用二次函数的性质(配方法)求函数的最大(小)值.

(2)利用图象求函数的最大(小)值.

(3)利用函数的单调性求函数的最大(小)值：

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增，在区间 $[b, c]$ 上单调递减，则函数 $y = f(x)$ 在 $x = b$ 处有最大值 $f(b)$；

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递减，在区间 $[b, c]$ 上单调递增，则函

数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处有最小值 $f(b)$.

(4)利用求函数值域的方法求函数的最大(小)值.

4. 函数奇偶性的判别方法

先考察定义域是否关于原点对称,若定义域不关于原点对称,则该函数非奇非偶;若定义域关于原点对称,再判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系,得出结论.

注:(1)若 $f(x)$ 为奇函数,且在 $x=0$ 处有定义,则 $f(0)=0$;

(2)若 $f(x)=0, x\in D$,且定义域 D 关于原点对称,则 $f(x)$ 是既奇又偶函数.

典例剖析

【例 1】 下列函数中,既是偶函数又在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增的是 (　　)

A. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　B. $f(x)=x^2+1$

C. $f(x)=x^3$　　D. $f(x)=2^{-x}$

【思路分析】 本题考查函数的单调性、奇偶性,可结合转化思想和数形结合思想判断函数的单调性与奇偶性.

【解析】

【思维拓展】 函数单调性、奇偶性的判断,关键是充分理解定义,掌握常用的判断方法及思路,如定义法、图象法、排除法等.

【例 2】 已知 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数,且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$,则 $f(1)+g(1)=$ (　　)

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

【思路分析】 本题考查函数的奇偶性及函数的求值,在解答中,化繁为简的关键点是巧用 $-x$ 替换 x.

【解析】

【思维拓展】解决利用函数奇偶性求函数值的问题，关键是求出函数值所在区间的函数解析式，或者利用函数奇偶性把 $f(-x)$ 改写成 $-f(x)$ 或 $f(x)$，从而求出 $f(x)$.

学以致用

一、选择题

1. 下列函数是偶函数的是 (　　)

A. $y=x$　　B. $y=x^2, x\in[0,1]$

C. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$　　D. $y=2x^2-3$

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且满足 $f(2x+1)<f(3)$，则 x 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

3. (多选题)已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上单调递增，在区间 $[2,5]$ 上单调递减，那么下列说法中，一定正确的是 (　　)

A. $f(0)<f(2)$

B. $f(3)>f(2)$

C. $f(x)$ 在区间 $[-1,5]$ 上有最大值，且 $f(2)$ 是最大值

D. $f(0)$ 与 $f(3)$ 的大小关系不确定

4. 函数 $f(x)=|x|$ 和 $g(x)=x(2-x)$ 的单调递增区间依次是 (　　)

A. $(-\infty,0],(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,0],[1,+\infty)$

C. $[0,+\infty),(-\infty,1]$　　D. $[0,+\infty),[1,+\infty)$

5. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 是定义在 $[2b-5,2b-3]$ 上的奇函数，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{9}{8}$　　C. 1　　D. 无法确定

二、填空题

6. 已知函数 $f(x)=x^2+2x+a$ 在区间 $[-3,2]$ 上的最大值是 4，则 $a=$____________.

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 (a,b)，且对其内任意实数 x_1,x_2 均有 $(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是____________.（填“增函数”“减函数”或“非单调函数”）

8. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x(1-x)$，则 $f(-2)=$____________.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}(a,b,c\in\mathbf{N})$ 是奇函数，又 $f(1)=2$，$f(2)<3$，则 $a=$________，$b=$______，$c=$________.

三、解答题

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

(1)判断 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明；

(2)利用函数的奇偶性，求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的单调区间.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题六 指数函数及其性质

主题概说

一、重要知识梳理

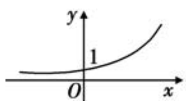
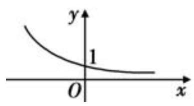
1. 实数指数幂运算

(1)当 n 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=a$;当 n 为偶数时,$\sqrt[n]{a^n}=|a|(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,m>1)$;$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(n>0)$.

(3) $a^ra^s=a^{r+s}$ $(a>0,r,s\in\mathbf{R})$;$(a^r)^s=a^{rs}$ $(a>0,r,s\in\mathbf{R})$;$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{R})$.

2. 指数函数的图象和性质

$y=a^x$	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	
定点	过定点$(0,1)$,即 $x=0$ 时,$y=1$	
值域	值域为$(0,+\infty)$,当 $x>0$ 时,$y>1$;当 $x<0$ 时,$0<y<1$	值域为$(0,+\infty)$,当 $x>0$ 时,$0<y<1$;当 $x<0$ 时,$y>1$
单调性	在 $\mathbf{R}$ 上是增函数	在 $\mathbf{R}$ 上是减函数
图象特征	底数 a 越大,图象向上越靠近 y 轴	底数 a 越小,图象向上越靠近 y 轴
对称性	$y=a^x$ 和 $y=a^{-x}$ 关于 y 轴对称	

3. 幂函数

函数 $y=x^\alpha$ 叫做幂函数,其中 $y=x,y=x^2,y=x^3,y=x^{\frac{1}{2}},y=x^{-1}$ 五个幂函数的性质如下:

(1)在区间$(0,+\infty)$上都有定义,并且图象过定点$(1,1)$.

(2)如果 $\alpha>0$,则幂函数的图象经过原点,并且在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

(3)如果 $\alpha<0$,则幂函数的图象不过原点,并且在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

(4)当 $\alpha=1,3,-1$ 时,幂函数为奇函数;当 $\alpha=2$ 时,幂函数为偶函数;当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,幂函数为非奇非偶函数.

二、规律方法总结

1. 比较大小

利用指数函数的单调性可以比较幂的大小和指数值的大小. 如果是同底数幂,直接利用相应指数函数的单调性,通过自变量的大小关系判断相应幂值的大小;如果底数不同,则先考虑能否化成同底数幂,然后根据指数函数的单调性得出结果;不能化成同底数的,可以在两个数值中间找一个中间值(如 1,0 等)分别与之比较,从而得出结论.

2. 结合指数函数的图象可知:$f(x)=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$.

3. 利用指数函数的单调性可以解指数不等式:$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 等,但当 a 的取值范围不确定时,一定要对 a 的取值范围进行分类讨论.

典例剖析

【例题】设 $a=\log_3 7$,$b=2^{1.1}$,$c=0.8^{3.1}$,则 ( )

A. $b<a<c$ B. $c<a<b$ C. $c<b<a$ D. $a<c<b$

【思路分析】本题考查指数和对数的大小比较,可以利用指数函数和对数函数的性质进行判断.

【解析】

【思维拓展】指数式、对数式的大小比较一般利用指数函数、对数函数的图象与性质,或利用 0 或 1 作为中间量比较大小.

学以致用

一、选择题

1. 下列根式中,分数指数幂的互化正确的是 ( )

A. $-\sqrt{x}=(-x)^{\frac{1}{2}}(x>0)$　　B. $\sqrt[6]{y^2}=y^{\frac{1}{3}}(y<0)$

C. $x^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^3}(x>0)$　　D. $x^{-\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{x}(x\neq0)$

2. 下列各式错误的是 ( )

A. $3^{0.8}>3^{0.7}$　　B. $0.5^{0.4}>0.5^{0.6}$

C. $0.75^{-0.1}<0.75^{0.1}$　　D. $(\sqrt{3})^{1.6}>(\sqrt{3})^{1.4}$

3. 函数 $y=a^x+1(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象必经过点 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(1,0)$　　C. $(2,1)$　　D. $(0,2)$

4. 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在$[1,2]$上的最大值为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

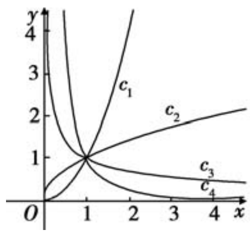
5. 使不等式 $2^{3x-1}-2>0$ 成立的 x 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$　　C. $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$

6. 如图所示的曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限内的图象.已知 n 分别取$\pm2,\pm\frac{1}{2}$四个值,与曲线 c_1,c_2,c_3,c_4 对应的 n 依次为 ( )

A. $2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2$　　B. $2,\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2},-2,2,\frac{1}{2}$　　D. $-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2$



二、填空题

7. 计算$\left[(\sqrt{2})^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}=$________.

8. 如果指数函数 $y=(a-2)^x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上是减函数,则 a 的取值范围是________.

9. 我国的人口约14亿，如果今后的人口数年平均增长率为1%，那么经过 x 年后我国人口数为 y 亿，则 y 与 x 的关系式为____________.

10. 定义运算 $a*b=\begin{cases}a, a\leqslant b,\\ b, a>b,\end{cases}$ 则函数 $f(x)=1*2^x$ 的值域为__________.

三、解答题

11. 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求下列各式的值：

(1) $x+x^{-1}$；　　(2) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$.

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题七 对数函数及其性质

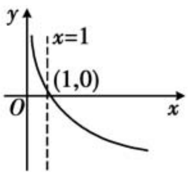
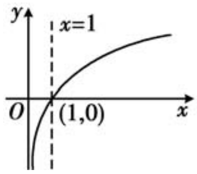
主题概说

一、重要知识梳理

1. 对数的相关公式

(1)$a^{\log_a N}=N$;(2)$\log_a 1=0$,$\log_a a=1$;(3)$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$;(4)$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$;(5)$\log_a M^n=n\log_a M$;(6)$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$($a>0$,$a\neq1$,$c>0$,$c\neq1$,$b>0$);(7)$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$;(8)$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$($a>0$,$a\neq1$,$b>0$,$b\neq1$).

2. 对数函数的图象及其性质

$y=\log_a x$	$0<a<1$	$a>1$
图象		
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	**R**	
定点	过定点$(1,0)$,即$x=1$时,$y=0$	
单调性	在$(0,+\infty)$上是减函数	在$(0,+\infty)$上是增函数
图象特征	同正异负,即当$0<a<1$,$0<x<1$或$a>1$,$x>1$时,$\log_a x>0$;当$0<a<1$,$x>1$或$a>1$,$0<x<1$时,$\log_a x<0$	

二、规律方法总结

1. 对数函数$y=\log_a x$($a>0$,$a\neq1$)与指数函数$y=a^x$($a>0$,$a\neq1$)互为反函数,因此,对数函数的图象与指数函数的图象关于直线$y=x$对称.

2. 可类比指数函数学习对数函数并解决类似的问题,如比较两个对数的大小的方法,解对数不等式等.

典例剖析

【例 1】计算：$(\lg 5)^2+2\lg 2-(\lg 2)^2$.

【思路分析】依据对数的运算性质求值.

【解析】

【思维拓展】对数的化简、计算需要用到对数的运算性质，要灵活掌握对数的运算性质.

【例 2】已知 $f(x)=\log_a \dfrac{1+x}{1-x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

(1)求 $f(x)$的定义域；

(2)判断 $f(x)$的奇偶性，并加以证明；

(3)求使 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围.

【思路分析】(1)根据对数函数的定义域为$(0,+\infty)$来求 $y=\log_a f(x)$的定义域，即为解不等式 $f(x)>0$；(2)判断函数的奇偶性，应先判断定义域是否关于原点对称，再计算 $f(-x)$；(3)解形如$\log_a f(x)>b$ 的不等式，应将 b 化为以 a 为底的对数式的形式，再借助对数函数的单调性求解.

【解析】

【思维拓展】对于底数 a 的值不确定的对数函数，要注意分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况讨论.

学以致用

一、选择题

1. 设 $\log_x \dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{2}$,则底数 $x=$ (　　)

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 4　　D. $\dfrac{1}{4}$

2. 化简 $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 8 \cdot \log_8 9=$ (　　)

A. 1　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 2　　D. 3

3. 若 $a=\log_2 3, b=\log_3 2, c=\log_4 6$,则下列结论正确的是 (　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

4. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 的定义域是 (　　)

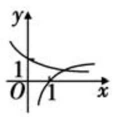
A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(1,2]$

5. 下列函数中,在 $(0,2)$ 上为增函数的是 (　　)

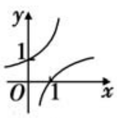
A. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$　　B. $y=\log_2\sqrt{x^2-1}$

C. $y=\log_2 \dfrac{1}{x}$　　D. $y=\log_{0.2}(4-x^2)$

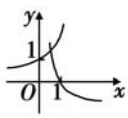
6. 当 $0<a<1$ 时,在同一坐标系中,函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是 (　　)



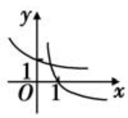
A



B



C



D

二、填空题

7. 若 $2^a=5^b=10$,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$__________.

8. 若 $\log_2 x=3$,则 $x=$__________;若 $\log_x 3=-2$,则 $x=$__________.

9. 函数 $y=a^x$ 的反函数的图象过点 $(9,2)$,则 $a=$__________.

10. 方程 $\lg x+\lg(x+3)=1$ 的解 $x=$__________.

三、解答题

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{bx}{ax^2+1}(b\neq 0,a>0)$.

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2)若 $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $\log_3(4a-b)=\dfrac{1}{2}\log_2 4$,求 a,b 的值.

12. 求不等式 $\log_a(2x+7)>\log_a(4x-1)(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 中 x 的取值范围.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题八 函数的应用

主题概说

一、重要知识梳理

1. 零点存在定理(零点是一个实数,不是一个点)

若函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是一条连续不断的曲线,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内至少有一个零点.

2. 二分法求函数的零点(二分法只能适用于变号零点的近似求解)

给定精度 ε,用二分法求函数 $f(x)$零点 x_0 的近似值的步骤如下:

(1)确定区间$[a,b]$,验证 $f(a)\cdot f(b)<0$,给定精度 ε.

(2)求区间(a,b)的中点 x_1.

(3)计算 $f(x_1)$:若 $f(x_1)=0$,则 x_1 就是函数的零点;若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$,则令 $b=x_1$(此时零点 $x_0\in(a,x_1)$);若 $f(x_1)\cdot f(b)<0$,则令 $a=x_1$(此时零点 $x_0\in(x_1,b)$).

(4)判断是否达到精度 ε:即若$|a-b|<\varepsilon$,则得到零点近似值 a(或 b),否则重复步骤(2)~(4).

二、规律方法总结

1. 函数零点的求法

(1)代数法:求方程 $f(x)=0$ 的实数根.

(2)几何法:对于不能用求根公式的方程,可以将它与函数 $y=f(x)$的图象联系起来,并利用函数的性质找出零点.

2. 函数零点的判断:主要依据是零点存在定理,但要注意,并不是所有的函数都存在零点,如函数 $y=\dfrac{1}{x}$. 而且零点存在定理只是零点存在的充分条件,而非必要条件,如函数 $y=x^2$,不满足零点存在定理的条件,但它在$[-1,1]$上有零点 0.

注:单调函数在整个定义域上至多有一个零点.

典例剖析

【例 1】某化工厂引进一条先进生产线生产某种化工产品，其生产的总成本 y（单位：万元）与年产量 x（单位：吨）之间的函数关系式可以近似地表示为 $y=\frac{x^2}{5}-48x+8\ 000$，已知此生产线年产量最大为 210 吨. 若每吨产品平均出厂价为 40 万元，那么当年产量为多少吨时，可以获得最大利润？最大利润是多少？

【思路分析】首先将函数关系式变形，然后找出函数的增减区间，再求出函数的最大值.

【解析】

【思维拓展】建立函数模型时主要抓住四个关键点：(1)求什么，弄清楚要解决什么问题，完成什么任务.(2)设什么，弄清楚这个问题有哪些因素，谁是核心因素，通常设核心因素为自变量.(3)列什么，把问题的已知条件用所设变量表示出来.(4)限制什么，自变量应满足的限制条件，在实际问题中，除了要使函数式有意义外，还要考虑变量的实际含义，如人不能是半个等.

【例 2】求下列函数的零点：

(1) $f(x)=-x^2-2x+3$；　　(2) $f(x)=\frac{4}{x}-x$.

【思路分析】求函数的零点，可以转化为求对应方程的实数根.

【解析】

【思维拓展】求函数零点的方法：(1)代数法，求方程 $f(x)=0$ 的实数根.(2)几何法，与函数 $y=f(x)$ 的图象相结合，即与 x 轴交点的横坐标为函数的零点.

学以致用

一、选择题

1. 函数 $y=2x^2-4x-3$ 的零点个数为 ( )

A. 0　B. 1　C. 2　D. 不能确定

2. 函数 $f(x)=2-\log_2 x$ 的零点是 ( )

A. 0　B. 1　C. 2　D. 4

3. 若函数 $y=ax+1$ 在 $(0,1)$ 内恰有一解,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-1,+\infty)$　B. $(-\infty,-1)$　C. $(1,+\infty)$　D. $(-\infty,1)$

4. 如图所示,每个函数都有零点,但不能用二分法求图中函数零点的是 ( )

5. 函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点一定位于区间 ( )

A. $(1,2)$　B. $(2,3)$　C. $(3,4)$　D. $(4,5)$

6. 某食品的保鲜时间 y(单位:h)与储存温度 x(单位:℃)满足函数关系 $y=e^{kx+b}$(k,b 为常数).若该食品在 0 ℃的保鲜时间是 64 h,在 18 ℃的保鲜时间是 16 h,则该食品在 36 ℃的保鲜时间是 ( )

A. 4 h　B. 8 h　C. 16 h　D. 32 h

二、填空题

7. 函数 $f(x)=x^2-5x+6$ 的零点是________.

8. 函数 $f(x)=x^3-1$ 的零点的个数为________.

9. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切实数都有 $f(x+2)=f(2-x)$ 成立,且方程 $f(x)=0$ 恰有 4 个不同的零点,则这 4 个零点的和是________.

10. 用二分法求方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间 $[2,3]$ 内的实根,取区间中点为 $x_0=2.5$,那么下一个有根的区间是________.

三、解答题

11. 已知一元二次方程$(m-2)x^2+3mx+1=0$的两个根分别属于区间$(-1,0)$和$(0,2)$，求m的取值范围.

12. 某旅游点有50辆自行车供游客租赁使用，管理这些自行车的费用是每日115元.根据经验，若每辆自行车的日租金不超过6元，则自行车可以全部租出；若超过6元，则每提高1元，租不出去的自行车就增加3辆.旅游点规定：每辆自行车的日租金不低于3元并且不超过20元，每辆自行车的日租金x元只取整数，用y表示出租所有自行车的日净收入.（日净收入即一日中出租的所有自行车的总收入减去管理费用后的所得）

(1)求y关于x的函数解析式；

(2)试问日净收入最多时每辆自行车的日租金应定为多少元？日净收入最多为多少元？

互动评价

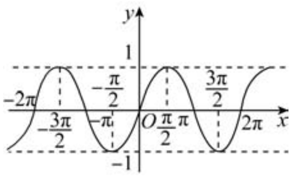
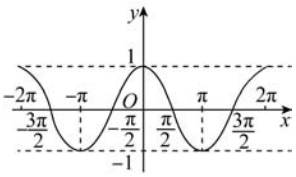
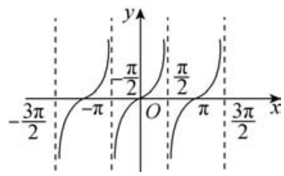
	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题九 三角函数的图象与性质

主题概说

一、重要知识梳理

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的图象与性质(表中 $k\in\mathbf{Z}$)

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
最值	当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y_{max}=1$；当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y_{min}=-1$	当 $x=2k\pi$ 时，$y_{max}=1$；当 $x=\pi+2k\pi$ 时，$y_{min}=-1$	无最值
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
对称性	对称中心：$(k\pi,0)$；对称轴：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	对称中心：$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right)$；对称轴：$x=k\pi$	对称中心：$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$
最小正周期	2π	2π	π
单调性	在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上单调递增；在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上单调递减	在 $[-\pi+2k\pi,2k\pi]$ 上单调递增；在 $[2k\pi,\pi+2k\pi]$ 上单调递减	在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 上单调递增

二、规律方法总结

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的有关性质

函数	$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$
定义域	$\mathbf{R}$
值域	$[-A,A]$
周期性	$T=\frac{2\pi}{\omega}$
对称中心	$\left(\frac{k\pi-\varphi}{\omega},0\right)(k\in\mathbf{Z})$
对称轴	$x=\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi-2\varphi}{2\omega}(k\in\mathbf{Z})$
奇偶性	当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时是奇函数；当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时是偶函数
单调性	由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\varphi\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得单调递增区间； 由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\varphi\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得单调递减区间

典例剖析

【例 1】在 $[0,2\pi]$ 内，不等式 $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集是 （　　）

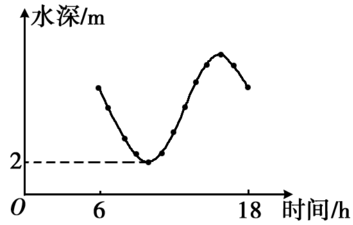
A. $(0,\pi)$　　B. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$

【思路分析】解答此类问题可以图象为依据，画出相应图象，观察图象并结合三角函数的性质解题.

【解析】

【思维拓展】形如 $\sin\alpha>a$ 的不等式，求角 α 的范围，一般采用数形结合的思想来解题，具体步骤为：(1)画出 $y=\sin x$ 的图象及直线 $y=a$．(2)若解 $\sin\alpha>a$，则观察 $y=\sin x$ 在直线 $y=a$ 上方的图象，这部分图象对应的 x 的范围就是所要求的角 α 的范围；若解 $\sin\alpha<a$，则观察 $y=\sin x$ 在直线 $y=a$ 下方的图象，这部分图象对应的 x 的范围就是所要求的角 α 的范围．

【例 2】如图，某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$，据此函数可知，这段时间水深(单位：m)的最大值为________．



【思路分析】由题意和最小值易得 k 的值，进而可得最大值．

【解析】

【思维拓展】函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0)$ 的最大值为 $A+B$，最小值为 $B-A$．

学以致用

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin 2x$ 是 (　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 既奇又偶函数

2. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的最小正周期为 (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

3. 函数 $y=|\sin x|$ 的一个单调递减区间是 ( )

A. $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ C. $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

4. 函数 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域是 ( )

A. $\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$ B. $\left\{x\middle|x\neq-\frac{\pi}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$

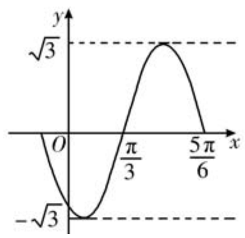
C. $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$ D. $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$

5. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=2$ 的两个相邻交点的距离等于 π，则 $f(x)$ 的单调递增区间是 ( )

A. $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$ B. $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$ D. $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$

6. (多选题)如图是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\pi<\varphi<\pi,x\in\mathbf{R})$ 的部分图象，则下列命题中正确的是 ( )



A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. 函数的解析式为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$

C. 函数 $f(x)$ 的一条对称轴的方程为 $x=\frac{7\pi}{12}$

D. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$

二、填空题

7. 若 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数，则 $a=$________.

8. 函数 $y=2-\cos\frac{x}{3}$ 的最大值为________，此时 $x=$____________.

9. 函数 $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{2}{3}x$ 的图象相邻的两条对称轴之间的距离是________.

三、解答题

10. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

11. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2)求函数 $f(x)$ 的零点的集合.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题十 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象及变换

主题概说

一、重要知识梳理

1. 用五点画图法画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象

设 $z=\omega x+\varphi$，令 $z=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，求出 x 的值与相应的 y 的值，描点、连线可得函数图象.

2. 用图象变换法画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象

(1) $y=\sin x \xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y=\sin(x+\varphi) \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}(\omega>0)\text{倍}}$

$y=\sin(\omega x+\varphi) \xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A(A>0)\text{倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$.

(2) $y=\sin x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}(\omega>0)\text{倍}} y=\sin \omega x \xrightarrow[\text{平移}\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}$

$y=\sin(\omega x+\varphi) \xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A(A>0)\text{倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$.

(1)是先进行平移变换(向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)平移$|\varphi|$个单位长度)，再进行伸缩变换.(2)是先进行伸缩变换，再进行平移变换(向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)平移$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$个单位长度).

二、规律方法总结

由图象确定解析式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的步骤

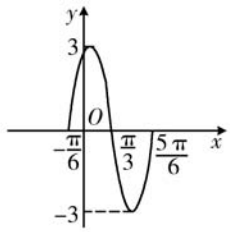
(1)定 A,k，借助函数图象的最高点、最低点确定参数 A,k 的值.

(2)定周期，借助函数图象及五点画图法中的“五点”确定函数的周期.

(3)定 ω，根据周期公式确定参数 ω 的值.

(4)定 φ,利用函数图象及五点画图法中的“五点”,建立关于 φ 的方程,求之即得 φ 的值. 也可以运用图象变换法,即运用逆向思维的方法,先确定函数的基本解析式 $y=A\sin\omega x$,再根据图象平移规律确定相关的参数.

典例剖析



【例 1】如图是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的一部分,求此函数的解析式.

【思路分析】此题可采用多种方法求解. 首先由图象直观得出 A 的值和周期 T,可由 $\omega=\frac{2\pi}{T}$ 求得 ω 的值,再代入点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 求得 φ 的值;或者代入两点坐标解方程组求得 ω 和 φ 的值.

【解析】

【思维拓展】已知图象求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的方法:(1)如果从图象可确定振幅和周期,则可直接确定函数表达式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的参数 A 和 ω,再选取“第一个零点”(即五点画图法中的第一个)的数据代入“$\omega x+\varphi=0$”(要注意正确判断哪一个点是“第一个零点”)求得 φ.(2)通过若干特殊点代入函数式,可以求得相关待定系数 A,ω,φ. 这里需要注意的是,要认清所选择的点属于五个点中的哪一点,并能正确代入列式.(3)运用逆向思维的方法,先确定函数的基本解析式 $y=A\sin\omega x$,根据图象平移规律可以确定相关的参数.

【例 2】把函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，所得图象表示的函数解析式为 $y=\sin x$，则 $\omega=$________，$\varphi=$________.

【思路分析】由条件利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换规律求解.

【解析】

【思维拓展】三角函数图象变换“先平移后伸缩”和“先伸缩后平移”需要注意以下两点：(1)两种变换中平移的单位长度不同，分别是$|\varphi|$和$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$，但平移方向是一致的；(2)虽然两种平移单位长度不同，但平移时平移的对象已有变化，所以得到的结果是一致的.

学以致用

一、选择题

1. 已知 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f(x)$的图象　　(　　)

A. 与 $g(x)$的图象相同

B. 与 $g(x)$的图象关于 y 轴对称

C. 向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度，得到 $g(x)$的图象

D. 向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度，得到 $g(x)$的图象

2. 把函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到的图象所表示的函数是 （　　）

A. $y=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right),x\in\mathbf{R}$　　B. $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right),x\in\mathbf{R}$

C. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right),x\in\mathbf{R}$　　D. $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right),x\in\mathbf{R}$

3. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，所得图象的函数解析式是 （　　）

A. $y=2\cos^2 x$　　B. $y=2\sin^2 x$

C. $y=1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $y=\cos 2x$

4. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(x\in\mathbf{R},\omega>0)$ 的最小正周期为 π，为了得到函数 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象，只要将 $y=f(x)$ 的图象 （　　）

A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

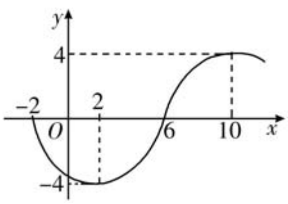
C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

二、填空题

5. 为得到函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移________个单位长度.

6. 将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 个单位长度后，得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，则 $\varphi=$________.

7. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图，则函数的表达式为____________.



三、解答题

8. 用五点画图法画出函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的简图.

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的周期为 π，且图象上的一个最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的最值.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对______题 错______题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题十一 三角函数中的化简与求值

主题概说

一、重要知识梳理

1. 同角三角函数的基本关系

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2. 三角函数诱导公式

角度	sin	cos	tan
$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	—
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	—

3. 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$；$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

4. 二倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

二、规律方法总结

1. 同角三角函数的关系有平方关系和商数关系，要注意 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 这个隐含条件，在解题时要经常想到它. 涉及 $\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 的问题，常采用平方法求解. 商数关系主要用来弦切互化，简化运算.

2. 三角函数式化简方法

(1)常值代换：特别是“1”的代换，如 $1=\cos^2x+\sin^2x=\tan 45°$等.

(2)项的分拆与角的配凑：如分拆项 $\sin^2x+2\cos^2x=(\sin^2x+\cos^2x)+\cos^2x=1+\cos^2x$；配凑角 $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$等.

(3)幂的变换：常用降幂公式有 $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$等.

(4)引入辅助角：$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$，这里辅助角 φ 所在象限由 a，b 的符号确定，φ 角的值由 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$确定.

(5)公式变形：三角公式是变换的依据，应熟练掌握三角公式的直接应用、逆用以及变形式的应用. 如 $\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$，$\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$等.

3. 注意事项

项数尽可能少；种类(名称)尽可能少；角尽可能少；次数尽可能低；分母尽可能不含三角函数式；尽可能不带根号；能求出值的求出值来.

典例剖析

【例 1】已知 $\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$.

(1)求$\dfrac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{3\sin^2\theta+\cos^2\theta}$的值；

(2)求 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-3\cos^2\theta$ 的值.

【思路分析】(1)对于正切值可以确定的，待求式可以化成关于正切的齐次式，代入后求出结果即可；(2)利用“1”的代换转化为关于 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 的齐次式再求解.

【解析】

【思维拓展】已知 $\tan\alpha$ 的值，求关于 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 齐次式的值的方法：(1)对于形如$\dfrac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$，$\dfrac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{d\sin^2\alpha+e\sin\alpha\cos\alpha+f\cos^2\alpha}$的分式，分子、分母同时除以 $\cos\alpha,\cos^2\alpha$，将正、余弦转化为正切，从而求值.(2)对于形如 $a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha$ 的式子，将其看成分母为 1 的分式，再将分母 1 变形为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，转化为形如$\dfrac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$的式子求值.

【例 2】已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\dfrac{x}{2}$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期；

(2)求 $f(x)$在区间$[-\pi,0]$上的最小值.

【思路分析】先用降幂公式和辅助角公式进行三角恒等变形，把函数化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的形式.(1)利用 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$求出周期；(2)由$-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 可求出$-\dfrac{3\pi}{4}\leqslant x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，借助正弦函数图象找出在这个范围内 $f(x)$的最小值.

【解析】

【思维拓展】三角恒等变换与三角函数图象性质的综合问题的解题策略：运用三角函数的和、差、倍角公式将函数关系式化成 $y=a\sin\omega x+b\cos\omega x+k$ 的形式，借助辅助角公式化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$(或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+k$)的形式，将 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体，研究函数的性质.

学以致用

一、选择题

1. $\cos 300^\circ=$ ( )

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 若 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，且 α 为第四象限角，则 $\tan\alpha=$ ( )

A. $\frac{12}{5}$　B. $-\frac{12}{5}$　C. $\frac{5}{12}$　D. $-\frac{5}{12}$

3. 若 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，则 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ ( )

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 已知 $\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+5\cos\alpha}=-5$，则 $\tan\alpha=$ ( )

A. -2　B. 2　C. $\frac{23}{16}$　D. $-\frac{23}{16}$

5. $\sin 10^\circ\sin 40^\circ+\sin 50^\circ\cos 10^\circ=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A\cos B>\sin A\sin B$，则 $\triangle ABC$ 为 ( )

A. 锐角三角形　B. 直角三角形　C. 钝角三角形　D. 无法判定

二、填空题

7. 化简：$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)}=$________________.

8. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=$________.

9. 若 $\tan\alpha=2$，$\tan(\beta-\alpha)=3$，则 $\tan(\beta-2\alpha)=$____________.

10. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{5}{4}$，则 $\sin\alpha\cos\alpha=$______.

三、解答题

11. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$. 求：

(1) $\tan\alpha$ 的值；

(2) $\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

12. 已知函数 $f(x)=\sin x-2\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对______题 错______题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

主题十二 三角函数的应用

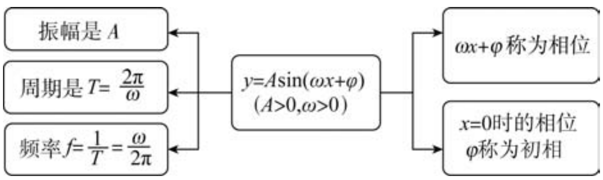
主题概说

一、重要知识梳理

利用三角函数的特性解决实际问题是三角函数的重要内容，三角函数也是描述周期变化的重要函数模型.

二、规律方法总结

1. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$中参数的物理意义



2. 三角函数模型的作用

三角函数作为描述现实世界中周期现象的一种数学模型，可以用来研究很多问题，在刻画周期变化规律、预测未来等方面都发挥着十分重要的作用.

3. 用函数模型解决实际问题的一般步骤

收集数据$\longrightarrow$画散点图$\longrightarrow$选择函数模型$\longrightarrow$求解函数模型$\longrightarrow$检验.

典例剖析

【例题】将一根细线的一端固定，另一端悬挂一个小球，小球来回摆动时，离开平衡位置的位移 s（单位：cm）与时间 t（单位：s）满足函数关系 $s=6\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)画出它一个周期的图象；

(2)回答以下问题：

①小球开始摆动（即 $t=0$）时，离开平衡位置的位移 s 是多少厘米？

②小球摆动时，离开平衡位置的最大距离是多少厘米？

③小球来回摆动一次需要多少秒？

【思路分析】(1)由 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 可求出函数的周期，再利用五点画图法画出函数的图象；(2)根据函数关系式和图象可求出相应结果.

【解析】

【思维拓展】在物理学中，当物体做简谐运动时，可以用正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 来表示运动的位移 y 随时间 x 变化的规律，其中：(1)A 称为简谐运动的振幅，它表示物体运动时离开平衡位置的最大距离；(2)$T=\frac{2\pi}{\omega}$ 称为简谐运动的周期，它表示物体往复运动一次所需的时间；(3)$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ 称为简谐运动的频率，它表示单位时间内物体往复运动的次数.

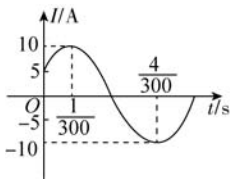
学以致用

一、选择题

1. 简谐运动 $y=4\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的相位与初相分别是 ( )

A. $5x-\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$　　B. $5x-\frac{\pi}{3}$，4　　C. $5x-\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}$　　D. 4，$\frac{\pi}{3}$

2. 电流强度 I(单位：A)随时间 t(单位：s)变化的函数 $I=A\sin(\omega t+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2},t\geqslant 0\right)$ 的图象如图所示，则当 $t=\frac{1}{100}$ s时，电流强度是 ( )



A. -5 A　　B. 5 A　　C. $5\sqrt{3}$ A　　D. 10 A

3. 上班高峰期某十字路口的车流量 y(单位：辆/min)与时间 t(单位：min)满足函数 $y=50+4\sin\frac{t}{2}(0\leqslant t\leqslant 20)$，则下列时间段内，车流量增加的是 ( )

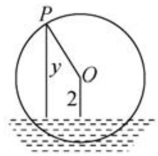
A. $[0,5]$　　B. $[5,10]$　　C. $[10,15]$　　D. $[15,20]$

4. 方程$|x|=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内 (　　)

A. 没有根　　B. 有且仅有一个根

C. 有且仅有两个根　　D. 有无穷多个根

5. 如图为一半径为 3 m 的水轮，水轮圆心 O 距离水面 2 m，已知水轮每分钟旋转 4 圈，水轮上的点 P 到水面距离 y(单位：m)与时间 x(单位：s)满足函数关系 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+2$，则有 (　　)



A. $\omega=\frac{2\pi}{15}, A=3$　　B. $\omega=\frac{15}{2\pi}, A=3$

C. $\omega=\frac{2\pi}{15}, A=5$　　D. $\omega=\frac{15}{2\pi}, A=5$

二、填空题

6. $y=-2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$的振幅为________，周期为________，初相为________.

7. 某城市一年中 12 个月的平均气温与月份的关系可近似地用三角函数 $y=a+A\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-6)\right]$ $(x=1,2,3,\cdots,12,A>0)$来表示，已知 6 月份的月平均气温最高，为 28 ℃，12 月份的月平均气温最低，为 18 ℃，则 10 月份的月平均气温为________℃.

三、解答题

8. 某实验室一天的温度(单位：℃)随时间 t(单位：h)的变化近似满足函数关系 $f(t)=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,24)$.

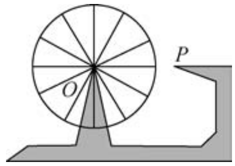
(1)求实验室这一天的最大温差；

(2)若要求实验室温度不高于 11 ℃，则在哪段时间实验室需要降温？

9. 如图所示，一个摩天轮半径为 50 m，轮子的底部在地面上5 m 处，如果此摩天轮按逆时针转动，每 20 min 转一圈，且当摩天轮上某人经过点 P 处(点 P 与摩天轮中心高度相同)时开始计时.

(1)求此人相对于地面的高度 h(单位：m)关于时间 t(单位：min)的函数关系式；

(2)在摩天轮转动一圈的时间内，约有多长时间此人相对于地面的高度不小于 80 m?



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对______题 错______题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

预习知新篇

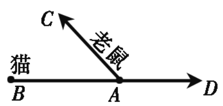
假日导学 亲爱的同学，假期即将结束，新的学期即将开始！我们根据下学期的学习要求，以已学知识或者生活情景为背景，创设了两个富含趣味的情景预习专题："平面向量及其应用"和"概率"，旨在激发你对下学期数学学习的期待与向往.

预习一　平面向量及其应用

情景导学

南辕北辙这个成语故事可谓家喻户晓，讲的是战国时期，有个人要到南边的楚国去. 他乘着马车往北走. 有人提醒他："到楚国应该朝南走，你怎能往北呢？"他却说："不要紧，我有一匹好马！"如果此人一直这样走下去，他能不能到达楚国呢？

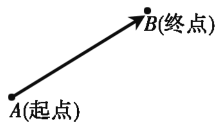
如图，一只老鼠被猫发现后立即由 A 向西北方向的 C 处逃窜，猫由 B 向正东方向的 D 处追去，猫能否抓到老鼠？



不难发现，此人一直朝北走是不可能到达楚国的，猫朝 D 处方向去追老鼠也不可能追到，这两个事例的关键在于没有处理好方向这个问题，不论要去楚国的人能走多远，猫能跑得多快，只要方向错误，他们根本无法到达自己的目的地.

在现实生活中，我们会遇到很多量，其中一些量在取定单位后用一个实数就可以表示出来，如长度、质量等. 还有一些量，如我们在物理学科中学到的位移、速度、加速度等，都是既有大小又有方向的量. 在数学中，我们对这种量加以抽象，就得到了我们在下学期将要学到的向量.

我们以位移为例，一个人直线行走的路线起点为 A，终点为 B，我们可以连接 AB，AB 的线段长度就是此人行走的距离，而在终点 B 处加上箭头就表示此人行走的方向，如图所示.



向量可以用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示，记作向量 $\overrightarrow{AB}$. 有向线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的大小，也称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度(或称模)，记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 向量也可以用字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示.

向量的运算具有鲜明的几何背景，平面几何图形中的许多性质，如全等、相似、长度、夹角等都可以用向量的线性运算及数量积表示出来，从而平面几何中的许多问题都可以用向量运算的方法加以解决. 因此，平面向量的学习对于提高我们对数学运算的认识水平、理解数学运算和逻辑推理的关系具有极其重要的作用. 平面向量与三角函数、复数等内容紧密相连，在其他学科(特别是物理)中也有广泛应用，使得向量内容显得极其重要. 请尝试着做做下面关于向量的题目.

小试身手

1. 判断正误，正确的记"√"，错误的记"×".

(1)两个向量能比较大小. ( )

(2)向量的模是个正实数. ( )

(3)向量就是有向线段. ( )

2. 下列有关物理量的说法正确的是 ( )

①密度 ②温度 ③速度 ④质量 ⑤功 ⑥位移

A. ①②③是数量，④⑤⑥是向量　　B. ②④⑥是数量，①③⑤是向量

C. ①④是数量，②③⑤⑥是向量　　D. ①②④⑤是数量，③⑥是向量

3. 下列说法中错误的是 ( )

A. 向量的大小与方向有关　　B. 单位向量的长度都相等

C. 向量的模是一个非负实数　　D. 零向量是长度为 0 的向量

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

预习二　概　率

情景导学

现实中,像日出东方、日落西方这样在一定条件下能预知结果的现象称为确定性现象.同时有一些现象,在一定条件下事先不能预知结果,称为不确定性现象.生活中,不确定性现象有很多.

例如,我们每天都会看天气预报,了解未来几天的天气可能的情况,或是晴天,或是多云,或是雨天.人们经常抱怨天气预报不准,一方面是由于天气系统复杂多变,另一方面则是因为天气预报往往是针对一个较大的地区和一个较长的时段做出的预测.对上述问题的一个很好的处理办法就是进行概率预报,例如天气预报说:"明天的降雨概率为60%."

我们再来看看另一个例子.彩票摇奖时,将50个质地和大小完全相同、分别标号1,2,…,50的球放入摇奖机中,经过充分搅拌后摇出一个球,即为中奖号.这样的摇奖方法会有50种可能的结果,而出现哪种结果是无法确定的.

在高中数学中,我们把天气预报、彩票摇奖这样的活动称为随机试验,其具有以下特点:

(1)试验可以在相同条件下重复进行;

(2)试验的所有可能结果是明确可知的,而且不止一个;

(3)每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但事先不能确定出现哪一个结果.

天气预报预报的明日天气可能是晴天、多云、雨天等,彩票摇奖开出的结果可能为1~50中的任何一个,我们将这些结果统称为事件,而将每一个结果称为基本事件.根据事件发生的情况,我们可以将基本事件分为:

(1)在每次试验中都会发生的事件称为必然事件;

(2)在每次试验中都不会发生的事件称为不可能事件;

(3)在每次试验中可能发生也可能不发生的事件称为随机事件.

在生活中出现最多的就是随机事件，这也是我们学习概率中的重点. 研究随机现象，最重要的就是知道随机事件发生的可能性大小. 随机事件发生可能性大小的度量(数值)，就是事件的概率. 事件 A 的概率用 $P(A)$ 表示.

一般而言，给出一个数学对象的定义时，就可以从定义出发研究这个数学对象的性质. 下学期，我们也将研究概率的基本性质. 请尝试着做做下面关于概率的题目.

小试身手

1. 下列事件是必然事件的是 （　　）

A. 抛掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上

B. 某人购买的彩票号码恰好是中奖号码

C. 标准大气压下，把水加热至 100 ℃，水能沸腾

D. 骑车经过十字路口时，信号灯的颜色是绿色

2. 下列事件中是随机事件的是 （　　）

A. 若 a,b,c 都是实数，则 $a(bc)=(ab)c$　　B. 没有空气和水，人也能生存下去

C. 掷一枚质地均匀的硬币，反面朝上　　D. 9 月有 30 天

3. 某高中一年级要组建数学、计算机、航空模型三个兴趣小组，某学生只选报其中一个，则基本事件共有 （　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

4. 将一枚质地均匀的硬币向上抛掷 10 次，其中“恰有 5 次正面朝上”是 （　　）

A. 必然事件　　B. 随机事件　　C. 不可能事件　　D. 无法确定

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

假期总结测评卷

总分:100 分　时量:90 分钟

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $A=\{0,1,2,4\}$,$B=\{1,2,3\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{0,1,2,3,4\}$　B. $\{0,4\}$　C. $\{1,2\}$　D. $\{3\}$

2. 已知角 α 的终边上有一点 $M(\sqrt{11},-5)$,则 $\sin\alpha=$ ( )

A. $-\frac{5}{7}$　B. $-\frac{5}{6}$　C. $-\frac{5}{8}$　D. $-\frac{\sqrt{11}}{5}$

3. 函数 $f(x)=\ln(x^2-x)$的定义域为 ( )

A. $(0,1]$　B. $[0,1]$

C. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　D. $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

4. 下列函数中,定义域是 **R** 且为增函数的是 ( )

A. $y=\sin x$　B. $y=x^3$　C. $y=\ln x$　D. $y=|x|$

5. 已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$,$b=\log_2\frac{1}{3}$,$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$,则 ( )

A. $a>b>c$　B. $a>c>b$　C. $c>b>a$　D. $c>a>b$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\cdot 2^x, x\geqslant 0,\\ 2^{-x}, x<0,\end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$. 若 $f[f(-1)]=1$,则 $a=$ ( )

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{2}$　C. 1　D. 2

7. 已知 $\tan\frac{\alpha}{2}=3$,则 $\cos\alpha=$ ( )

A. $\frac{4}{5}$　B. $-\frac{4}{5}$　C. $\frac{4}{15}$　D. $-\frac{3}{5}$

8. 已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数,且以 2 为周期,则“$f(x)$为$[0,1]$上的增函数”

是“$f(x)$为$[3,4]$上的减函数”的 （ ）

A. 既不充分也不必要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 充要条件

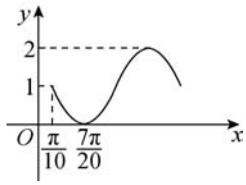
9. 函数 $y=f(x)$的图象如图所示，则 $y=f(x)$的解析式为 （ ）

A. $y=\sin 2x-2$

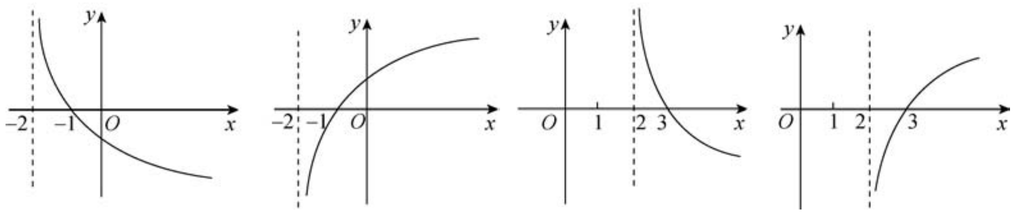
B. $y=2\cos 3x-1$

C. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)-1$

D. $y=1-\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$



10. 若函数 $f(x)=(k-1)a^x-a^{-x}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$在 **R** 上既是奇函数又是减函数，则 $g(x)=\log_a(x+k)$的图象是 （ ）



二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分，把答案填在题中的横线上）

11. 函数 $f(x)=\lg x^2$ 的单调递减区间是__________.

12. 已知幂函数 $f(x)$的图象过点$\left(8,\frac{1}{2}\right)$，则 $f(27)=$________.

13. 函数 $f(x)=2^x+x-5$ 的零点个数为__________.

14. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=$__________.

15. 已知函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(A>0,\omega>0)$，在一个周期内，当 $x=\frac{\pi}{12}$时，函数 $f(x)$取得最大值 2；当 $x=\frac{7\pi}{12}$时，函数 $f(x)$取得最小值-2，则函数 $f(x)$的解析式为____________________.

三、解答题(本大题共 4 小题,满分 40 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16.(本小题满分 10 分)计算:

(1)$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}-16^{\frac{3}{4}}-(\sqrt{2}-1)^{0}$;

(2)$\lg 5^{2}+\frac{2}{3}\lg 8+\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^{2}$.

17.(本小题满分 10 分)已知函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

(1)判断 $f(x)$的奇偶性;

(2)判断 $f(x)$在$[1,+\infty)$内的单调性并用定义证明;

(3)求 $f(x)$在区间$[-3,-1]$上的最小值.

18.(本小题满分 10 分)已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后,得到函数 $g(x)$ 的图象,求方程 $g(x)=1$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上的解集.

19.(本小题满分 10 分)经市场调查,某种商品在过去 50 天的销售量和价格均为销售时间 t(单位:天)的函数,且销售量近似地满足 $f(t)=-2t+200$,$1\leqslant t\leqslant 50$,$t\in\mathbf{N}$. 价格近似地满足 $g(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t+30, & 1\leqslant t\leqslant 30, t\in\mathbf{N},\\ 45, & 31\leqslant t\leqslant 50, t\in\mathbf{N}.\end{cases}$

(1)求该种商品的日销售额 S 与时间 t 的函数关系式;

(2)求日销售额 S 的最大值.

互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	□好 □良好 □一般	□好 □良好 □一般	
家长评价					

◎开场白

启程：向着梦想生活出发

令人期待的假日终于来啦！暂别紧张的校园生活，我们回到家庭，拥抱自然，走进社会，开始体验自主、轻快、多彩的假日生活。

假日里，你可以选择去登山，去感怀登临绝顶时一览众山小的气势；你可以选择去看海，在一望无际的蔚蓝中领略海纳百川的胸怀；你还可以选择去滑雪，在银装素裹的白色大地中感受冬日的清丽……

假日里，你可以欣赏优秀的影片，可以聆听优美的歌曲，可以伴着茶香品读好书；你可以去参加社区或乡镇的各种文体活动，或者走上街头体察生活，或者深入乡间采撷民风……

在你朝着梦想生活出发的旅程里，一定还要有《假日知新》的陪伴。

这是一本生动活泼、寓教于乐的生活体验之书，一本多元互动、学用结合的特色假期作业。浓郁的生活气息和自主的探知精神是她的灵魂。

数说天下 为你展现一片多彩生活的天空，让你学会用数据关注社会生活；

经典赏析 带你欣赏数学史上的经典故事，体现数学文化，让你感受数学之美；

趣味广场 为你展现一片趣味丰富的世界，让你在感受乐趣的同时增强思维能力；

数学故事 为你挑选一些与数学有关的人物及故事，让你思考探究背后的故事；

心理辅导 为你介绍学习方法，进行心理辅导，帮你消除学习的恐惧感，增强自信；

实践活动 为你设计新颖的实践活动，让你灵活运用课堂知识，架起学习与生活的桥梁。

——有了她，你将更加乐意走进生活，培养捕捉美的能力，用自己的智慧去发现生活之美。

——有了她，你会感觉生活处处皆学问，在生活与学习的互动中，你的所学必将发光发亮。

——有了她，你会觉得生活探索新奇而美好，有机会验证书本知识并进一步优化你的生活。

愿《假日知新》陪伴着你，一路上充满奇迹，充满发现。

数说天下

科技视界

“数”看梦天实验舱

▶2022年10月31日，梦天实验舱发射任务取得圆满成功，这是我国空间站建造的关键之战。11月3日，梦天实验舱成功完成转位，空间站“T”字基本构型在轨组装完成，向着建成空间站的目标迈出了关键一步。

梦天实验舱设计在轨寿命不小于10年，轴向长约17.9米，结构最大外径超过4米，发射质量约23吨。梦天实验舱可为航天员提供约32立方米的活动空间。中国空间站可实现长期3人，短期6人驻留。向空间站源源不断地输送电能的是我国自主创新研制的柔性太阳翼，它的单片长度27米，面积可达138平方米，厚度不到1毫米，它的日发电量相当于一个普通家庭一个月的用电量。

湖南5分钟下线一台挖掘机

◀2022年10月19日，二十大新闻中心举行第三场集体采访。湖南省委常委、宣传部部长杨浩东表示，湖南10秒钟可以生产一台铝轮毂，80秒钟可以生产一台发动机，5分钟可以下线一台挖掘机。

源自湖南的北斗卫星导航系统定位、轨迹等核心技术，彰显着“中国高度”；湖南参与研究轨道交通605公里的试验速度，彰显着“中国速度”；全球最大直径盾构机、全球最长臂架泵车等彰显着“中国强度”；海牛二号深海钻机在2000米海底打下231米的钻孔，彰显着“中国深度”。此外，湖南在工业领域攻克填补国内空白技术200多项，构建起“1个国家级+11个省级”制造业创新中心。

三星堆纪录片《不止考古》收官，评分9.8

◀2022年11月17日，某视频网站自制纪录片《不止考古·我与三星堆》正式收官，新兴创作手法与独特风格让考古日常变得平易近人，妙趣横生，赢得受众好评连连，站内获9.8分，铸就纪录片高口碑。

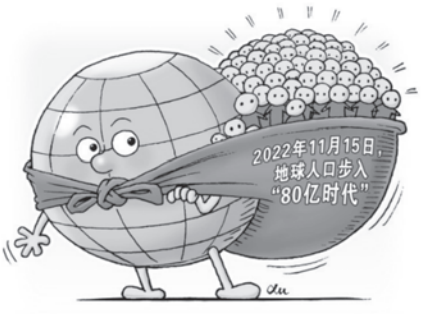
1986年，四川省广汉市西北三星堆一、二号祭祀坑的发现，可谓“一醒惊天下”。2019年，三星堆开始新一轮考古勘探，并在祭祀区发现6座新的祭祀坑。截至2022年9月，6座新发现的祭祀坑出土编号文物15109件，近完整器4060件，其中包括了三星堆迄今为止发现的最大青铜面具、体量巨大的青铜神兽以及各种造型奇特、充满想象力的青铜神坛等。

18岁高中生5天夺4金

▶“钰”汝于成神枪手，“千”锤百炼始成金！来自四川南充的18岁运动员庞钰千在2022国际射联世界射击锦标赛表现突出，一举拿下青年组50米步枪卧射混合团体、50米步枪三姿个人赛、50米步枪三姿团体、50米步枪三姿混合团体4枚金牌。射击一直是四川体育的传统强项，四川省陆上运动学校曾培养出张山、曹逸飞、刘天佑、兰兴等奥运冠军、世界冠军。而仍是一名高三的学生庞钰千，凭着自己努力和热爱，在开罗世锦赛的赛场上掀起了一场属于自己的青春风暴。

生活视角

世界人口达到80亿



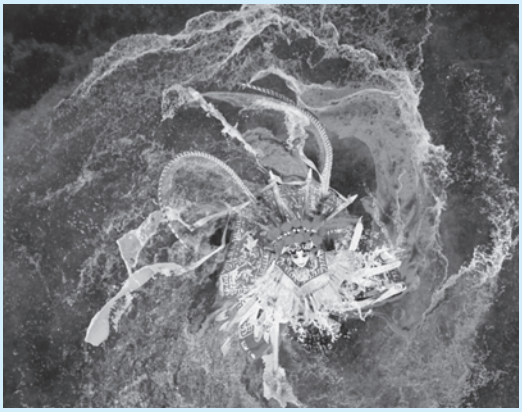
▶2022年11月15日，联合国宣布，世界人口在这天达到**80**亿。联合国网站“**80**亿人口日”栏目介绍说，这是人类发展史上的一个里程碑。全球人口增长归功于公共卫生、营养、个人卫生以及医药的改善使人类寿命逐渐延长。另外，一些国家的高生育率也推动了人口快速增长。联合国秘书长古特雷斯在2022年“世界人口日”的讲话中曾表示，我们庆祝人类的多样性，彰显彼此共同的人性。为人类在延长寿命和降低妇幼死亡率方面取得的进步感到惊叹。在庆祝的同时，人类也应该铭记对地球的共同责任。我们有共同的责任保护这颗星球。

东北首个核能供暖项目供热，惠及2万居民

◀在寒冷的冬季，我国北方供暖主要用煤、天然气、电等方式来取暖。这个冬天，辽宁大连红沿河镇开启了核电供暖新时代。2022年11月1日，辽宁红沿河核电站核能供暖示范项目正式投运供热，该项目是我国东北地区首个核能供暖项目，覆盖辽宁大连瓦房店市红沿河镇，可惠及当地近**2**万居民。该项目规划供热面积**24.24**万平方米，最大供热负荷为**12.77**兆瓦，利用红沿河核电站汽轮机抽汽作为热源，替代原有的**12**个燃煤锅炉房，实现红沿河镇清洁供暖。每年将减少标煤消耗**5726**吨，减排二氧化碳**1.41**万吨、烟尘**209**余吨、二氧化硫**60**余吨、氮氧化物**85**余吨、灰渣**2621**吨，将有效改善供暖区域大气环境，环保效益显著。

新奇视点

团队耗时1年用上亿颗水滴再现传统京剧



◀深圳某40余人的团队耗时1年，依靠灵动洒脱的京剧动作、恣意柔美的水花效果，创作了一段动画视频，营造出独特的“中国之美”。为了兼顾画面中衣服、动作的美感，团队对京剧动作进行重新编排，同时采用了600多个动捕点，完成了对京剧演员高速运动的动捕数据采集。在拍摄结束之后，特效与合成也用了10个月的时间精细完成。导演邓博弘表示，京剧是中国传统文化的经典代表之一，它的服装、动作、声音处处体现着中国人的美学造诣。而水又是柔软的、优美的，是表现京剧的动作、颜色的延展最适合的元素。所以他想用现代的影像技术赋予它们新活力，用与时俱进的方式来提高年轻人对传统文化的兴趣。

天下第一银杏树美了4000年

▶浮来山又名浮丘，位于莒县城西6千米处，海拔298.9米，面积20平方千米。这里冬暖夏凉，气候宜人，有“天然森林氧吧”之称，是夏季避暑胜地，冬季休闲佳处。2022年11月1日，浮来山上的“天下银杏第一树”迎来最佳观赏期。挂满金黄树叶的树枝，错落交替，枝枝相扣，绘织成一把巨大的“伞”，笼罩着古老的定林寺。据悉，该银杏树树龄约4000年，高26.7米，干粗15.7米，8人伸展双臂方能合围，占地600多平方米，至今仍枝繁叶茂，生机盎然，被誉为植物“活化石”。

经典赏析

神秘的数学常数

数学中有很多令人敬畏的常数，它们似乎是宇宙诞生之初就被精心选择好了的。那一串无限不循环的数字往往会让人陷入一种无底洞般的沉思——为什么这串数字不是别的，偏偏就是这样呢？它们的存在性和无理性都给它们赋予了浓厚的神秘色彩。下面几个就是数学中常用到的神秘的无理常数。

$\sqrt{2}\approx 1.414\,213\,562\,373\,095\,049$

古希腊哲学家毕达哥拉斯很早就注意到了数学与大千世界的联系。他创立了在古希腊影响深远的学派之一——毕达哥拉斯学派。毕达哥拉斯学派对数字的认识达到了审美的高度。他们相信，在这个世界中“万物皆数”，所有事物都可以用整数或者整数之比来描述。

第一个无理数$\sqrt{2}$的发现者是一位毕达哥拉斯学派的学者，他叫希伯索斯。据说，一日希伯索斯向毕达哥拉斯提出了这样的问题：边长为 1 的正方形，其对角线长度能用整数之比来表示吗？毕达哥拉斯思考后，证明了这个数确实无法用整数之比来表示。由于这一发现触犯了学派的信条，因此毕达哥拉斯学派杀害了希伯索斯。

利用勾股定理可知，这个数是方程 $x^2=2$ 的唯一正数解，我们通常就记作$\sqrt{2}$。$\sqrt{2}$可能是最具代表性的无理数了，无理数的出现推翻了古希腊数学体系中的一个最基本的假设，直接导致了第一次数学危机。

无理数虽说无理，在生产生活中的用途却相当广泛。例如，量一量你的数学教材的长与宽，你会发现它们的比值约为 1.414。

自然底数 e ≈ 2.718 281 828 459 045 235

17 世纪末，数学家伯努利发现一个有趣的现象：当 x 越大时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 将会越接近某个固定的数。例如，$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\approx 2.704\,81$；$\left(1+\frac{1}{1\,000}\right)^{1\,000}\approx 2.716\,92$；$\left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000}\approx 2.718\,15$。

18 世纪，数学家欧拉仔细研究了这个问题，并第一次用字母 e 来表示当 x 无穷大时 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值。他不但求出了 $\mathrm{e}\approx 2.718$，还证明了 e 是一个无理数。

e 的用途也十分广泛，很多公式里都有 e 的身影。例如，如果把前 n 个正整数的乘积记作 $n!$，则有斯特林公式：$n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1=n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$。

在微积分中，无理数 e 更是大显神通，这使得它也成为高等数学中最重要的无理数之一。

圆周率 π ≈ 3.141 592 653 589 793 238

不管圆有多大，它的周长与直径的比值总是一个固定的数，我们把这个数叫做圆周率，用希腊字母 π 来表示。人们很早就认识到了圆周率的存在，对圆周率的研究甚至可以追溯到公元前。几千年过去了，人类对圆周率的了解越来越多，但却一直被圆周率是否有理的问题困扰。直到 1761 年，数学家兰伯特才证明了π是一个无理数。

π 是数学中最基本、最重要、最神奇的常数之一，它常常出现在一些与几何毫无关系的场合中。例如，任意取出两个正整数，则它们互质（最大公约数为 1）的概率为 $\frac{6}{\pi^2}$。

思考探究

你还知道哪些神秘的数学常数，简单介绍一下它们。

最美丽的数学公式 $e^{\pi i}+1=0$

玄兮妙兮，欧拉公式，她是数学美的金科玉律。

宫商角徵羽，声韵合于五音；金木水火土，万物化于五行；1，0，π，e，i，等式成于五数。五个最重要的常数，用加乘幂等系于一线，熔于一炉。

道生一，一生二，二生三，三生万物。自然数1，是整数的单位，是数字的始祖。

无为有处有还无。中性数0，空间原点，非正非负，亦庄亦谐，加之减之而不变，乘之则归尽，除之则无穷。

山巅一寺一壶酒，地老天荒无尽头。圆周率π，脍炙人口，妇孺皆诵。割圆祖率，幂级展开。计算证明，永无止境。

自然对数，顺其自然，以e为底，简洁方便。人口增长、生存竞争、布朗运动、冷却定律……e无处不在，宛若美神，赋予各种函数和公式最洒脱的形式。

太虚幻境，即真如福地。欧拉首先使用符号 $i=\sqrt{-1}$，以更深的认识为数学王国又开辟出一块疆域，从此方程的求根、交流电的表示……各种计算都焕然一新。

五朵金花，各放异彩，天造地设，珠联璧合。

名兮贵兮，欧拉公式，她是数学家的智慧结晶。

思考探究

写出你认为美丽的数学公式，并说明理由。

趣味广场

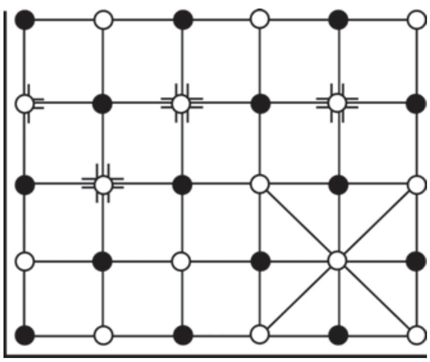
我们来跳“函数舞”

你想过函数图象也可以用舞蹈来展示吗？这幅名为《美丽的舞蹈动作》的漫画就让函数图象变得生动活泼起来。图中一共画了 12 个跳舞的卡通小人，人物的肢体动作全部对应模仿了中学数学里的函数图象。有同学称，学会了这套舞蹈，画函数图象便轻而易举了。

小人将身体的中轴线作为函数图象里的纵轴，对于余弦三角函数 $\cos x$，小人将两条胳膊形象地做出了左右对称的波浪状；而当出现“x 的绝对值”时，他又将双臂上举，摆出了一个 V 字形姿势。

让我们一起来跳舞吧！试着把这些舞蹈跳给你的家人或同伴看，让他们猜猜是什么函数。再充分发挥你的想象力，联系其他的函数图象，跳出不同的舞蹈。

马能跳回原位吗



象棋盘上的马，从一点出发，跳了 9 999 步，能跳回原位吗？

要想具体地试验这 9 999 步的各种跳法，是很难实现的。有一个巧妙的办法来解决这个问题。把棋盘上的交叉点交替染成黑色和白色，马走“日”字，一步只能由白到黑或由黑到白，跳偶数步不变色，跳奇数步一定变色，9 999 是奇数，从黑点出发跳 9 999 步只能到白点，当然回不到原位。把点染成黑白两色，就是设计了一个从格子点集到两元素集 { 黑，白 } 的映射。

对数的奇迹
——你也能当速算大师

编者按：学习了对数后，很多同学可能认为对数在生活中没什么用，下面这个故事可以让你感受到对数的奇迹。

一场速算大师夸下海口的表演，明天就要举行了。

这位速算大师事前贴出广告说，他能当着大家的面，在几秒钟之内把一个几十位数的几十次方根迅速算出来。当然，涉及的全体数都是整数。如果表演失败了，他会给出题的人 100 万元人民币。

表演准时举行。“请速算大师把这个 35 位数的 31 次方根心算出来。你写，我念。”有个人自信地第一个出题，以挑战的口吻大声说。

“13。”还没有等那个人把数字念完，速算大师就给出了答案！这时，全场惊讶不已，议论纷纷，还不知道什么数，居然就能得到答案，而且还快如闪电！

其实，得到这个答案的玄机是只有 13 的 31 次方是 35 位数。比 13 小的数的 31 次方少于 35 位数，比 13 大的数的 31 次方多于 35 位数。现在的问题是，速算大师怎么会事前知道这一点呢?

原来，速算大师的“法宝”就是对数。1~20 的自然数的两位常用对数，速算大师是早已默默地牢记在心中。其实我们只需记忆几个数的两位常用对数就行了。为什么呢? 因为其中合数的常用对数等于它的素数因数的常用对数的和，因此，如果只记 1~10 的自然数的常用对数，只要牢记 2，3，7 的两位常用对数分别为 0.30，0.48，0.85 就行了，其他 7 个自然数的常用对数就可以快速推算出来。例如，5 的常用对数就是 10 的对数 1.00 减去 2 的常用对数 0.30 得到 0.70。当然，如果你还要记 11~20 的常用对数，就还要记 11，13，17，19 这 4 个数的常用对数。

1~20 的常用对数列于下表：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00	**0.30**	**0.48**	0.60	0.70	0.78	**0.85**	0.90	0.95	1.00

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.04	1.08	**1.11**	1.15	1.18	1.20	**1.23**	1.26	**1.28**	1.30

其中只有 7 个加粗的数是要“死记硬背”的。好了，现在回到前面速算大师不知道 35 位数的具体数字，为什么就能很快得到答案的问题上来。设正整数为 a，a 的 31 次方是个 35 位数，那么 $10^{34} \leqslant a^{31} < 10^{35}$，取常用对数得 $\frac{34}{31} \leqslant \lg a < \frac{35}{31}$，而 $\frac{34}{31}=1.09\cdots > 1.08$，$\frac{35}{31}=1.12\cdots < 1.15$。显然，上表中满足这个条件的只有 13 的常用对数，这就是 13 这个答案的来源。当然，要当这种速算大师还得有心算两位数除法的基本功。

说起速算大师，也许我们会觉得很神奇，而且离自己相当遥远。其实在掌握了一定的方法之后，我们自己就是速算大师。

见证奇迹

你能根据文章介绍的方法算出 244 140 625 的 12 次方根吗？

富兰克林的遗嘱

你知道本杰明·富兰克林是谁吗？富兰克林利用放风筝而感受到电击，从而发明了避雷针。这位美国著名的科学家死前留下了一份遗嘱：

“……1 000 英镑赠给波士顿的居民，如果他们接受了这 1 000 英镑，那么这笔钱应该托付给一些挑选出来的公民，他们得把这些钱按每年 5% 的利率借给一些年轻的手工业者去生息。这些钱过了 100 年增加到 131 000 英镑。我希望那时候用 100 000 英镑来建立一所公共建筑物，剩下的 31 000 英镑拿去继续生息 100 年。在第二个 100 年末，这笔款增加到 4 061 000 英镑，其中 1 061 000 英镑还是由波士顿的居民来支配，而其余的 3 000 000 英镑让马萨诸塞州的公众来管理。过此之后，我可不敢多作主张了！”

你可曾想过：区区的 1 000 英镑遗产，竟立下几百万英镑财产分配的遗嘱，是“信口开河”，还是“言而有据”呢？事实上，只要借助于复利公式，同学们完全可以通过计算来作出自己的判断。

$y_n=m(1+a)^n$ 就是复利公式，其中 m 为本金，a 为年利率，y_n 为 n 年后本金与利息的总和。在第一个 100 年末，富兰克林的财产应增加到 y_{100}：$y_{100}=1\,000\times(1+5\%)^{100}\approx 131\,501$（英镑），比遗嘱中写的还多出 501 英镑。在第二个 100 年末，遗产就更多了：$y_{100'}=31\,501\times(1+5\%)^{100}\approx 4\,142\,421$（英镑）。可见富兰克林的遗嘱是有科学根据的。

遗嘱故事启示我们：在复利效应下，微薄的财产，低廉的利率，本息可以变得令人瞠目结舌。

我来投资

查阅相关资料了解什么是复利，其实复利俗称“利滚利”“驴打滚”。假设你现在有本金 500 元进行投资，利率或者投资回报率为每年 3%，按年复利计算，投资年限为 30 年，那么，30 年后你将得到的本息和为多少？

数学智力题

01 顶角多大

假设有一个圆锥形的冰山，冰山表面绝对光滑。你打算把一个绳圈套在山尖上，然后沿着绳索爬上去。考虑两个极端情况：如果冰山特别尖，顶角特别小，这个计划自然不成问题；但若冰山特别“肥”，顶角特别大，向下拉绳子后，绳圈将会滑出山尖。这中间一定有一个临界点，也就是绳圈掉不出来的最大顶角。这个顶角是多大？

02 谁没交卷

高三（1）班有 50 个同学，他们的学号分别是 1, 2, 3，…，50 。一次数学考试结束后，同学们都交完试卷离开了考场。数学老师小 A 清点试卷时发现，他手中只有 49 张试卷。究竟是谁没有交卷呢？正巧小 A 手边没有笔，他也不想把所有卷子按照学号重新排序。他希望不借助任何工具，仅仅通过依次查看每张试卷上写的学号，便找出缺失的那个学号。和常人一样，小 A 的记忆力很有限，他没法记住之前到底看到过哪些学号。不过，作为一个数学老师，小 A 拥有不错的计算能力。他有办法找出没交卷的那位同学的学号吗？

03 智取 100

假设排列着 100 个乒乓球，由两个人轮流拿球装入口袋，能拿到第 100 个乒乓球的人为胜利者。条件是：每次拿球者至少要拿 1 个，但最多不能超过 5 个。问：如果你是最先拿球的人，你该拿几个？以后怎么拿才能保证你能得到第 100 个乒乓球？

04 小圆转几周

两个圆环，半径分别是 1 和 2，小圆在大圆内部绕大圆圆周转一周，则小圆自身转了几周？如果小圆在大圆的外部，小圆自身转几周呢？

05 封闭回路

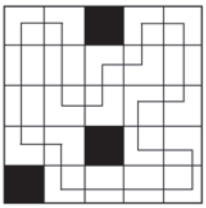


图 1

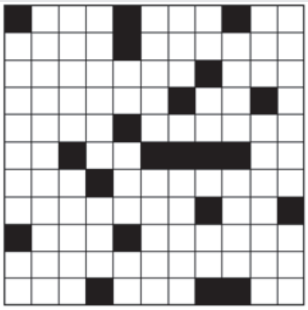


图 2

像图 1 示例那样，在图 2 中画出一条封闭的回路。这条路必须既无重复又无遗漏地经过每一个白色方格，你会怎么画呢？

06 能否必胜

小 A 和小 B 玩游戏。从小 A 开始，两个人轮流从 1 到 9 中选一个数（已经选过的数不能再选），约定谁先选到三个和为 15 的数，谁就获胜了。比方说，小 A 先选了 4，然后小 B 选 5，小 A 选 6，小 B 选 2。为了阻止小 B 获胜，下一步小 A 就必须得选 8（否则小 B 将靠 5，2，8 三个数获胜）。为了阻止小 A 获胜，小 B 选择了 1（否则小 A 将靠 6，8，1 三个数获胜）。但是，这已经阻止不了小 A 的胜利了——小 A 可以选择 3，从而得到 4，8，3 三个加起来等于 15 的数。在这个游戏中，小 A 有必胜策略吗？

07 盲人取袜

有两位盲人，他们各自买了 2 双黑袜和 2 双白袜，8 双袜子的布质、大小完全相同，而每双袜子都有一张商标纸连着。两位盲人不小心将 8 双袜子混在了一起。他们怎样才能取回黑袜和白袜各 2 双？

08 聪明的老鼠

有一次，一只猫抓了 20 只老鼠，排成一列。猫宣布了它的决定：首先将站在奇数位上的老鼠吃掉，接着将剩下的老鼠重新按 1，2，3，4，… 编号，再吃掉所有站在奇数位上的老鼠。如此重复，最后剩下的一只老鼠将被放生。一只聪明的小老鼠听了，马上选了一个位置，最后剩下的果然是它，猫将它放走了。

你知道这只聪明的小老鼠站的是第几个位置吗？

09 1 元之谜

有三个人去住旅馆，住三间房，每间房 10 元，于是他们一共付给老板 30 元。第二天，老板觉得三间房只需要 25 元就够了，于是叫服务员退回 5 元给三位客人，谁知服务员贪心，只退回每人 1 元，自己偷偷拿了 2 元，这样一来便等于那三位客人每人各花了 9 元，于是三个人一共花了 27 元，再加上服务员独吞了 2 元，总共是 29 元。可是当初他们三个人一共付出 30 元，那么还有 1 元呢？

数学故事

白马非马

在古代春秋战国时期，中国学术思想可谓“百家争鸣，百花齐放”。其中，名家公孙龙以诡谲善辩著称，他有一个著名的怪论，就是“白马非马”。

公孙龙通过其中一个理由来证明“白马非马”这个命题。“求马，黄、黑马皆可致；求白马，黄、黑马不可致。……如黄、黑马一也，而可以应有马，而不可以应有白马，是白马之非马，审矣！”这一点是论及“马”“白马”的外延不同。“马”的外延包括所有马，不管任何颜色的区别。而“白马”的外延只包括白色的马，两者有颜色的区别。由于“马”与“白马”的外延不同，所以“白马非马”。

那么问题出在哪里呢？其实是公孙龙对“是”字的利用——偷换概念。“是”可以表示“等于”“属于”或“包含于”，因此“非”可以表示“不等于”“不属于”或“不包含于”。公孙龙将“白马非马”解释成“白马集合不等于马集合”。例如：

“关羽的坐骑是赤兔马。”这里的“是”表示数学中的“=”，意味着“关羽的坐骑”和“赤兔马”是同一个事物。

“赤兔马是红马。”这里的“是”表示数学中的“∈”，意味着“赤兔马”属于“红马”集合中的一个元素。

“红马是马。”这里的“是”表示数学中的“⊆”，意味着“红马”是小集合，“马”是大集合，红马集合包含于马集合。

汉语中的“是”可以用来表示属于或包含，如“这个动物是狗”或“白马是马”；也可以用来表示等价，“白马非马”中的“非”，就是对这种“是”的否定。

公孙龙没有把“是”和“非”的表达定义清楚。从结论上来说公孙龙并没有说错，这也不是诡辩，是集合论中正常的表达。而公孙龙也没有使逻辑或常识产生矛盾，因此“白马是马”和“白马非马”是同时成立的。

函数概念的发展简介

17 世纪，由于天文学和航海事业的发展，诸如计算天体的位置、远距离航海中对经度和纬度的测量等问题，都需要探究两个变量之间的关系，并根据这种关系对事物的变化规律作出判断，由此推动了函数概念的发展。

1692 年，德国数学家莱布尼茨最早使用“function”一词表示变量之间的依赖关系。

1718 年，瑞士数学家约翰·伯努利给出函数新的解释：“一个变量的函数是指由这个变量和常量以任意一种方式组成的一种量。”

1755 年，瑞士数学家欧拉给出了函数的如下定义：“如果某些变量，以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随之而改变，那么我们将前面的变量称为后面变量的函数。”在函数概念形成的早期阶段，由于接触到的函数都是解析式形式，于是多数人认为函数一定能用解析式表示，他们很难理解不能用解析式表示的函数。


狄利克雷

随着微积分等数学领域研究的深入，人们对函数的认识也向前推进了。1837 年，德国数学家狄利克雷提出：“如果对于 x 的每一个值，y 总有一个确定的值与之对应，那么 y 是 x 的函数。”此外，他还给出了一个数学史上著名的函数实例：狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1，x\text{ 为有理数}，\\0，x\text{ 为无理数}。\end{cases}$ 自此，人们对函数的本质有了深刻的理解，只要有一个法则，使得取

值范围中的每一个值x，有一个确定的值y和它对应就行了，不管这个法则是公式、图象、表格还是其他形式。

1859年，我国清代数学家李善兰将“function”一词译为“函数”。意为“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数。”古人将“函”与“含”字通用，都有“包含”的意思。

函数概念的发展与生产、生活以及科学技术的实际需要紧密相连，随着研究的深入，函数概念将更加严谨、精确。

思考探究

收集、阅读函数概念的形成与发展的历史资料，简要论述函数发展的过程、重要结果、主要人物及其对人类文明的贡献。

“加减乘除”演绎数学人生

数学家谷超豪在科学研究、教书育人中，处处都有“加减乘除”。

加法： 谷超豪＋胡和生＝院士夫妇。一个书房两张写字台，丈夫的书桌朝阳，妻子的书桌面墙。“我这个位置比她的好。”谷超豪说。每天，两位院士就在这里并肩研究。

是数学成就了谷超豪的爱情之梦。都说成功的男人背后有一个女人，但胡和生“推翻”了这个定理：不仅在生活上与丈夫相濡以沫，在事业上更是携手共进——她是中国第一位女数学院士，也是第一位走上国际数学家大会讲台的中国女性。

减法： 日常生活－家务＝更多工作时间。对这对院士夫妻而言，日常生活则是一道减法题，挤出来的时间便用在了做学问上。

说到节约时间，胡和生举了一个最有说服力的例子：“我一般不上理发店，通常都是自己洗了头发，再请谷先生帮我剪短一点，稍微修修就可以了。起初先

生说不会剪，我说不要怕，他慢慢地也就学会了，并且称赞这办法好，省了不少时间和麻烦。”

乘法：数学 × 文学＝丰富的人生。科学家与诗人似乎是两种气质完全不同的人。然而谷超豪却发挥业余爱好诗词的优势，做了一道成功的乘法，使自己的人生变得别样丰富。

“成汽遨太空，积雪踞高峰。一泻惊江海，化雨随东风。”这首诗正是谷超豪对自己一生的概括。年轻时，渴望飞得高远；年岁渐长，希望厚积而薄发；中年的理想是事业有成、在国内外数学界有影响；即便年老了，也希望为东方文化和数学事业再尽微薄之力。2010 年 1 月，84 岁高龄的谷超豪获得 2009 年度国家最高科学技术奖。

除法：一生成就 ÷ 数学＝桃李满天下。几十年来，谷超豪一直继承着苏步青教授留下的传统，定期参加由学生和青年教师组成的数学物理、几何讨论班。谷超豪说：“当年，老师苏步青对我说：‘我培养了超过我的学生，你也要培养超过你的学生’——他这是在将我的军！如今回首，我想，在一定程度上我可以向苏先生交待了！”

思考探究

你能用“加减乘除”来概括一下你的寒假生活吗？

心理辅导

测测你的学习动因

你愿意花较多的时间学习数学，那是因为：

A. 数学太难了，需要花费更多的时间才能掌握

B. 数学太重要了，既是基础学科又是主科

C. 老师讲课引人入胜，使自己对数学产生了从未有过的吸引力

D. 学好这一学科，为了与同学展开竞争

一个趣味心理测试，选项没有对错之分，请大家根据第一反应挑出一个最适合你的选择。

结果分析

选A的人

是既有灵活性又有毅力的人。这种学习态度是值得鼓励的。这一类型的人相信“勤能补拙”的道理，假如能在合理安排时间的前提下，多采用一些适合学科特点和自身思维方式的学习方法，多思多问，一定可以达到自己理想的目标。

选B的人

是一个有“主心骨”的人。对于课业，能分清主次，并对自己的时间、精力作出合理的分配，能够轻而易举地拥有学习主动权。学习态度是自发的，无需别人在旁边过多督促。

选C的人

恭喜你！学习终于对你产生了从未有过的吸引力。建议你珍惜对这门学科的新鲜感受，继续对这门学科进行更为深入的探索，以求获得这门学科的精髓之所在。千万不要因为外界环境的因素或探索过程中的困难而减弱学习兴致。

选D的人

读书的动机是很不自主的，看中的是分数、名次、荣誉、表扬等外表的东西。建议这类同学把学习的目标定得高远一些，端正学习态度，注重自身全面发展和多种能力的综合提高。

高中数学与初中数学的差别

随着年级的升高，数学的难度增大，进入高中以后，往往有不少学生不能适应高中数学的学习，进而影响到学习的积极性，导致成绩一落千丈。造成这种情况的原因有很多，但主要是由于学生不了解高中数学内容的特点与自身学习方法有问题等所造成的。所以我们要在学习高中课程的时候，注意把握初中与高中的异同之处、探寻思维上的层次递进关系。了解数学学科的特点，找到适合自己的学习方法，使自己进入数学的广阔天地中去。

一、高中数学与初中数学特点的变化

1. 数学语言在抽象程度上突变。

初、高中的数学语言有着显著的区别。初中数学主要以形象、通俗的语言方式进行表达。而高一数学一下子就触及非常抽象的集合语言、函数语言、图象语言等。

2. 思维方法向理性层次跃迁。

高一学生产生数学学习障碍的主要原因是高中数学思维方法与初中阶段大不相同。初中阶段，很多老师为学生将各种题建立了统一的思维模式，如解分式方程分几步，因式分解先看什么、再看什么，等等。而高中数学语言的抽象化对思维能力提出了高要求。这种能力要求的突变使很多高一新生感到不适应，故而导致成绩下降。

3. 知识内容的整体数量剧增。

高中数学与初中数学又一个明显的不同是知识内容的量急剧增加了，单位时间内接受知识信息的量与初中相比增加了许多，辅助练习、消化的课时相应地减少了。

4. 知识的独立性变大。

初中知识的系统性是较严谨的，给我们的学习带来了很大的方便。因为它便于记忆，又适合于知识的提取和使用。但高中的数学却不同了，它是由几块相对

独立的知识拼合而成，经常是一个知识刚学得有点入门，马上又有新的知识出现。因此，注意它们内部的小系统和各系统之间的联系成了学习时必须花力气的着力点。

二、学好数学的几点建议

1. 记数学笔记，特别是对概念理解的不同侧面和总结的数学规律等。

2. 建立数学纠错本。把平时容易出现错误的知识记载下来，以防再犯。争取做到：找错、析错、改错、防错。达到：能从反面入手深入理解知识，能由果索因把错误原因弄个水落石出，以便对症下药。

3. 记忆数学规律和数学小结论。

4. 与同学建立好关系，争做“小老师”，形成数学学习“互助组”。

5. 争做数学课外题，加大自学力度。

6. 反复巩固，消灭前学后忘。

7. 学会总结归类。(1) 数学思想归类；(2) 解题方法归类；(3) 知识应用归类。

总之，对高一学生来说，要学好数学，就要抱着浓厚的兴趣去学习数学，积极展开思维的翅膀，主动地参与教育全过程，充分发挥自己的主观能动性，愉快有效地学数学。

学习规划

根据自己的学习情况，制订一个适合自己的学习方法。

实践活动

商品型号与价格的关系

生活中的很多生活用品都会有不同的型号，比如洗发水有 200 mL，400 mL，750 mL 等，型号不同，对应的价格也不相同。在购买商品时，我们经常会考虑买哪一种型号的，这就要综合价格、家庭人数等情况来分析选择。

1. 选择一种商品，调查其不同型号的价格，并研究该商品价格关于型号的函数关系，对影响商品销售价格的主要因素进行分析，得到一般的价格规律。

2. 检验你建立的商品价格模型，选择一种建立函数关系时未被使用的型号价格，将利用模型推算出的价格与该型号商品的实际销售价格进行比较，考虑模型是否能进一步改进、如何改进。

3. 对你的结论进行实用价值分析，对购买商品有无参考价值，此规律对其他商品价格是否适用，等等。

4. 根据你对商品型号与价格的分析，请结合你的家庭人数，制订一个家庭年货采购方案。