CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

第一章 空间向量与立体几何

一、课标导向

课标要求

1. 空间直角坐标系

(1)在平面直角坐标系的基础上,了解空间直角坐标系,感受建立空间直角坐标系的必要性,会用空间直角坐标系刻画点的位置.

(2)借助特殊长方体(所有棱分别与坐标轴平行)顶点的坐标,探索并得出空间两点间的距离公式.

2. 空间向量及其运算

(1)经历由平面向量推广到空间向量的过程,了解空间向量的概念.

(2)经历由平面向量的运算及其法则推广到空间向量的过程.

3. 向量基本定理及坐标表示

(1)了解空间向量基本定理及其意义,掌握空间向量的正交分解及其坐标表示.

(2)掌握空间向量的线性运算及其坐标表示.

(3)掌握空间向量的数量积及其坐标表示.

(4)了解空间向量投影的概念以及投影向量的意义.

4. 空间向量的应用

(1)能用向量语言描述直线和平面,理解直线的方向向量与平面的法向量.

(2)能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹角以及垂直与平行关系.

(3)能用向量方法证明必修内容中有关直线、平面位置关系的判定定理.

(4)能用向量方法解决点到直线、点到平面、相互平行的直线、相互平行的平面的距离问题和简单夹角问题,并能描述解决这一类问题的程序,体会向量方法在研究几何问题中的作用.

知识网络

- 空间向量与立体几何
  - 空间向量及其运算
    - 空间向量的加减运算
    - 空间向量的数乘运算
    - 空间向量的数量积运算
    - 空间向量的坐标运算
      - 共线向量定理与共面向量定理
      - 空间向量基本定理
      - 平行与垂直的条件
      - 向量的夹角与距离
  - 空间向量的应用
    - 直线的方向向量与平面的法向量
    - 用空间向量证明平行与垂直关系
    - 求空间距离与空间角

二、精讲精练

1.1 空间向量及其运算

第1课时 空间向量及其线性运算

学习目标	核心素养
1. 了解空间向量、向量的模、零向量、相反向量、相等向量、共线向量等概念.(重点) 2. 会用平行四边形法则、三角形法则作出向量的和与差,了解向量加法的交换律和结合律.(重点、难点) 3. 掌握数乘向量运算的意义及运算律.(重点)	1. 通过空间向量有关概念的学习,培养数学抽象素养. 2. 借助向量的线性运算、共线向量及共面向量的学习,提升直观想象和逻辑推理素养.

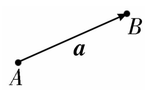
自主预习

知新预学

1. 空间向量的概念

(1)在空间,我们把具有 大小 和 方向 的量叫做空间向量,空间向量的大小叫做空间向量的 长度 或 模 .

(2)空间向量用有向线段表示,有向线段的 长度 表示空间向量的模. 如图,向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A,终点是 B,则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$,其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

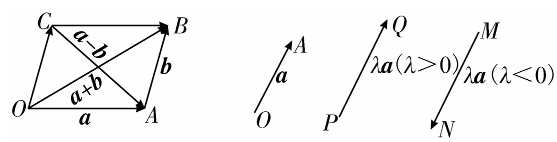


2. 几类特殊的空间向量

名称	定义及表示
零向量	长度为 0 的向量叫做零向量,记为 $\mathbf{0}$
单位向量	模为 1 的向量叫做单位向量
相反向量	与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度 相等 而方向 相反 的向量,叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量,记为 $-\boldsymbol{a}$
共线向量与平行向量	如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线 互相平行或重合 ,那么这些向量叫做共线向量或平行向量
相等向量	方向相同且模相等的向量叫做相等向量, 同向且等长 的有向线段表示同一向量或相等向量

3. 空间向量的加法、减法及数乘运算

(1)类似于平面向量,可以定义空间向量的线性运算. 如下图所示.



向量的加法:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.

向量的减法:$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$.

向量的数乘:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PQ}$;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{MN}$;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

(2)与平面向量一样,空间向量的线性运算满足以下运算律.(其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$)

交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

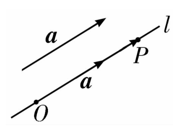
结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

4. 共线向量与共面向量

(1)向量共线的充要条件:对任意两个空间向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

(2)方向向量:如图,O 是直线 l 上一点,在直线 l 上取非零向量 $\boldsymbol{a}$,则对于直线 l 上任意一点 P,由数乘向量的定义及向量共线的充要条件可知,存在实数 λ,使得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{a}$. 我们把 与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的非零向量 称为直线 l 的方向向量. 这样,直线 l 上任意一点都可以由直线 l 上的一点和它的 方向向量 表示,也就是说,直线可以由其上一点和它的方向向量确定.



(3)共面向量:平行于 同一个平面 的向量叫做共面向量.

(4)向量共面的充要条件:如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x,y),使__$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$__.

小试牛刀

1. 下列命题中是假命题的是 (D)

A. 同平面向量一样,任意两个空间向量都不能比较大小

B. 两个相等的向量,若起点相同,则终点也相同

C. 只有零向量的模等于 0

D. 空间中任意两个单位向量一定相等

2. 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,与向量 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量共有 (C)

A. 1 个 B. 2 个

C. 3 个 D. 4 个

【解析】与 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{A_1D_1},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{B_1C_1}$,共 3 个.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互为相反向量,且 $|\boldsymbol{b}|=3$,则下列结论正确的是 (D)

A. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ B. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 为实数 0

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同 D. $|\boldsymbol{a}|=3$

【解析】向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互为相反向量,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模相等、方向相反. 故 D 正确.

4. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,已知下列各式:

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$;②$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}$;③$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$;④$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

其中运算的结果为 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有__4__个.

【解析】根据空间向量的加法运算以及正方体的性质逐一进行判断:①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$;

②$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$;

③$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$;

④$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$.

所以 4 个式子的运算结果都是 $\overrightarrow{AC_1}$.

互动课堂

合作探究

探究 1 空间向量的基本概念

【例 1】给出下列命题:

①两个空间向量相等,则它们的起点相同,终点也相同;

②若空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

③在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,必有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$;

④若空间向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$ 满足 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}$,则有 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{p}$;

⑤空间中任意两个单位向量必相等.

其中正确的个数为 (C)

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【解析】当两个空间向量起点、终点都相同时,这两个向量必相等,但两个向量相等,不一定有起点相同、终点相同,故①错;根据向量相等的定义,要保证两个向量相等,不仅模要相等,而且方向还要相同,但②中向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不一定相同,故②错;根据正方体的性质,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 的方向相同,模也相等,所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$,故③正确;命题④显然正确;对于命题⑤,空间中任意两个单位向量的模均为 1,但方向不一定相同,故不一定相等,故⑤错.

点睛 解答空间向量有关概念问题的关键点及注意点

(1)关键点:紧紧抓住向量的两个要素,即大小和方向.

(2)注意点:

①零向量不是没有方向,而是它的方向是任意的.

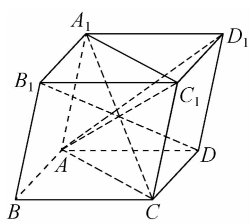
②单位向量的方向不一定相同,但它们的长度都是 1.

③两个向量的模相等,不一定是相等向量;反之,若两个向量相等,则它们不仅模相等,方向也相同. 若两个向量的模相等,方向相反,则它们互为相反向量.

【变式训练 1】在如图所示的平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,给定的下列各对向量:

①$\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1C}$;②$\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{B_1D}$;③$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$;④$\overrightarrow{CC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1A}$.

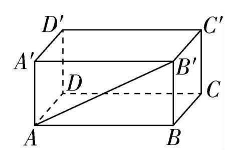
其中是相反向量的有__2__对.



【解析】$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 是相反向量;$\overrightarrow{CC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1A}$ 是相反向量. 故有 2 对.

探究 2 空间向量的线性运算

【例 2】如图,已知 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 是长方体,化简下列向量表达式,并在图中标出化简结果:



(1)$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{CB}$;

(2)$\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}$;

(3)$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$.

【解析】(1)$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA'}$.

(2)$\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AD'}$.

(3)设 M 是线段 AC' 的中点,则

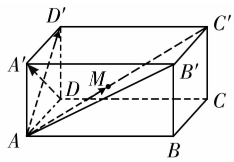
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'})$

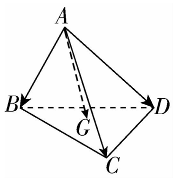
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AM}$.

向量 $\overrightarrow{DA'}$,$\overrightarrow{AD'}$,$\overrightarrow{AM}$ 如图所示.



点睛 化简向量表达式时,要善于利用平行四边形法则或三角形法则.在化简过程中遇到减法时可灵活应用相反向量转化成加法,也可按减法法则进行运算,加、减法之间可相互转化.

【变式训练 2】如图,设 A 是△BCD 所在平面外的一点,G 是△BCD 的重心.求证:$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.



【证明】连接 BG,延长后交 CD 于 E,由 G 为△BCD 的重心,知 $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

因为 E 为 CD 的中点,

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$,

所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

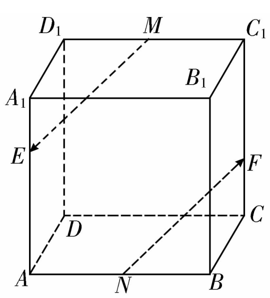
$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}[(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})]$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

探究 3 空间向量的共线

【例 3】如图所示,在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N 分别是 C_1D_1,AB 的中点,E 在 AA_1 上且 $AE=2EA_1$,F 在 CC_1 上且 $CF=\frac{1}{2}FC_1$,判断 $\overrightarrow{ME}$ 与 $\overrightarrow{NF}$ 是否共线.



【解析】由题意,得 $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MD_1}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FN}=-\overrightarrow{NF}$.

即 $\overrightarrow{ME}=-\overrightarrow{NF}$,所以 $\overrightarrow{ME}$ 与 $\overrightarrow{NF}$ 共线.

点睛 利用空间向量共线的充要条件可解决的主要问题

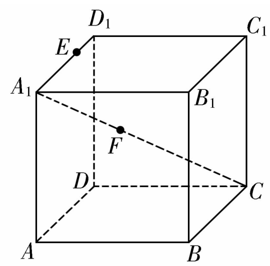
(1)判断两个向量是否共线:判断两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$是否共线,即判断是否存在实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

(2)判断或证明空间中三点(如 P,A,B)是否共线的方法:

①考察是否存在实数 λ,使 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$;

②考察对空间任意一点 O,是否有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$.

【变式训练 3】如图所示,已知在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$\overrightarrow{A_1E}=2\overrightarrow{ED_1}$,$\overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$.求证:$E$,$F$,$B$ 三点共线.



【证明】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$.

因为 $\overrightarrow{A_1E}=2\overrightarrow{ED_1}$,$\overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$,

所以 $\overrightarrow{A_1E}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D_1}$,$\overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{5}\overrightarrow{A_1C}$,

所以 $\overrightarrow{A_1E}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1})=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1})=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}-\frac{2}{5}\boldsymbol{c}$,

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{A_1F}-\overrightarrow{A_1E}=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\frac{4}{15}\boldsymbol{b}-\frac{2}{5}\boldsymbol{c}=\frac{2}{5}\left(\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\right)$.

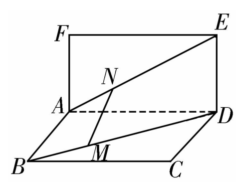
又 $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EB}$,

又因为 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 有公共点 E,所以 E,F,B 三点共线.

探究 4 空间向量的共面

【例 4】如图,已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在的平面互相垂直,点 M,N 分别在对角线 BD,AE 上,且 $BM=\frac{1}{3}BD$,$AN=\frac{1}{3}AE$.求证:向量 $\overrightarrow{MN}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{DE}$ 共面.



【解析】因为 M 在 BD 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD$，

所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

同理 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

又 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 不共线，根据向量共面的充要条件可知 $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}$ 共面.

点睛 证明空间三个向量共面的方法

设法证明其中一个向量可以表示成另外两个向量的线性组合，即若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

【变式训练 4】已知 A,B,C 三点不共线，点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

(1)向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 是否共面?

(2)点 M 是否在平面 ABC 内?

【解析】(1)因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$，

所以 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$，

所以 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$，

所以向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共面.

(2)由(1)知向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共面，又它们有共同的起点 M，且 A,B,C 三点不共线，所以 M,A,B,C 四点共面，即点 M 在平面 ABC 内.

随堂小练

1. 下列说法中正确的是 (B)

A. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的长度相等，方向相同或相反

B. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

C. 若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{c}|$，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{c}$

D. 在四边形 $ABCD$ 中，一定有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

【解析】若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的长度相等，方向不确定，故 A 不正确；相反向量是指长度相等，方向相反的向量，故 B 正确；两个向量不能比较大小，故 C 不正确；在▱$ABCD$ 中，才有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，故 D 不正确. 故选 B.

2. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意两个空间向量，若命题 p：$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，命题 q：$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，则 p 是 q 的 (A)

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【解析】$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，反推不成立，故选 A.

3. 已知向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ 满足 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BC}|$，则 (D)

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向 D. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 同向

【解析】由 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{CB}|$，知 C 点在线段 AB 上，否则与三角形两边之和大于第三边矛盾，所以 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 同向.

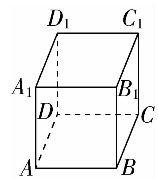
4. 化简：$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})+3\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)=$ $\underline{\frac{5}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}}$.

【解析】原式 $=\left(\frac{1}{2}+2\right)\boldsymbol{a}+\left(1-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{b}+\left(-\frac{3}{2}+2\right)\boldsymbol{c}=\frac{5}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

5. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，化简下列向量表达式：

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$；

(2)$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{CB}$.



【解析】(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.

(2)因为 $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{D_1D}=-\overrightarrow{AA_1}$，

所以原式 $=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(一)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　空间向量的数量积运算

学习目标	核心素养
1. 了解空间向量的夹角、两条异面直线所成的角的概念.(重点、难点) 2. 理解两个向量数量积的概念.(重点) 3. 掌握数量积的运算及应用.(重点)	1. 通过学习空间向量的数量积运算,培养数学运算素养. 2. 借助利用空间向量数量积证明垂直关系、求夹角和距离,提升逻辑推理和数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 两个空间向量的夹角

(1)定义:已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,在空间任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则__$\angle AOB$__叫做向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角,记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

(2)范围:$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$.特别地,当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ 时,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

2. 两个向量的数量积

(1)定义:已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫做 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$__.

规定:零向量与任意向量的数量积为 0.

(2)数量积的运算律

空间向量的数量积满足如下运算律:

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,$\lambda\in\mathbf{R}$;

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律);

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

3. 两个向量的数量积的性质

(1)若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$__$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$__.

(2)若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$__;若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$__.特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$__$|\boldsymbol{a}|^2$__或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(3)若 θ 为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

(4)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

小试牛刀

1. 对于向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ,下列命题中是真命题的是 (B)

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

B. 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

C. 若 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

D. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

【解析】对于 A,可举反例:当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;对于 C,$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,只能推出 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,而不能推出 $\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{b}$;对于 D,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 是两两垂直的单位向量,则 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=$ (B)

A. 14　　B. $\sqrt{14}$　　C. 4　　D. 2

【解析】$\because|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2+9|\boldsymbol{c}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-12\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=14$.

$\therefore|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=\sqrt{14}$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为两个非零空间向量,若 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sqrt{2}$,则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$__$\frac{3\pi}{4}$__.

【解析】$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{3\pi}{4}$.

互动课堂

合作探究

探究 1　数量积的计算

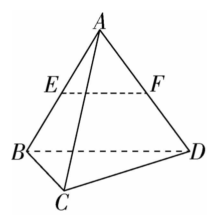
【例 1】如图所示,在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,AD 的中点,求:

(1)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}$;

(2)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}$;

(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}$;

(4)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.



【解析】(1)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BA}|\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\rangle$

$=\frac{1}{2}\cos 60^\circ=\frac{1}{4}$.

(2)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{1}{2}$.

(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{DC}|\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DC}\rangle$

$=\frac{1}{2}\cos 120^\circ=-\frac{1}{4}$.

(4)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$

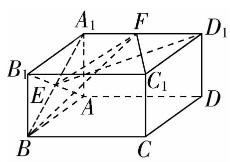
$=\cos 60^\circ-\cos 60^\circ=0$.

点睛(1)如果已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,可以直接代入数量积公式计算 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

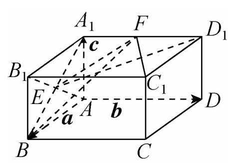
(2)如果要求的是关于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的多项式形式的数量积,可以先利用数量积的运算律将多项式展开,再利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 及数量积公式进行计算.

【变式训练 1】如图,$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体,$AB=AA_1=2$,$AD=4$,E 为侧面 ABB_1A_1 的中心,F 为 A_1D_1 的中点.试计算:

(1)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED_1}$;(2)$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB_1}$;(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC_1}$.



【解析】如图,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,



则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=4$,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

(1)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED_1}=\boldsymbol{b}\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\right]=|\boldsymbol{b}|^2=4^2=16$.

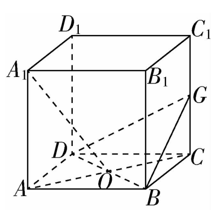
(2)$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2=2^2-2^2=0$.

(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC_1}=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)$

$=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{4}|\boldsymbol{b}|^2=2$.

探究 2 利用数量积证明垂直问题

【例 2】如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,O 为 AC 与 BD 的交点,G 为 CC_1 的中点,求证:$A_1O\perp$平面 GBD.



【证明】设 $\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$,

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.

$\because\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$,

$\therefore\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)$

$=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2)=0$.

于是 $\overrightarrow{A_1O}\perp\overrightarrow{BD}$,即 $A_1O\perp BD$.

同理可证 $\overrightarrow{A_1O}\perp\overrightarrow{BG}$,即 $A_1O\perp BG$.

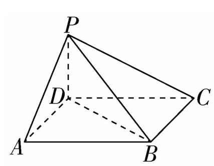
又$\because BG\cap BD=B$,$BG\subset$平面 GBD,$BD\subset$平面 GBD,

$\therefore A_1O\perp$平面 GBD.

点睛(1)由数量积的性质 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 可知,要证两条直线垂直,可构造与两条直线分别平行的向量($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量),只要证明这两个向量的数量积为 0 即可.

(2)用向量法证明线面(面面)垂直,离不开线面(面面)垂直的判定定理,需将线面(面面)垂直转化为线线垂直,然后利用向量法证明线线垂直即可.

【变式训练 2】如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形,$\angle DAB=60^\circ$,$AB=2AD$,$PD\perp$底面 $ABCD$.求证:$PA\perp BD$.



【证明】由底面 $ABCD$ 为平行四边形,$\angle DAB=60^\circ$,$AB=2AD$,知 $DA\perp BD$,则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DA}=0$.

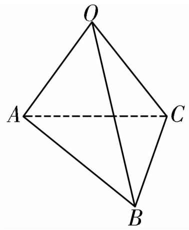
由 $PD\perp$底面 $ABCD$,知 $PD\perp BD$,则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PD}=0$.

又 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}$,

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,即 $PA\perp BD$.

探究 3 利用数量积求解空间角

【例 3】如图所示,在四面体 $OABC$ 中,$OA=8$,$AB=6$,$AC=4$,$BC=5$,$\angle OAC=45^\circ$,$\angle OAB=60^\circ$,求向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 所成角的余弦值.



【解析】∵$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$

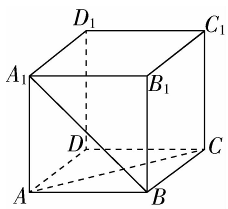
$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AC}\rangle-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AB}|\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\rangle$

$=8\times4\times\cos 135^\circ-8\times6\times\cos 120^\circ=24-16\sqrt{2}$，

∴$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{24-16\sqrt{2}}{8\times5}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{5}$.

点睛 求两个空间向量夹角的方法类似于求两个平面向量夹角的方法，利用公式$\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$来求.

【变式训练 3】如图，$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，求异面直线 A_1B 与 AC 所成的角.



【解析】不妨设正方体的棱长为 1，

设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，

则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，

$\overrightarrow{A_1B}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

∴$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1$，

而 $|\overrightarrow{A_1B}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$，

∴$\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

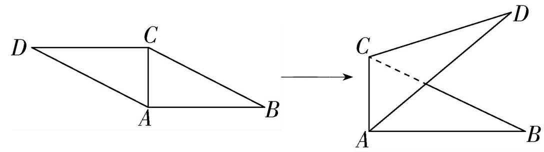
∵$\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AC}\rangle\in[0^\circ,180^\circ]$，

∴$\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AC}\rangle=60^\circ$.

∴异面直线 A_1B 与 AC 所成的角为 60°.

探究 4 利用数量积求距离或长度

【例 4】如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=2AC=2$ 且$\angle ACD=90^\circ$，将它沿对角线 AC 折起，使 AB 与 CD 成 60° 角，求 B，D 间的距离.



【解析】由已知得 $AC\perp CD$，$AC\perp AB$，折叠后 AB 与 CD 所成角为 60°，于是，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

且$\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60^\circ$或 120°.

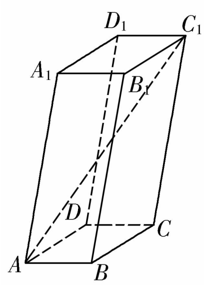
$|\overrightarrow{BD}|^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=2^2+1^2+2^2+2\times2\times2\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle$，故 $|\overrightarrow{BD}|^2=13$ 或 5，

解得 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{13}$或$\sqrt{5}$，

即 B，D 间的距离为 $\sqrt{13}$或$\sqrt{5}$.

点睛 利用向量的数量积求两点间的距离，可以转化为求向量的模的问题. 其基本思路是先选择以两点为端点的向量，将此向量表示为几个已知向量的和的形式，求出这几个已知向量两两之间的夹角以及它们的模，利用公式$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$求解即可.

【变式训练 4】如图所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AD=2$，$AA_1=3$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle BAA_1=\angle DAA_1=60^\circ$，求 AC_1 的长.



【解析】∵$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$，

所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA_1}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1})$.

因为$\angle BAD=90^\circ$，$\angle BAA_1=\angle DAA_1=60^\circ$，

所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2=1+4+9+2\times(1\times3\times\cos 60^\circ+2\times3\times\cos 60^\circ)=23$.

则 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{23}$，即 $AC_1=\sqrt{23}$.

随堂小练

1. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不平行，并且其模相等，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 之间的关系是 (A)

A. 垂直　　B. 共线

C. 不垂直　　D. 以上都有可能

【解析】由题意知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，

$\because (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，

$\therefore (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1, |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 (D)

A. $60°$　　B. $30°$

C. $135°$　　D. $45°$

【解析】$\because \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，$\therefore (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$

$=1-1\times\sqrt{2}\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because 0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180°$，$\therefore \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=45°$.

3. 已知空间向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 两两夹角为 $60°$，其模都为 1，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|=$ (A)

A. $\sqrt{5}$　　B. 5　　C. 6　　D. $\sqrt{6}$

【解析】$\because |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+4|\boldsymbol{c}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$=1^2+1^2+4\times1^2-2\times1\times1\times\cos 60°+4\times1\times1\times\cos 60°-4\times1\times1\times\cos 60°=5$，

$\therefore |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$.

4. 已知 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，且 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$ __60°__.

【解析】由条件知 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

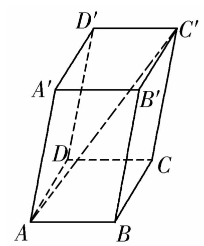
两式相减得 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=23|\boldsymbol{b}|^2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$，

代入上面两个式子中的任意一个，得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{b}|^2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$.

5. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=AD=1$，$AA'=2$，$\angle BAD=\angle BAA'=\angle DAA'=60°$，则 AC' 的长为 __$\sqrt{11}$__.



【解析】$|\overrightarrow{AC'}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}|^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CC'}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CC'}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}$

$=1^2+1^2+2^2+2\times1\times1\times\cos 60°+2\times1\times2\times\cos 60°+2\times1\times2\times\cos 60°=11$，

则 $AC'=|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{11}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（二）

课后作业 · 单独成册

1.2 空间向量基本定理

学习目标	核心素养
1. 理解空间向量基本定理及其意义. 2. 理解基底、基向量、单位正交基底、正交分解的概念. 3. 掌握在简单问题中运用空间三个不共面的向量作为基底表示其他向量的方法.(难点)	1. 类比平面向量基本定理学习空间向量基本定理,培养逻辑推理素养. 2. 通过基底概念的学习,培养数学抽象素养. 3. 通过空间向量基本定理的学习,培养直观想象和数学抽象素养.

自主预习

知新预学

1. 平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个__不共线__的向量,那么对于这一平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$,__有且只有一对__实数 λ_1,λ_2,使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

2. 空间向量基本定理

如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$__不共面__,那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$,存在__唯一__的有序实数组 (x,y,z),使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

3. 基底

如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$__不共面__,那么所有空间向量组成的集合就是 $\{\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},x,y,z\in\mathbf{R}\}$. 这个集合可看作由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 生成的,我们把 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 叫做空间的一个__基底__,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都叫做基向量.

4. 空间向量的正交分解

如果空间的一个基底中的三个基向量__两两垂直__,且长度都为__1__,那么这个基底叫做单位正交基底,常用 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 表示. 由空间向量基本定理可知,对空间中的任意向量 $\boldsymbol{a}$,均可以分解为三个向量 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$,使__$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$__. 像这样,把一个空间向量分解为__三个两两垂直__的向量,叫做把空间向量进行正交分解.

小试牛刀

1. 判断下列说法是否正确,正确的打"√",错误的打"×".

(1)只有两两垂直的三个向量才能作为空间向量的一组基底. (×)

(2)若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间的一个基底,则 $\{-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},2\boldsymbol{c}\}$ 也可构成空间的一个基底. (√)

(3)若三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不能构成空间的一个基底,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. (√)

2. 下列说法中正确的是 (C)

A. 任何三个不共线的向量都可构成空间向量的一个基底

B. 空间的基底有且只有一个

C. 两两垂直的三个非零向量可构成空间的一个基底

D. 基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 中的基向量与基底 $\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\}$ 中的基向量对应相等

【解析】只有不共面的三个非零向量才能作为空间向量的基底,且基底不唯一,故选 C.

3. 已知 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间向量的一个基底,则可以与向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 构成基底的向量是 (D)

A. $\boldsymbol{a}$　　B. $\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}$

【解析】构成基底的条件是三个向量不共面,故只有 D 选项满足条件.

互动课堂

合作探究

探究 1 空间向量的基底

【例 1】已知 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是空间的一个基底,且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OB}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,试判断 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ 能否作为空间的一个基底.

【解析】假设 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 共面,由向量共面的充要条件知,存在实数 x,y,使得 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$ 成立,即 $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=x(-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})+y(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=(-3x+y)\boldsymbol{i}+(x+y)\boldsymbol{j}+(2x-y)\boldsymbol{k}$.

因为$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$是空间的一个基底，所以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$不共面，所以

$$\begin{cases}-3x+y=1,\\ x+y=2,\\ 2x-y=-1.\end{cases}$$ 此方程组无解.

即不存在实数，x,y，使得$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$成立，所以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$不共面.

故$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$能作为空间的一个基底.

点睛 基底的判断思路

判断给出的三个向量能否构成基底，关键是要判断这三个向量是否共面. 首先应考虑三个向量中是否有零向量，其次判断三个非零向量是否共面. 如果从正面难以入手判断，可假设三个向量共面，利用向量共面的充要条件建立方程组，若方程组有解，则三个向量共面；若方程组无解，则三个向量不共面.

【变式训练 1】已知点O,A,B,C为空间不共面的四点，且向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，向量$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，则不能与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$构成空间基底的向量是 (C)

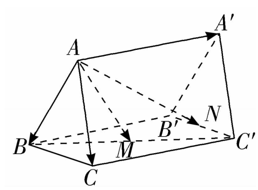
A. $\overrightarrow{OA}$　　B. $\overrightarrow{OB}$

C. $\overrightarrow{OC}$　　D. $\overrightarrow{OA}$或$\overrightarrow{OB}$

【解析】因为$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不能共线，所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}$共面，所以$\overrightarrow{OC}$与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不能构成一组空间基底.

探究 2 利用基底表示向量

【例 2】如图，在三棱柱$ABC\text{-}A'B'C'$中，已知$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，点$M,N$分别是$BC'$，$B'C'$的中点，试用基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$表示向量$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$.



【解析】$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC'}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

连接$A'N$(图略).

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'N}$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'})$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

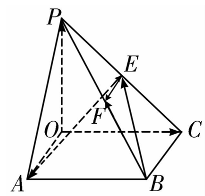
点睛 用基底表示向量的步骤

(1)定基底：根据已知条件，确定三个不共面的向量构成空间的一个基底.

(2)找目标：用确定的基底(或已知基底)表示目标向量，需要根据三角形法则及平行四边形法则，结合相等向量的代换、向量的运算进行变形、化简，最后求出结果.

(3)下结论：利用空间向量的一个基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$可以表示出空间所有向量，并且结果中只能含有$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，不能含有其他形式的向量.

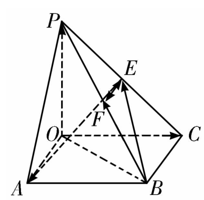
【变式训练 2】如图，四棱锥$P\text{-}OABC$的底面$OABC$为矩形，$PO\perp$平面$OABC$，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}$，$E,F$分别是$PC,PB$的中点，试用基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$表示向量$\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EF}$.



【解析】连接BO，则$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.



$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$

$=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP})$

$=-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})$

$=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

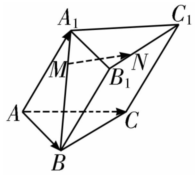
$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

探究 3 基底的应用

【例 3】如图所示，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，M,N 分别是 A_1B,B_1C_1 上的点，且 $BM=2A_1M,C_1N=2B_1N$. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$.

(1)试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$；

(2)若 $\angle BAC=90°,\angle BAA_1=\angle CAA_1=60°,AB=AC=AA_1=1$,求 MN 的长.



【解析】(1)$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1N}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}$

$=\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

(2)因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

$=1+1+1+0+2\times1\times1\times\frac{1}{2}+2\times1\times1\times\frac{1}{2}=5$,

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$,

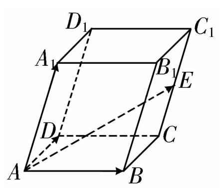
所以 $|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{3}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$,即 $MN=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

点睛 解决空间向量的夹角、长度、垂直等问题，首先要选好基底，用基底表示出有关向量，再利用夹角、长度、垂直的公式求解.

【变式训练 3】如图所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=5,AD=3,AA_1=4,\angle DAB=90°,\angle BAA_1=\angle DAA_1=60°$,$E$ 是 CC_1 的中点，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$.

(1)用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$；

(2)求 AE 的长.



【解析】(1)$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

(2)因为 $|\overrightarrow{AE}|^2=\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)^2$

$=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$=25+9+4+0+(20+12)\cdot\cos 60°=54$,

所以 $|\overrightarrow{AE}|=3\sqrt{6}$,即 AE 的长为 $3\sqrt{6}$.

随堂小练

1. 设 p:$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量；q:$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$为空间的一个基底，则 p 是 q 的 (B)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【解析】当非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面时，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$可以当基底，否则不能当基底，当$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$为基底时，一定有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量. 因此 $p\nRightarrow q$,$q\Rightarrow p$.

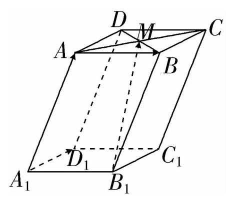
2. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，若 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i},\overrightarrow{AD}=2\boldsymbol{j},\overrightarrow{AA_1}=5\boldsymbol{k}$,则 $\overrightarrow{AC_1}=$ (C)

A. $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$　　B. $\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{5}\boldsymbol{k}$

C. $3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$　　D. $3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$

【解析】$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$.

3. 如图，在底面为平行四边形的四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AC 与 BD 的交点. 若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$,则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的是 (A)



A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　D. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

【解析】$\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1})=\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,即 $\overrightarrow{B_1M}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

4. 在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$D$ 为 BC 的中点，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{OE}=$ $\underline{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}}$ (用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示).

【解析】$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=$

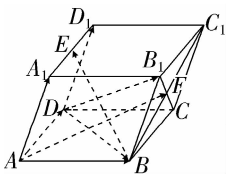
$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\times(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$.

5. 如图,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,$E$ 为 A_1D_1 的中点,F 为 BC_1 与 B_1C 的交点.

(1)用基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$表示向量 $\overrightarrow{DB_1}$,$\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{AF}$;

(2)化简 $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$,并在图中标出化简结果.



【解析】(1)$\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

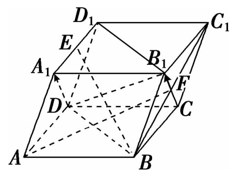
$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

(2)$\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DD_1}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DA_1}$.

或 $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CD_1}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CD_1}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{CB_1}$.

$\overrightarrow{DA_1}$ 与 $\overrightarrow{CB_1}$ 如图所示.



温馨提示:请自主完成课后作业(三)

课后作业·单独成册

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

学习目标	核心素养
1. 了解空间向量坐标的定义. 2. 掌握空间向量运算的坐标表示.(重点) 3. 能够利用坐标运算来求空间向量的长度与夹角.(重点、难点)	1. 通过空间向量的坐标运算及空间向量夹角及长度的学习,培养数学运算素养. 2. 借助利用空间向量的坐标运算解决平行、垂直问题,提升数学运算与逻辑推理素养.

自主预习

知新预学

1. 空间直角坐标系及相关概念

(1)空间直角坐标系

在空间选定一点 O 和一个单位正交基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$. 以点 O 为原点,分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的方向为__正方向__、以它们的长为单位长度建立三条数轴:x 轴、y 轴、z 轴,它们都叫做坐标轴. 这时我们就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$,__O__叫做原点,__$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$__都叫做坐标向量,通过每两条坐标轴的平面叫做坐标平面,分别称为__Oxy__平面,__Oyz__平面,__Ozx__平面,它们把空间分成八个部分.

(2)右手直角坐标系

在空间直角坐标系中,让右手拇指指向__x 轴__的正方向,食指指向__y 轴__的正方向,如果中指指向__z 轴__的正方向,则称这个坐标系为右手直角坐标系.

2. 空间点的坐标

(1)在单位正交基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下与向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的有序实数组(x,y,z),叫做点 A 在空间直角坐标系中的坐标,记作 $A(x,y,z)$,其中__x__叫做点 A 的横坐标,__y__叫做点 A 的纵坐标,__z__叫做点 A 的竖坐标.

(2)在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,给定向量 $\boldsymbol{a}$,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$. 由空间向量基本定理,存在唯一的有序实数组$(x,y,z)$,使 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 有序实数组$(x,y,z)$叫做 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,上式可简记作 $\boldsymbol{a}=$__(x,y,z)__.

3. 空间向量运算的坐标表示

空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,其坐标形式为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

运算	坐标表示
加法	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$
减法	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$
数乘	$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),\lambda\in\mathbf{R}$
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

4. 空间向量的平行、垂直、模及夹角

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

名称	坐标表示
平行	$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0},\lambda\in\mathbf{R})$
垂直	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$__$=0$
模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=$__$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$__
夹角	$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

小试牛刀

1. 在空间直角坐标系中,下列各点中位于 Oyz 平面内的是 (D)

A. $(3,2,1)$　　B. $(2,0,0)$

C. $(5,0,2)$　　D. $(0,-1,-3)$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-2,4,0)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$ (D)

A. $(5,6,1)$　　B. $(5,2,1)$

C. $(1,6,0)$　　D. $(1,2,1)$

3. 若 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,0,3)$,$\boldsymbol{c}=(0,2,2)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$的值为 (C)

A. 4　　B. 15

C. 3　　D. 7

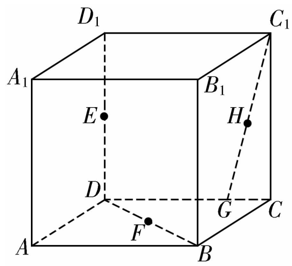
【解析】$\because\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(2,2,5)$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=4-6+5=3$.

互动课堂

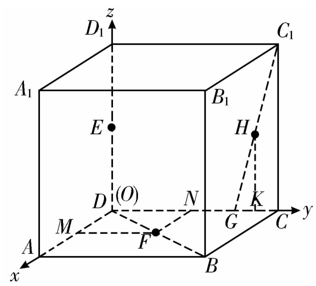
合作探究

探究 1 空间向量的坐标表示

【例 1】如图,正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,E,F 分别是 D_1D,BD 的中点,G 在棱 CD 上,且 $CG=\dfrac{1}{4}CD$,H 为 C_1G 的中点,试建立适当的坐标系,写出 E,F,G,H 的坐标.



【解析】建立如图所示的空间直角坐标系.点 E 在 z 轴上,它的 x 坐标、y 坐标均为 0,而 E 为 DD_1 的中点,故其坐标为 $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$.



过 F 作 $FM\perp AD$,$FN\perp DC$,垂足分别为 M,N,

由平面几何知识知 $FM=\frac{1}{2}$,$FN=\frac{1}{2}$,

故 F 点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

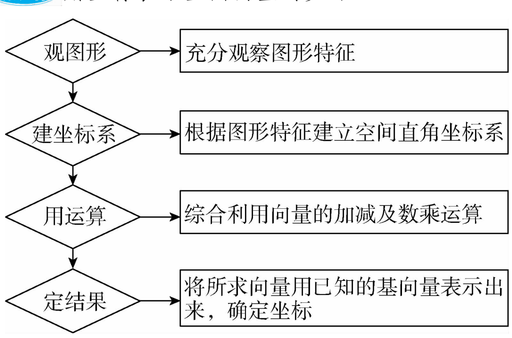
又 $GD=\frac{3}{4}$,故 G 点坐标为 $\left(0,\frac{3}{4},0\right)$.

过 H 作 $HK\perp CG$ 于 K,由于 H 为 C_1G 的中点.

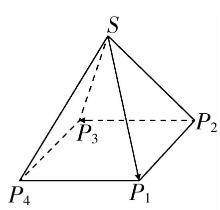
故 $HK=\frac{1}{2}$,$CK=\frac{1}{8}$,所以 $DK=\frac{7}{8}$,

故 H 点坐标为 $\left(0,\frac{7}{8},\frac{1}{2}\right)$.

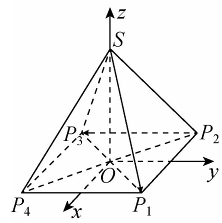
点睛 用坐标表示空间向量的步骤



【变式训练 1】设如图所示的正四棱锥 $S\text{-}P_1P_2P_3P_4$ 的所有棱长均为 2,建立适当的空间直角坐标系,求 $\overrightarrow{SP_1}$,$\overrightarrow{P_2P_3}$ 的坐标.



【解析】如图所示,建立空间直角坐标系,其中 O 为底面正方形的中心,$P_1P_2\perp y$ 轴,$P_1P_4\perp x$ 轴,SO 在 z 轴上.



$\because |P_1P_2|=2$,而 P_1,P_2,P_3,P_4 均在 Oxy 平面上,

$\therefore P_1(1,1,0)$,$P_2(-1,1,0)$.

在 Oxy 平面内,P_3 与 P_1 关于原点 O 对称,P_4 与 P_2 关于原点 O 对称,$\therefore P_3(-1,-1,0)$,$P_4(1,-1,0)$.

又 $|SP_1|=2$,$|OP_1|=\sqrt{2}$,

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle SOP_1$ 中,$|SO|=\sqrt{2}$,$\therefore S(0,0,\sqrt{2})$.

$\therefore \overrightarrow{SP_1}=\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OS}=(1,1,-\sqrt{2})$,

$\overrightarrow{P_2P_3}=\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_2}=(0,-2,0)$.

探究 2 空间向量的坐标运算

【例 2】若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,x)$,$\boldsymbol{b}=(1,2,1)$,$\boldsymbol{c}=(1,1,1)$,且满足条件 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{b})=-2$,则 $x=$__2__.

【解析】由题意,得 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(0,0,1-x)$,

$2\boldsymbol{b}=(2,4,2)$,

故 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{b})=2(1-x)=-2$,解得 $x=2$.

点睛 关于空间向量坐标运算的两类问题

(1)直接计算问题:首先将空间向量用坐标表示出来,然后准确运用空间向量坐标运算公式计算.

(2)由条件求向量或点的坐标:首先把向量的坐标形式设出来,然后通过建立方程组、解方程组求出其坐标.

【变式训练 2】已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,\sqrt{2},2\sqrt{3})$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,\sqrt{2},0)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$__$\frac{\sqrt{6}}{3}$__.

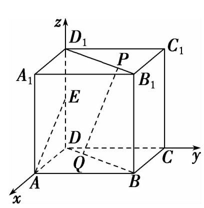
【解析】由已知 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$,$\boldsymbol{b}=(1,0,\sqrt{3})$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1+0+3}{\sqrt{6}\times\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

探究 3 利用空间向量解决平行与垂直问题

【例 3】在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是棱 D_1D 的中点,P,Q 分别为线段 B_1D_1,BD 上的点,且 $3\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{PD_1}$,若 $PQ\perp AE$,$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DQ}$,求 λ 的值.

【解析】如图所示,以 D 为原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系,设正方体的棱长为 1,则 $A(1,0,0)$,$E\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$,$B(1,1,0)$,$B_1(1,1,1)$,$D_1(0,0,1)$,



由题意，可设点 P 的坐标为 $(a,a,1)$，

因为 $3\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{PD_1}$，所以 $3(a-1,a-1,0)=(-a,-a,0)$，

所以 $3a-3=-a$，解得 $a=\frac{3}{4}$，

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},1\right)$.

由题意可设点 Q 的坐标为 $(b,b,0)$，

因为 $PQ\perp AE$，所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，

所以 $\left(b-\frac{3}{4},b-\frac{3}{4},-1\right)\cdot\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)=0$，

即 $-\left(b-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}=0$. 解得 $b=\frac{1}{4}$.

所以点 Q 的坐标为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)$.

因为 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DQ}$，所以 $(-1,-1,0)=\lambda\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)$，所以 $\frac{\lambda}{4}=-1$，故 $\lambda=-4$.

点睛 向量平行与垂直问题的两种类型

(1)平行与垂直的判断

①判断两条直线是否平行，只需判断两条直线的方向向量是否共线；

②判断两条直线是否垂直，关键是判断两条直线的方向向量是否垂直，即判断两个向量的数量积是否为 0.

(2)平行与垂直的应用

①适当引入参数(比如向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行，可设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$)，建立关于参数的方程；

②选择坐标形式，以达到简化运算的目的.

【变式训练 3】把例 3 中的 $PQ\perp AE$ 改为 $B_1Q\perp EQ$，其他条件不变，求 λ 的值.

【解析】以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，设正方体的棱长为 1，点 Q 的坐标为 $(c,c,0)$. 因为 $B_1Q\perp EQ$，所以 $\overrightarrow{B_1Q}\cdot\overrightarrow{EQ}=0$，

所以 $(c-1,c-1,-1)\cdot\left(c,c,-\frac{1}{2}\right)=0$，

即 $c(c-1)+c(c-1)+\frac{1}{2}=0$，$4c^2-4c+1=0$.

解得 $c=\frac{1}{2}$，所以点 Q 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

所以点 Q 是线段 BD 的中点，

所以 $\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{DQ}$，

所以 $\lambda=-2$.

探究 4 利用空间向量解决夹角与距离问题

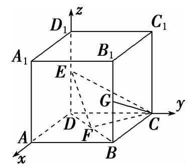
【例 4】已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F，G 分别是 DD_1，BD，BB_1 的中点.

(1)求证：$EF\perp CF$.

(2)求异面直线 EF 与 CG 所成角的余弦值；

(3)求 CE 的长.

【解析】以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$，则 $D(0,0,0)$，$E\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$C(0,1,0)$，



$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$G\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{CF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{CG}=\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{CE}=\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$.

(1)因为 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 0=0$，

所以 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{CF}$，即 $EF\perp CF$.

(2)因为 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$|\overrightarrow{CG}|=\sqrt{1^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CG}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CG}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{CG}|}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

所以异面直线 EF 与 CG 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

(3)$|CE|=|\overrightarrow{CE}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

点睛 利用空间向量的坐标运算求夹角与距离的一般步骤

(1)建系：根据题目中的几何图形建立恰当的空间直角坐标系.

(2)求坐标：①求出相关点的坐标；②写出向量的坐标.

(3)论证、计算：结合公式进行论证、计算.

(4)转化：转化为夹角与距离问题.

【变式训练 4】已知空间三点 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,5)$，$C(3,2,-5)$. 求：

(1)向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的模；

(2)向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 之间夹角的余弦值.

【解析】(1)因为 $\overrightarrow{AB}=(2,-1,5)-(1,2,3)=(1,-3,2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,2,-5)-(1,2,3)=(2,0,-8)$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14}$，

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+0^2+(-8)^2}=2\sqrt{17}$.

(2)因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)\cdot(2,0,-8)$

$=1\times 2+(-3)\times 0+2\times(-8)=-14$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$=\dfrac{-14}{\sqrt{14}\times2\sqrt{17}}=-\dfrac{\sqrt{238}}{34}$.

因此,向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的夹角的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{238}}{34}$.

随堂小练

1. 在空间直角坐标系中,已知点 A 的坐标为(−1,2,1),点 B 的坐标为(1,3,4),则 (C)

A. $\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$　　B. $\overrightarrow{AB}=(1,3,4)$

C. $\overrightarrow{AB}=(2,1,3)$　　D. $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-3)$

【解析】$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,1,3)$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,0,-2)$,若 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})=2$,则 $k=$ (D)

A. 1　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

【解析】由已知得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以由 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})=2$ 可得 $k|\boldsymbol{a}|^2+k|\boldsymbol{b}|^2+(k^2+1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,即 $2k+8k=2$,解得 $k=\dfrac{1}{5}$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$,$\boldsymbol{b}=(-2,-1,1)$,$\boldsymbol{c}=(3,1,0)$,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|=$ (A)

A. $3\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{10}$

C. $\sqrt{10}$　　D. 5

【解析】$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}=(9,3,0)$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|=3\sqrt{10}$.

4. 若△ABC 的三个顶点坐标分别为 $A(1,-2,1)$,$B(4,2,3)$,$C(6,-1,4)$,则△ABC 的形状是 (A)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等边三角形

【解析】$\overrightarrow{AB}=(3,4,2)$,$\overrightarrow{AC}=(5,1,3)$,$\overrightarrow{BC}=(2,-3,1)$.

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$,得 A 为锐角;

由 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$,得 C 为锐角;

由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$,得 B 为锐角.

所以△ABC 为锐角三角形.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,-y)$,$\boldsymbol{b}=(x,1,2)$,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为共线向量,则 $x=$__$\dfrac{1}{2}$__,$y=$__-4__.

【解析】∵ $\boldsymbol{a}=(1,2,-y)$ 与 $\boldsymbol{b}=(x,1,2)$ 共线,∴ $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{-y}{2}(x\neq0)$,

∴ $x=\dfrac{1}{2}$,$y=-4$.

温馨提示:请自主完成课后作业(四)

课后作业 · 单独成册

1.4　空间向量的应用

第 1 课时　空间中点、直线和平面的向量表示

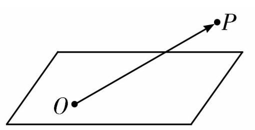
学习目标	核心素养
1. 了解空间中点、直线和平面的向量表示.(重点) 2. 理解直线的方向向量和平面的法向量的概念，会求平面的法向量.(重点、难点)	1. 通过共线、共面、直线的方向向量、平面的法向量等概念的学习，培养数学抽象素养. 2. 借助平面的法向量的求解，培养直观想象素养.

自主预习

知新预学

1. 空间中点的向量表示

如图，在空间中，我们取一定点 O 作为基点，那么空间中任意一点 P 就可以用向量__$\overrightarrow{OP}$__来表示. 我们把向量__$\overrightarrow{OP}$__称为点 P 的位置向量.



2. 点在直线上的向量表示

$\boldsymbol{a}$ 是直线 l 的方向向量，在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$.

(1)点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使得 $\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$，即 $\overrightarrow{AP}=$__$t\overrightarrow{AB}$__.

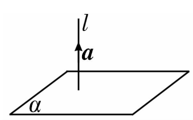
(2)O 为空间中的任意一点，则点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}$，即 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$.

3. 点在平面内的向量表示

O 为空间中的任意一点，空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在实数 x,y，使得 $\overrightarrow{OP}=$__$\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$__.

4. 平面的法向量

如图，直线 $l\perp\alpha$，取直线 l 的__方向向量__$\boldsymbol{a}$，我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 为平面 α 的法向量.



小试牛刀

1. 若 $A(1,0,-1)$，$B(2,1,2)$在直线 l 上，则直线 l 的一个方向向量是　　(B)

A. $(-1,1,3)$　　B. $(1,1,3)$

C. $(3,1,1)$　　D. $(-3,0,1)$

【解析】$\overrightarrow{AB}=(2,1,2)-(1,0,-1)=(1,1,3)$，故选 B.

2. 已知 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，则下列向量是平面 ABC 的法向量的是　　(C)

A. $(-1,1,1)$　　B. $(1,-1,1)$

C. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

【解析】$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 ABC 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 化简得 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

$\therefore x=y=z$，故选 C.

3. 已知平面内的两个向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,1)$，$\boldsymbol{b}=(5,6,4)$，则该平面的一个法向量为　　(C)

A. $(1,-1,1)$　　B. $(2,-1,1)$

C. $(-2,1,1)$　　D. $(-1,1,-1)$

【解析】显然 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，设平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}2x+3y+z=0,\\ 5x+6y+4z=0.\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $x=-2$，$y=1$，$\therefore\boldsymbol{n}=(-2,1,1)$.

互动课堂

合作探究

探究 1　空间中点的位置

【例 1】已知 O 是坐标原点，A,B,C 三点的坐标分别为 $A(3,4,0)$，$B(2,5,5)$，$C(0,3,5)$.

(1)若 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$，求点 P 的坐标；

(2)若 P 是线段 AB 上的一点，且 $AP:PB=1:2$，求点 P 的坐标.

【解析】(1)$\overrightarrow{AB}=(-1,1,5)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,-1,5)$.

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(2,2,0)=(1,1,0)$.

∴点 P 的坐标为$(1,1,0)$.

(2)由 P 是线段 AB 上的一点，且 $AP:PB=1:2$，

知 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$.

设点 P 的坐标为(x,y,z)，

则 $\overrightarrow{AP}=(x-3,y-4,z)$，$\overrightarrow{PB}=(2-x,5-y,5-z)$，

故$(x-3,y-4,z)=\frac{1}{2}(2-x,5-y,5-z)$，

即$\begin{cases}x-3=\frac{1}{2}(2-x),\\ y-4=\frac{1}{2}(5-y),\\ z=\frac{1}{2}(5-z),\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{8}{3},\\ y=\frac{13}{3},\\ z=\frac{5}{3}.\end{cases}$

因此点 P 的坐标为$\left(\frac{8}{3},\frac{13}{3},\frac{5}{3}\right)$.

点睛 此类问题常转化为向量的共线、向量的相等来解决，设出所求点的坐标，利用已知条件得出关于所求点坐标的方程或方程组即可求解.

【变式训练 1】已知点 $A(2,4,0)$，$B(1,3,3)$，在直线 AB 上有一点 Q，使得 $\overrightarrow{AQ}=-2\overrightarrow{QB}$，求点 Q 的坐标.

【解析】由题设 $\overrightarrow{AQ}=-2\overrightarrow{QB}$，

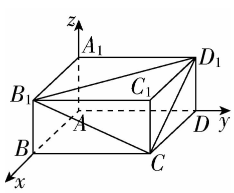
设 $Q(x,y,z)$，则$(x-2,y-4,z)=-2(1-x,3-y,3-z)$，

所以$\begin{cases}x-2=-2(1-x),\\ y-4=-2(3-y),\\ z=-2(3-z),\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=2,\\ z=6,\end{cases}$

所以 $Q(0,2,6)$.

探究 2 求平面的法向量

【例 2】已知 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，建立空间直角坐标系如图，$AB=3$，$BC=4$，$AA_1=2$.



(1)求平面 B_1CD_1 的一个法向量；

(2)设 $M(x,y,z)$是平面 B_1CD_1 内的任意一点，求 x,y,z 满足的关系式.

【解析】(1)在题图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$ 中各点坐标为 $B_1(3,0,2)$，$C(3,4,0)$，$D_1(0,4,2)$，

由此得 $\overrightarrow{B_1C}=(0,4,-2)$，$\overrightarrow{CD_1}=(-3,0,2)$，

设平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，

则 $\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{B_1C}$，$\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{CD_1}$，从而 $\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{CD_1}=0$，

所以 $0\cdot x+4\cdot y-2\cdot z=0$，$-3\cdot x+0\cdot y+2\cdot z=0$，

解方程组$\begin{cases}2y-z=0,\\ 3x-2z=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}y=\frac{z}{2},\\ x=\frac{2z}{3}.\end{cases}$

不妨取 $z=6$，则 $y=3$，$x=4$.

所以 $\boldsymbol{a}=(4,3,6)$就是平面 B_1CD_1 的一个法向量.

(2)由题意可得，$\overrightarrow{B_1M}=(x-3,y,z-2)$，

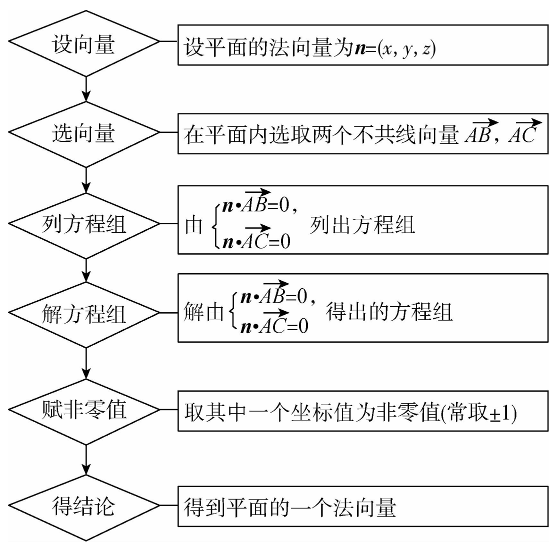
因为 $\boldsymbol{a}=(4,3,6)$是平面 B_1CD_1 的一个法向量，

所以 $\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{B_1M}$，从而 $\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{B_1M}=0$，

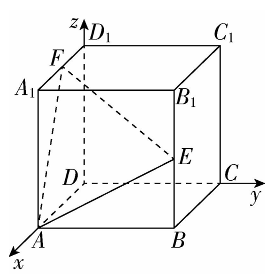
即 $4(x-3)+3y+6(z-2)=0$，$4x+3y+6z=24$，

所以满足题意的关系式是 $4x+3y+6z=24$.

点睛 利用待定系数法求法向量的解题步骤



【变式训练 2】如图，$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，以 D 为原点建立空间直角坐标系，E 为 BB_1 的中点，F 为 A_1D_1 的中点，则下列向量中，能作为平面 AEF 的法向量的是 (B)



A. $(1,-2,4)$　　B. $(-4,1,-2)$

C. $(2,-2,1)$　　D. $(1,2,-2)$

【解析】设正方体棱长为 2,则 $A(2,0,0)$,$E(2,2,1)$,$F(1,0,2)$,

∴$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$,$\overrightarrow{AF}=(-1,0,2)$.

设向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 AEF 的一个法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=-x+2z=0,\end{cases}$

取 $y=1$,得 $x=-4$,$z=-2$.

∴$\boldsymbol{n}=(-4,1,-2)$是平面 AEF 的一个法向量.

同理可得:只有 B 选项的向量是平面 AEF 的法向量. 故选 B.

随堂小练

1. 已知平面 α 内有一点 $M(1,-1,2)$,平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(6,-3,6)$,则下列点中,在平面 α 内的是 (A)

A. $P(2,3,3)$　　B. $P(-2,0,1)$

C. $P(-4,4,0)$　　D. $P(3,-4,4)$

【解析】设平面 α 内一点 $P(x,y,z)$,

则 $\overrightarrow{MP}=(x-1,y+1,z-2)$.

∵$\boldsymbol{n}=(6,-3,6)$是平面 α 的法向量,

∴$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{MP}$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}=6(x-1)-3(y+1)+6(z-2)=6x-3y+6z-21$,

∴由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ 得 $6x-3y+6z-21=0$,

∴$2x-y+2z=7$.

把各选项的坐标代入上式可知 A 选项适合.

2. 已知平面 α 经过三点 $A(1,2,3)$,$B(2,0,-1)$,$C(3,-2,0)$,则平面 α 的一个法向量是 $\underline{(2,1,0)}$.

【解析】∵$A(1,2,3)$,$B(2,0,-1)$,$C(3,-2,0)$,

∴$\overrightarrow{AB}=(1,-2,-4)$,$\overrightarrow{AC}=(2,-4,-3)$.

设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

依题意,应有 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,

即$\begin{cases}x-2y-4z=0,\\ 2x-4y-3z=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2y,\\ z=0.\end{cases}$

令 $y=1$,则 $x=2$.

∴平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,0)$.

3. 已知点 A,B,C 的坐标分别是$(0,1,0)$,$(-1,0,1)$,$(2,1,1)$,点 P 的坐标为$(x,0,z)$,若 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AC}$,则点 P 的坐标为 $\underline{\left(\frac{1}{3},0,-\frac{2}{3}\right)}$.

【解析】∵$A(0,1,0)$,$B(-1,0,1)$,$C(2,1,1)$,$P(x,0,z)$,

∴$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,1)$,$\overrightarrow{AC}=(2,0,1)$,$\overrightarrow{PA}=(-x,1,-z)$.

∵$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AC}$,

∴$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}=(-x,1,-z)\cdot(-1,-1,1)=0$,

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}=(-x,1,-z)\cdot(2,0,1)=0$,

∴$\begin{cases}x-1-z=0,\\ -2x-z=0,\end{cases}$

∴$\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ z=-\frac{2}{3}.\end{cases}$

∴点 P 的坐标为$\left(\frac{1}{3},0,-\frac{2}{3}\right)$.

温馨提示:请自主完成课后作业(五)

课后作业·单独成册

第 2 课时　空间中直线、平面的平行

学习目标	核心素养
会用向量方法证明线线、线面、面面平行.(重点、难点).	通过利用空间向量解决平行问题的学习,提升数学运算和逻辑推理素养.

自主预习

知新预学

1. 线线平行

如图 1,设 $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$ 分别是直线 l_1,l_2 的方向向量,则 $l_1/\!/l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1/\!/\boldsymbol{u}_2 \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{u}_2$.

2. 线面平行

如图 2,设 $\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量,$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量,$l\not\subset\alpha$,则 $l/\!/\alpha \Leftrightarrow$ <u>$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}$</u> $\Leftrightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=$ <u>0</u>.

3. 面面平行

如图 3,设 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α,β 的法向量,则 $\alpha/\!/\beta \Leftrightarrow$ <u>$\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$</u> $\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbf{R}$,使得 <u>$\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2$</u>.

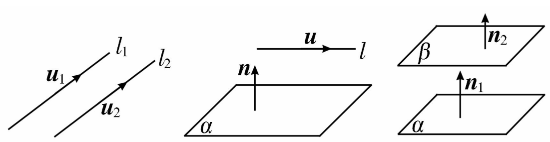


图1　图2　图3

小试牛刀

1. 已知两条不重合的直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1=(1,0,-1)$,$\boldsymbol{u}_2=(-2,0,2)$,则 l_1 与 l_2 的位置关系是　(A)

A. 平行　　B. 相交

C. 垂直　　D. 不确定

【解析】因为 $\boldsymbol{u}_2=-2\boldsymbol{u}_1$,所以 $\boldsymbol{u}_1/\!/\boldsymbol{u}_2$,所以 $l_1/\!/l_2$.

2. 若点 $A(-1,0,1)$,$B(1,4,7)$在直线 l 上,则直线 l 的一个方向向量可以是 <u>(2,4,6)</u>.

【解析】由点 $A(-1,0,1)$,$B(1,4,7)$得 $\overrightarrow{AB}=(1,4,7)-(-1,0,1)=(2,4,6)$,即可表示直线 l 的方向向量.

3. 设平面 α 的法向量为$(1,3,-2)$,平面 β 的法向量为$(-2,-6,k)$,若 $\alpha/\!/\beta$,则 $k=$ <u>4</u>.

【解析】$\because\alpha/\!/\beta$,$\therefore\alpha$ 与 β 的法向量平行,

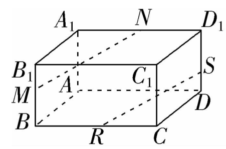
$\therefore\dfrac{-2}{1}=\dfrac{-6}{3}=\dfrac{k}{-2}$,$\therefore k=4$.

互动课堂

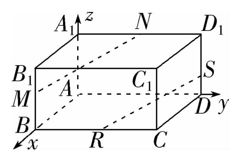
合作探究

探究 1　直线与直线平行

【例 1】如图,在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=3$,$AD=4$,$AA_1=2$,点 M 在棱 BB_1 上,且 $BM=2MB_1$,点 S 在 DD_1 上,且 $SD_1=2SD$,点 N,R 分别为 A_1D_1,BC 的中点.求证:$MN/\!/RS$.



【证明】方法一:如图所示,建立空间直角坐标系,



根据题意得 $M(3,0,\frac{4}{3})$,$N(0,2,2)$,$R(3,2,0)$,$S(0,4,\frac{2}{3})$.

所以 $\overrightarrow{MN}=(-3,2,\frac{2}{3})$,$\overrightarrow{RS}=(-3,2,\frac{2}{3})$,

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{RS}$,所以 $\overrightarrow{MN}/\!/\overrightarrow{RS}$,

因为 $M\notin RS$,所以 $MN/\!/RS$.

方法二:设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,

则 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1N}=\frac{1}{3}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DS}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{RS}$,所以 $\overrightarrow{MN}/\!/\overrightarrow{RS}$.

又 $R\notin MN$,所以 $MN/\!/RS$.

点睛 利用空间向量证明线线平行的方法

(1)建立适当的空间直角坐标系,求出相应点的坐标.

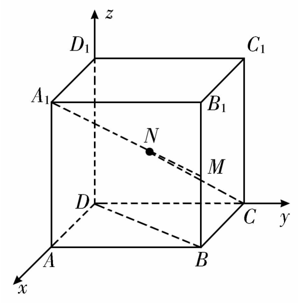
(2)求出直线的方向向量.

(3)证明两个向量共线.

(4)证明其中一个向量所在直线上一点不在另一个向量所在直线上,即表示方向的有向线段不共线,即可得证.

【变式训练 1】已知 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，点 M,N 分别是棱 BB_1 和对角线 CA_1 的中点，求证：$MN/\!/BD$.

【解析】以 D 为原点，DA,DC,DD_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.



设正方体棱长为 1，则 $B(1,1,0)$，$M\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，$C(0,1,0)$，$A_1(1,0,1)$，

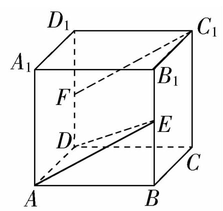
因为 N 是 A_1C 的中点，

所以 $N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，

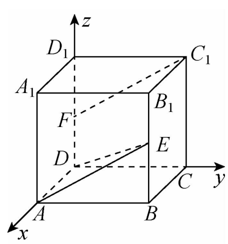
$\overrightarrow{NM}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，显然 MN 与 DB 不共线，所以 $MN/\!/DB$.

探究 2 直线与平面平行

【例 2】如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E,F 分别是 BB_1,DD_1 的中点，求证：$FC_1/\!/$平面 ADE.



【证明】如图所示，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，则有 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，$E(2,2,1)$，$F(0,0,1)$.



所以 $\overrightarrow{FC_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{FC_1}=\overrightarrow{AE}$，显然 AE 与 FC 不共线，

所以 $FC_1/\!/AE$，

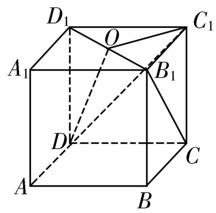
又因为 $FC_1\not\subset$平面 ADE，$AE\subset$平面 ADE，

所以 $FC_1/\!/$平面 ADE.

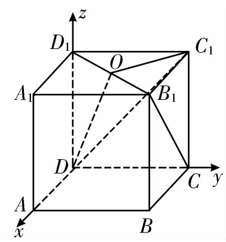
点睛 利用空间向量证明线面平行的方法

一是证明直线的方向向量与平面内的某一向量是共线向量且直线不在平面内；二是证明直线的方向向量与平面内的两个不共线向量是共面向量且直线不在平面内.

【变式训练 2】如图，已知 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，O 是 B_1D_1 的中点，求证：$B_1C/\!/$平面 ODC_1.



【证明】建立空间直角坐标系 $Dxyz$，如图所示，



设正方体的棱长为 1，则可得 $B_1(1,1,1)$，

$C(0,1,0)$，$O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$C_1(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1)$，

$\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{OC_1}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

设平面 ODC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$，

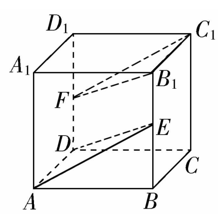
由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OC_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x_0-\frac{1}{2}y_0-z_0=0,\\ -\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}y_0=0,\end{cases}$

令 $x_0=1$ 得 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{n}=-1+1=0$，

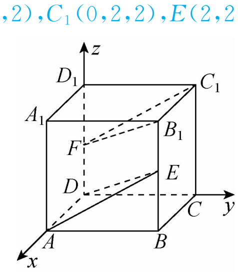
所以 $\overrightarrow{B_1C}\perp\boldsymbol{n}$，又 $B_1C\not\subset$平面 ODC_1，所以 $B_1C/\!/$平面 ODC_1.

探究 3 平面与平面平行

【例 3】根据例 2 条件，求证：平面 $ADE/\!/$平面 B_1C_1F.



【证明】如图所示，建立空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$D(0,0,0)$，$B_1(2,2,2)$，$C_1(0,2,2)$，$E(2,2,1)$，$F(0,0,1)$，



得 $\overrightarrow{DE}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{FB_1}=(2,2,1)$，

$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(-2,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB_1}$，$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{B_1C_1}$，

所以 $DE/\!/FB_1$，$DA/\!/B_1C_1$，

又 $DA\cap DE=D$，$FB_1\cap B_1C_1=B_1$，

所以平面 $ADE/\!/$平面 B_1C_1F.

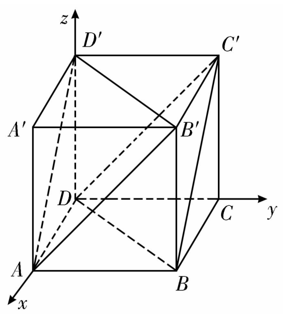
点睛 证明面面平行的方法

(1)由面面平行的判定定理，要证明面面平行，只需将其转化为相应的线面平行、线线平行问题即可.

(2)若能求出平面 α,β 的法向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$，则要证明 $\alpha/\!/\beta$，只需证明 $\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{v}$.

【变式训练 3】已知 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 是正方体，求证：平面 $AB'D'/\!/$平面 BDC'.

【证明】设正方体的棱长为 1，建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$，则 $A(1,0,0)$，$B'(1,1,1)$，$D'(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，$D(0,0,0)$，$C'(0,1,1)$，于是 $\overrightarrow{AB'}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{D'B'}=(1,1,0)$.



设平面 $AB'D'$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AB'},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{D'B'},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB'}=y_1+z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{D'B'}=x_1+y_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=1$，可得平面 $AB'D'$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1,1,-1)$.

设平面 BDC' 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

易知 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DC'}=(0,1,1)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{DB},\\ \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{DC'},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DB}=x_2+y_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC'}=y_2+z_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=1$，可得平面 BDC' 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-1,1,-1)$.

则 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2$，所以 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$，故平面 $AB'D'/\!/$平面 BDC'.

随堂小练

1. 直线 l_1,l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1=(3,0,1)$，$\boldsymbol{u}_2=(-1,0,m)$，若 $l_1/\!/l_2$，则 $m=$ （ D ）

A. 1　　B. 3

C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

【解析】因为 $l_1/\!/l_2$.

所以存在实数 λ，使 $\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{u}_2$，

即 $(3,0,1)=\lambda(-1,0,m)$，

$\therefore\begin{cases}-\lambda=3,\\ \lambda m=1,\end{cases}$ 解得 $m=-\frac{1}{3}$.

2. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(2,4,x)$，平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,y,3)$，若 $AB\perp\alpha$，则 （ A ）

A. $x=6,y=2$　　B. $x=2,y=6$

C. $3x+4y+2=0$　　D. $4x+3y+2=0$

【解析】因为 $AB\perp\alpha$，所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\boldsymbol{n}$，由 $\frac{2}{1}=\frac{4}{y}=\frac{x}{3}$，得 $x=6$，$y=2$. 故选 A.

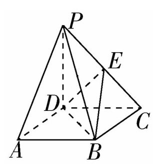
3. 若不重合的两个平面的法向量分别是 $\boldsymbol{a}=(3,-3,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,1)$，则这两个平面的位置关系是<u>　平行　</u>.

【解析】$\because\boldsymbol{a}=(3,-3,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,1)$，

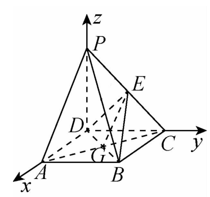
$\therefore\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

$\therefore$这两个平面平行.

4. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$底面 $ABCD$，$PD=DC$，E 是 PC 的中点. 求证：$PA/\!/$平面 EDB.



【证明】建立如图所示的空间直角坐标系.



D 是坐标原点，设 $DC=a$.

连接 AC 交 BD 于 G，连接 EG，依题意得 $D(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$P(0,0,a)$，$E\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 G 是此正方形的中心，

故点 G 的坐标为 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{EG}=\left(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2}\right)$.

又因为 $\overrightarrow{PA}=(a,0,-a)$，

所以 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$，这表明 $PA/\!/EG$.

而 $EG\subset$平面 EDB，且 $PA\not\subset$平面 EDB，

所以 $PA/\!/$平面 EDB.

温馨提示：请自主完成课后作业(六)

课后作业 · 单独成册

第 3 课时　空间中直线、平面的垂直

学习目标	核心素养
会用直线的方向向量和平面的法向量证明垂直.(重点、难点).	借助应用向量证明线线垂直、线面垂直和面面垂直的学习，提升数学运算和逻辑推理素养.

自主预习

知新预学

1. 线线垂直

如图 1，设直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$，则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow$ __$\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$__ $\Leftrightarrow$ __$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$__.

2. 线面垂直

如图 2，设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $l \perp \alpha \Leftrightarrow$ __$\boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{n}$__ $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$，使得__$\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{n}$__.

3. 面面垂直

如图 3，设平面 α, β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$，则 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$ __$\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$__ $\Leftrightarrow$ __$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$__.

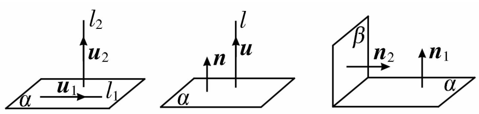


图1　图2　图3

小试牛刀

1. 若直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{a} = (1, 2, -2)$，$\boldsymbol{b} = (-2, 3, 2)$，则 (B)

A. $l_1 /\!/ l_2$　　B. $l_1 \perp l_2$

C. l_1, l_2 相交但不垂直　　D. 不能确定

【解析】由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times (-2) + 2 \times 3 + (-2) \times 2 = 0$ 得 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，故 $l_1 \perp l_2$，故选 B.

2. 已知空间向量 $\boldsymbol{a} = (3, 1, 0)$，$\boldsymbol{b} = (x, -3, 1)$，且 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，则 $x =$ (C)

A. -3　　B. -1

C. 1　　D. 2

【解析】因为 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$，又因为空间向量 $\boldsymbol{a} = (3, 1, 0)$，$\boldsymbol{b} = (x, -3, 1)$，

所以 $3x + 1 \times (-3) + 0 \times 1 = 0$，解得 $x = 1$，故选 C.

3. 若直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a} = (1, 0, 1)$，平面 β 的法向量 $\boldsymbol{n} = (1, 0, -1)$，则 (D)

A. $l \subset \beta$　　B. $l \perp \beta$

C. $l /\!/ \beta$　　D. $l \subset \beta$ 或 $l /\!/ \beta$

【解析】直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a} = (1, 0, 1)$，平面 β 的法向量 $\boldsymbol{n} = (1, 0, -1)$，

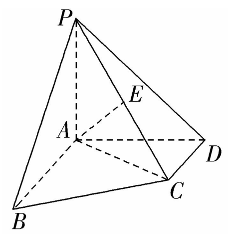
由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$，则 $l \subset \beta$ 或 $l /\!/ \beta$，故选 D.

互动课堂

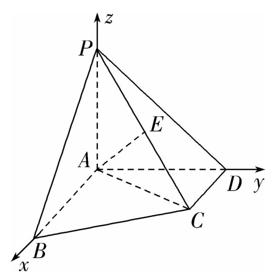
合作探究

探究 1　直线与直线垂直

【例 1】如图所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA \perp$ 底面 $ABCD$，垂足为 A，$AB \perp AD$，$AC \perp CD$，$\angle ABC = 60°$，$PA = AB = BC$，E 是 PC 的中点. 求证：$AE \perp CD$.



【解析】因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA \perp AB$，$PA \perp AD$，又 $AB \perp AD$，所以 PA, PB, PD 两两垂直，所以以 A 为坐标原点，直线 AB, AD, AP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $PA = AB = BC = 1$，

则 $A(0, 0, 0)$，$P(0, 0, 1)$.

因为 $\angle ABC = 60°$，所以 $\triangle ABC$ 为正三角形.

所以 $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$，$E\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

设 $D(0, y, 0)$，则 $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$，

$\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

由 $AC \perp CD$，得 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$，

即 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $D\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$，

所以 $\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$.

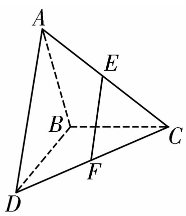
又 $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=0$，

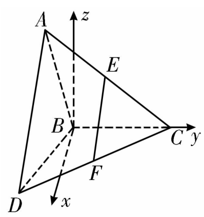
所以 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{CD}$，即 $AE\perp CD$.

点睛 证明两条直线垂直的基本步骤：建立空间直角坐标系→写出点的坐标→求直线的方向向量→证明向量垂直→得到两条直线垂直.

【变式训练 1】 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直，且 $AB=BC=BD=2$，$\angle ABC=\angle DBC=120°$，$E$，$F$ 分别为 AC，DC 的中点. 求证：$EF\perp BC$.



【证明】 由题意，以点 B 为坐标原点，在平面 DBC 内过点 B 作垂直于 BC 的直线为 x 轴，BC 所在直线为 y 轴，在平面 ABC 内过点 B 作垂直于 BC 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



易得 $B(0,0,0)$，$A(0,-1,\sqrt{3})$，$D(\sqrt{3},-1,0)$，$C(0,2,0)$，

因而 $E\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

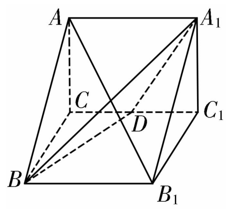
所以 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，

因此 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. 从而 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{BC}$，

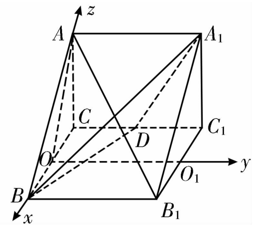
所以 $EF\perp BC$.

探究 2 直线与平面垂直

【例 2】 如图所示，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，D 为 CC_1 的中点. 求证：$AB_1\perp$ 平面 A_1BD.



【证明】 如图所示，取 BC 的中点 O，连接 AO. 因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，所以 $AO\perp BC$. 因为在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，



所以 $AO\perp$ 平面 BCC_1B_1.

取 B_1C_1 的中点 O_1，以 O 为原点，以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OO_1}$，$\overrightarrow{OA}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$D(-1,1,0)$，$A_1(0,2,\sqrt{3})$，$A(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BA_1}=(-1,2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$.

因为 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}=1\times(-1)+2\times2+(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=0$.

$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-2)+2\times1+(-\sqrt{3})\times0=0$.

所以 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BA_1}$，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BD}$，

即 $AB_1\perp BA_1$，$AB_1\perp BD$.

又因为 $BA_1\cap BD=B$，所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BD.

点睛 用坐标法证明线面垂直的方法及步骤

方法一：(1)建立空间直角坐标系.

(2)将直线的方向向量用坐标表示.

(3)找出平面内两条相交直线，并用坐标表示它们的方向向量.

(4)分别计算两组向量的数量积，得到数量积为 0.

方法二：(1)建立空间直角坐标系.

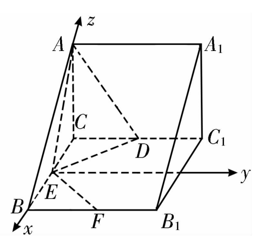
(2)将直线的方向向量用坐标表示.

(3)求出平面的法向量.

(4)判断直线的方向向量与平面的法向量平行.

【变式训练 2】 在例 2 中增加条件：E，F 分别是 BC，BB_1 的中点，求证：$EF\perp$ 平面 ADE.

【证明】 如图，建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,\sqrt{3})$，$D(-1,1,0)$，$E(0,0,0)$，$F(1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{EA}=(0,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{ED}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{EF}=(1,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EA}=1\times0+1\times0+0\times\sqrt{3}=0$，

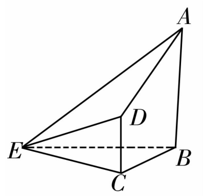
$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}=1\times(-1)+1\times1+0\times0=0$.

所以 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{ED}$，即 $EF\perp EA$，$EF\perp ED$.

又因为 $EA\cap ED=E$，所以 $EF\perp$ 平面 ADE.

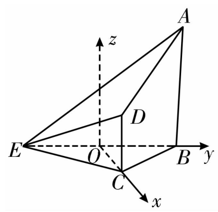
探究 3 平面与平面垂直

【例 3】 如图，在四棱锥 $E\text{-}ABCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCE，$CD\perp$ 平面 BCE，$AB=BC=CE=2CD=2$，$\angle BCE=120°$，求证：平面 $ADE\perp$ 平面 ABE.



【证明】 取 BE 的中点 O，连接 OC，又 $AB\perp$ 平面 BCE.

所以以 O 为原点建立空间直角坐标系 $Oxyz$（如图所示），



则有 $C(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$E(0,-\sqrt{3},0)$，$D(1,0,1)$，$A(0,\sqrt{3},2)$.

于是 $\overrightarrow{AE}=(0,-2\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{DA}=(-1,\sqrt{3},1)$.

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=(a,b,c)\cdot(0,-2\sqrt{3},-2)=-2\sqrt{3}b-2c=0$，

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=(a,b,c)\cdot(-1,\sqrt{3},1)=-a+\sqrt{3}b+c=0$.

令 $b=1$，则 $a=0$，$c=-\sqrt{3}$. 所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,-\sqrt{3})$.

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{m}$，显然 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$.

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=(0,1,-\sqrt{3})\cdot(1,0,0)=0$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}$，

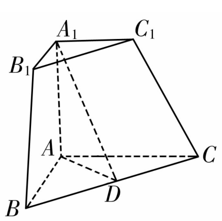
所以平面 $ADE\perp$ 平面 ABE.

点睛 证明面面垂直的两种方法

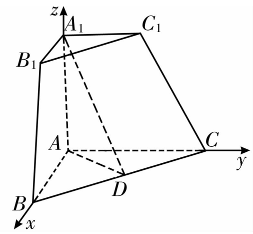
(1)常规法：利用面面垂直的判定定理转化为线面垂直、线线垂直去证明.

(2)向量法：证明两个平面的法向量互相垂直.

【变式训练 3】 三棱锥被平行于底面 ABC 的平面所截得的几何体如图所示，截面为三角形 $A_1B_1C_1$，$\angle BAC=90°$，$A_1A\perp$ 平面 ABC，$A_1A=\sqrt{3}$，$AB=AC=2A_1C_1=2$，D 为 BC 的中点. 求证：平面 $A_1AD\perp$ 平面 BCC_1B_1.



【证明】 如图，建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$C_1(0,1,\sqrt{3})$，

因为 D 为 BC 的中点，所以 D 点坐标为 $(1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{3})$，

因为 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=-2+2+0=0$，

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0+0+0=0$，

所以 $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AA_1}$，所以 $BC\perp AD$，$BC\perp AA_1$，

又 $AD\cap AA_1=A$，所以 $BC\perp$ 平面 ADA_1，

而 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以平面 $A_1AD\perp$ 平面 BCC_1B_1.

随堂小练

1. 设 $\boldsymbol{u}=(-2,2,t)$，$\boldsymbol{v}=(6,-4,4)$ 分别是平面 α，β 的法向量. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $t=$ （ C ）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【解析】 $\because\alpha\perp\beta$，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=-2\times6+2\times(-4)+4t=0$，

$\therefore t=5$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,2,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,m,3)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$ （ A ）

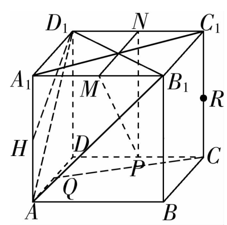
A. -6　　B. 6　　C. -9　　D. 9

【解析】 由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，又 $\boldsymbol{a}=(-3,2,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,m,3)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3\times1+2\times m+5\times3=2m+12=0$，解得 $m=-6$，故选 A.

3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q，M，N，H，R 是各条棱的中点.

①直线 $AD_1/\!/$平面 MNP；②$HD_1\perp CQ$；③P，Q，H，R 四点共面；④$A_1C_1\perp$ 平面 AB_1D_1.

其中正确的个数为 （ B ）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】 因为 M，N 分别为 A_1B_1，C_1D_1 中点，

所以 $MN/\!/A_1D_1$，

又因为 $MN \not\subset$ 平面 ADD_1A_1，$A_1D_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以平面 $MN //$ 平面 ADD_1A_1，

同理可得 $NP //$ 平面 ADD_1A_1，

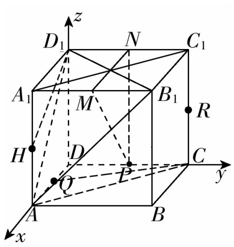
又因为 $MN \cap NP = N$，

所以平面 $MNP //$ 平面 ADD_1A_1，

又因为 $AD_1 \not\subset$ 平面 MNP，$AD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $AD_1 //$ 平面 MNP，①正确；

设棱长为 2，如图建立空间直角坐标系，



所以 $D_1(0,0,2)$，$H(2,0,1)$，$C(0,2,0)$，$Q(1,0,0)$，

用向量法 $\overrightarrow{HD_1}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{CQ}=(1,-2,0)$，则 $\overrightarrow{HD_1} \cdot \overrightarrow{CQ}=-2+0+0\neq 0$，②错误；

连接 AC，因为 H，R 分别是 AA_1，CC_1 中点，

所以 $HR // AC$，

又因为 Q，P 分别为 AD，DC 中点，所以 $QP // AC$，

所以 $PQ // HR$，故 P，Q，H，R 四点共面，③正确；

因为 $A(2,0,0)$，$B_1(2,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，$A_1(2,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，

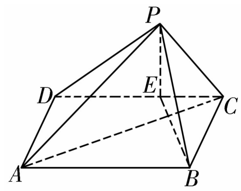
所以 $\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，

$\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}\neq 0$，$\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}\neq 0$，

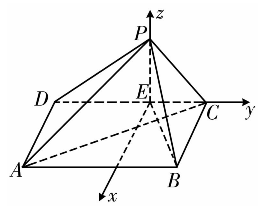
所以直线 A_1C_1 不垂直于平面 AB_1D_1，④不正确；

所以正确的是①③，故选 B.

4. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB=3\sqrt{3}$，$BC=3$，$\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{CE}$，$PE\perp$ 平面 $ABCD$，$PE=\sqrt{6}$. 求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBE.



【解析】 建立如图所示的空间直角坐标系，



因为 $ABCD$ 是矩形，$AB=3\sqrt{3}$，$\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{CE}$，

所以 $CE=\sqrt{3}$.

则 $E(0,0,0)$，$A(3,-2\sqrt{3},0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$B(3,\sqrt{3},0)$，

则 $\overrightarrow{AC}=(-3,3\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{EB}=(3,\sqrt{3},0)$.

因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB}=(-3,3\sqrt{3},0)\cdot(3,\sqrt{3},0)=0$，

所以 $AC\perp BE$. 又 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PE\perp AC$，

因此，$BE\cap PE=E$，

所以 $AC\perp$ 平面 PBE.

又因为 $AC\subset$ 平面 PAC.

所以平面 $PAC\perp$ 平面 PBE.

温馨提示：请自主完成课后作业（七）

课后作业·单独成册

第 4 课时　用空间向量研究距离问题

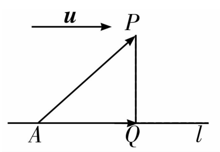
学习目标	核心素养
会用向量方法求两点间的距离、点到直线的距离、点到平面的距离.(重点、难点)	通过用向量方法求两点之间、点到直线、点到平面、两条平行直线以及两个平行平面的距离问题的学习,培养数学想象及数学运算素养.

自主预习

知新预学

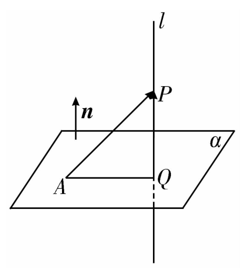
1. 点 P 到直线 l 的距离

如图,设 $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的单位方向向量,则向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{AQ}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$. 在 Rt△$APQ$ 中,由勾股定理,得 $PQ=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}=$ $\underline{\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}}$.



2. 点 P 到平面 α 的距离

如图,若平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$,平面 α 内一点为 A,则平面 α 外一点 P 到平面 α 的距离为 $PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.



3. 直线到平面的距离

直线到与它平行的平面的距离,转化为点到平面的距离.

4. 两个平行平面的距离

两个平行平面间的距离,转化为点到平面的距离.

小试牛刀

1. 判断下列说法是否正确,正确的打"√",错误的打"×".

(1)可以用 $|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ 求空间两点 A,B 的距离.　(√)

(2)设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量,AB 是平面 α 的一条斜线,且 $A\in\alpha$,则点 B 到 α 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.　(√)

(3)若直线 l 与平面 α 平行,直线 l 上任意一点与平面 α 内任意一点的距离就是直线 l 与平面 α 的距离.　(×)

【解析】直线 l 与平面 α 的距离应为直线 l 上任意一点到平面 α 的垂线段的长度.

2. 设 $A(3,3,1)$,$B(1,0,5)$,$C(0,1,0)$,则 AB 的中点 M 到点 C 的距离为　(C)

A. $\frac{\sqrt{53}}{4}$　B. $\frac{53}{2}$　C. $\frac{\sqrt{53}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

【解析】∵M 点坐标为 $\left(2,\frac{3}{2},3\right)$,

∴$CM=\sqrt{(2-0)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+(3-0)^2}=\frac{\sqrt{53}}{2}$.

3. 已知平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$,点 $A(-1,3,0)$ 在 α 内,则 $P(-2,1,4)$ 到 α 的距离为　(D)

A. 1　B. 3　C. $\frac{8}{3}$　D. $\frac{10}{3}$

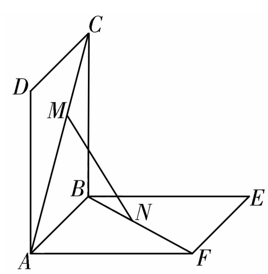
【解析】$\overrightarrow{AP}=(-1,-2,4)$,$d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{10}{3}$.

互动课堂

合作探究

探究 1　空间两点间的距离

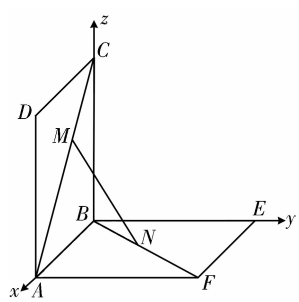
【例 1】如图所示,正方形 $ABCD$,$ABEF$ 的边长都是 1,而且平面 $ABCD$,$ABEF$ 互相垂直,点 M 在 AC 上移动,点 N 在 BF 上移动,若 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$.



(1)求 MN 的长;

(2)a 为何值时,MN 的长最小?

【解析】(1)建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0)$,$F(1,1,0)$,$C(0,0,1)$.

因为 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$，且四边形 $ABCD$，$ABEF$ 为正方形，

所以 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,1-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，$N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a-1\right)$，

所以 $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}$.

(2)由(1)知 $MN=\sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$，

所以当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

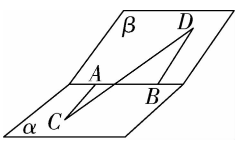
即当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，MN 的长最小，最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

点睛 计算两点间的距离的两种方法

(1)利用 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$，通过向量运算求 $|\boldsymbol{a}|$，如求 A，B 两点间的距离，一般用 $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2}=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}$ 求解.

(2)用坐标法求向量的长度(或两点间的距离)，此法适用于求解的图形适宜建立空间直角坐标系时.

【变式训练 1】如图所示，在 120° 的二面角 α-AB-β 中，$AC\subset\alpha$，$BD\subset\beta$，且 $AC\perp AB$，$BD\perp AB$，垂足分别为 A，B，已知 $AC=AB=BD=6$，试求线段 CD 的长.



【解析】$\because AC\perp AB$，$BD\perp AB$，

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

又$\because$二面角 α-AB-β 的平面角为 120°，

$\therefore\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=60°$，

$\therefore |CD|^2=|\overrightarrow{CD}|^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2$

$=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB})$

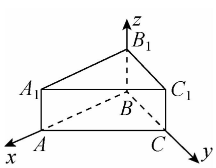
$=3\times 6^2+2\times 6^2\times\cos 60°=144$，

$\therefore CD=12$.

探究 2 点到直线的距离

【例 2】已知在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=1$，$AB=4$，$BC=3$，$\angle ABC=90°$，求点 B 到直线 A_1C_1 的距离.

【解析】以 B 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A_1(4,0,1)$，$C_1(0,3,1)$，所以直线 A_1C_1 的方向向量为 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-4,3,0)$，而 $\overrightarrow{BC_1}=(0,3,1)$，

所以点 B 到直线 A_1C_1 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{BC_1}|^2-\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}\right|^2}=\sqrt{10-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{13}{5}.$$

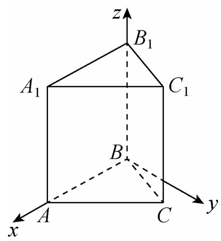
点睛 用向量法求点到直线的距离时需注意的点

(1)不必找点在直线上的垂足以及垂线段.

(2)在直线上可以任意选点，但一般选较易求得坐标的特殊点.

【变式训练 2】将例 2 中的条件改为“正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 且所有棱长均为 2”，求点 B 到直线 A_1C_1 的距离.

【解析】以 B 为原点，分别以 BA，过 B 垂直于 BA 的直线，BB_1 为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(0,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，$C_1(1,\sqrt{3},2)$，

所以 A_1C_1 的方向向量 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,\sqrt{3},0)$，而 $\overrightarrow{BC_1}=(1,\sqrt{3},2)$，

所以点 B 到直线 A_1C_1 的距离为

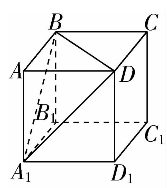
$$d=\sqrt{|\overrightarrow{BC_1}|^2-\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}\right|^2}$$

$$=\sqrt{8-\left(\frac{-1+3+0}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{8-1}=\sqrt{7}.$$

探究 3 点到平面的距离

【例 3】如图，正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，求点 A 到平面 A_1BD 的距离.



【解析】法一：设点 A 到平面 A_1BD 的距离为 h，则

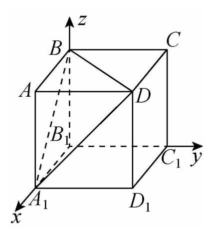
$V_{B\text{-}AA_1D}=\frac{1}{3}\times a\times\frac{1}{2}\times a\times a=\frac{1}{6}a^3$，

$V_{A\text{-}A_1BD}=\frac{1}{3}\times h\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h$，

$\because V_{A\text{-}A_1BD}=V_{B\text{-}AA_1D}$，

$\therefore h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$\therefore$点 A 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

法二：如图所示，建立空间直角坐标系 B_1xyz，则 $A_1(a,0,0)$，$A(a,0,a)$，$D(a,a,a)$，$B(0,0,a)$，



则 $\overrightarrow{BD}=(a,a,0)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,a,a)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,0,0)$.

设平面 A_1BD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax+ay=0,\\ ay+az=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=z=1$，

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=(-a,0,0)\cdot(1,-1,1)=-a$.

$\therefore$ 点 A 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-a|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

点睛 用向量法求点到平面的距离的方法与步骤

(1)建立坐标系：结合图形的特点建立恰当的空间直角坐标系.

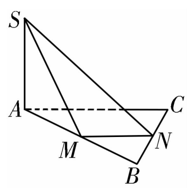
(2)求向量：在坐标系中求出点到平面内任一点对应的向量 $\overrightarrow{AB}$.

(3)求法向量：设出平面的法向量，利用向量垂直的条件转化为求解方程组，求出法向量 $\boldsymbol{n}$.

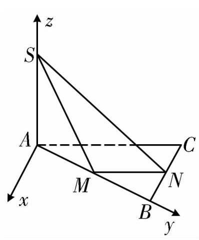
(4)得答案：代入公式 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$ 求得答案.

提醒：用向量法求点到平面的距离的关键是确定平面的法向量.

【变式训练 3】如图所示，已知△ABC 是以∠B 为直角的直角三角形，$SA\perp$平面 ABC，$SA=BC=2$，$AB=4$，M，N 分别是 AB，BC 的中点，求点 A 到平面 SMN 的距离.



【解析】建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $M(0,2,0)$，$S(0,0,2)$，$N(-1,4,0)$，$\therefore\overrightarrow{MS}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{SN}=(-1,4,-2)$.

设平面 SMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

$\therefore\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MS}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SN}=0$，

$\therefore\begin{cases}-2y+2z=0,\\ -x+4y-2z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，$\therefore\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$

$\therefore\boldsymbol{n}=(2,1,1)$，$\because\overrightarrow{AS}=(0,0,2)$.

$\therefore$ 点 A 到平面 SMN 的距离为 $\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AS}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

随堂小练

1. 在四面体 P-ABC 中，PA，PB，PC 两两垂直，M 是平面 ABC 内一点，且点 M 到其他三个平面的距离分别是 2，3，6，则点 M 到顶点 P 的距离是 (A)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

【解析】以 P 为坐标原点，$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，由题意，得 $|MP|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$.

2. 已知平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$，点 $A(x,3,0)$ 在平面 α 内，点 $P(-2,1,4)$ 到平面 α 的距离为 $\dfrac{10}{3}$，则 $x=$ (C)

A. -1　　B. -11

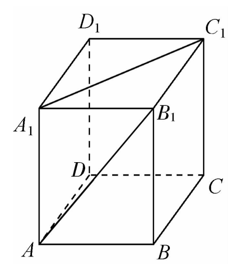
C. -1 或 -11　　D. -21

【解析】$\overrightarrow{PA}=(x+2,2,-4)$，而 $d=\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{10}{3}$，即 $\dfrac{|-2(x+2)-4-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{10}{3}$，解得 $x=-1$ 或 -11.

3. 若正四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1，AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60°角，则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为 (D)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

【解析】如图，

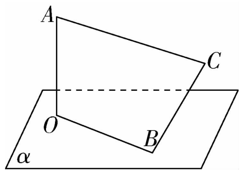


A_1C_1//平面 $ABCD$，所以 A_1C_1 到平面 $ABCD$ 的距离等于点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离. 由 AB_1 与平面 $ABCD$ 所成的角是 60°，$AB=1$，得 $BB_1=\sqrt{3}$. 即点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{3}$.

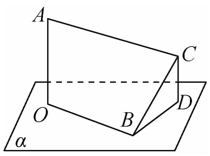
4. 在 Rt△ABC 中，∠$C=30°$，∠$B=90°$，D 是 BC 边的中点，$AC=2$，$DE\perp$平面 ABC，$DE=1$，则点 E 到斜边 AC 的距离是 $\underline{\ \dfrac{\sqrt{19}}{4}\ }$.

【解析】作 $DH\perp AC$ 于点 H，连接 EH(图略). 因为 $DE\perp$平面 ABC，所以 $DE\perp AC$，因为 $DE\cap DH=D$，所以 $AC\perp$平面 DEH，所以 $EH\perp AC$，所以 EH 即为所求距离. 由∠$B=90°$，∠$C=30°$，$AC=2$，得 $BC=\sqrt{3}$. 因为 D 是 BC 边上的中点，所以 $DH=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{4}BC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. 又 $DE=1$，所以 $EH=\sqrt{DE^2+DH^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{4}$.

5. 如图所示，$BO\subset$平面α，$AO\perp$平面α，$BC\perp OB$，BC与平面α的夹角为30°，$AO=BO=BC=1$，试求AC的长.



【解析】如图，作$CD\perp$平面α于D，则$\angle DBC=30^\circ$，



$\therefore\angle BCD=60^\circ$.

$\therefore\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\rangle=120^\circ$，即$\langle\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BC}\rangle=120^\circ$.

$\therefore|\overrightarrow{AC}|^2=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})^2$

$=|\overrightarrow{AO}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=3+2\cos 120^\circ=2$.

$\therefore AC=\sqrt{2}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（八）

课后作业·单独成册

第 5 课时　用空间向量研究夹角问题

学习目标	核心素养
会用向量法求异面直线所成的角、直线与平面所成的角、两个平面的夹角.（重点、难点）	通过利用空间向量求异面直线所成的角、直线与平面所成的角和两个平面的夹角的学习，提升逻辑推理和数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 异面直线所成的角

如图 1，若异面直线 l_1，l_2 所成的角为 θ，其方向向量分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|=$ $\underline{\left|\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right|}$ $=$ $\underline{\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}}$.

2. 直线与平面所成的角

如图 2，直线 AB 与平面 α 相交于点 B，设直线 AB 与平面 α 所成的角为 θ，直线 AB 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle|=$ $\underline{\left|\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}\right|}$ $=$ $\underline{\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}}$.

3. 平面与平面的夹角

(1)定义：平面 α 与平面 β 相交，形成四个二面角，我们把这四个二面角中<u>不大于 90°</u>的二面角称为平面 α 与平面 β 的夹角.

(2)求法：如图 3，若平面 α，β 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，则平面 α 与平面 β 的夹角即向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角或其补角. 设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=$ $\underline{\left|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|}$ $=$ $\underline{\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}}$.

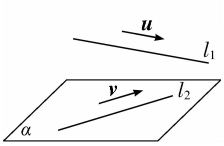


图 1

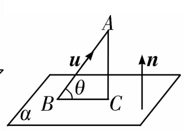


图 2

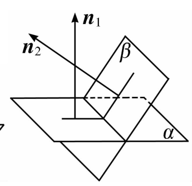


图 3

小试牛刀

1. 若直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量的夹角为 $\dfrac{5\pi}{6}$，则 l 与 α 所成的角为　　　　（ B ）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　　B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{5\pi}{6}$　　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 分别是直线 l 的方向向量和平面 α 的法向量，若 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=-\dfrac{1}{2}$，则 l 与 α 所成的角为　　　　（ A ）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

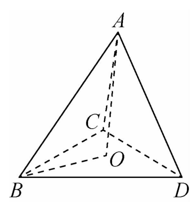
【解析】设 l 与 α 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{1}{2}$. $\therefore\theta=30°$.

3. 已知两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{n}=(0,1,1)$，则两个平面所成的二面角为<u>45°或 135°</u>.

【解析】设二面角的平面角为 θ，$\because\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\theta=45°$或 $135°$.

4. 在正四面体 $ABCD$ 中，棱 AB 与底面 BCD 所成角的余弦值为 $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$.

【解析】作 $AO\perp$底面 BCD，垂足为 O，O 为$\triangle BCD$ 的中心，设正四面体的棱长为 a，则 $OB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$\angle ABO$ 为所求角，$\cos\angle ABO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

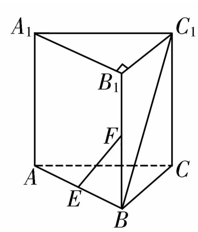


互动课堂

合作探究

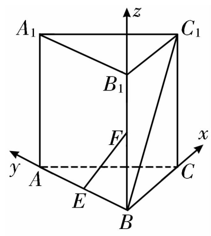
探究 1　异面直线所成的角

【例 1】如图，在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$底面 ABC，$AB=BC=AA_1$，$\angle ABC=90°$，点 E，F 分别是棱 AB，BB_1 的中点，求直线 EF 和 BC_1 所成的角.



【解析】以 B 为原点，分别以直线 BC，BA，BB_1 为 x，y，z

轴,建立空间直角坐标系(如图).



设 $AB=1$,则 $B(0,0,0)$,

$E\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$,$F\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$,$C_1(1,0,1)$,

所以 $\overrightarrow{EF}=\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{BC_1}=(1,0,1)$.

于是 $\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{EF}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{BC_1}||\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$,

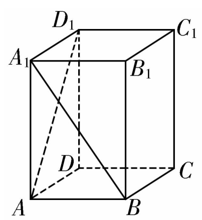
所以直线 EF 和 BC_1 所成角的大小为 $60°$.

点睛 求两条异面直线所成的角的两个关注点

(1)余弦值非负:两条异面直线所成的角的余弦值一定为非负值,而对应的方向向量的夹角可能为钝角.

(2)范围:异面直线所成的角的范围是 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,故两条直线的方向向量夹角的余弦值为负时,应取其绝对值.

【变式训练 1】如图所示,在正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=2AB$,则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成的角的余弦值为 $\underline{\ \dfrac{4}{5}\ }$.



【解析】以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在的直线为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系 $Dxyz$,设 $AB=1$,

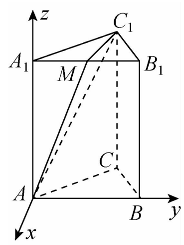
则 $B(1,1,0)$,$A_1(1,0,2)$,$A(1,0,0)$,$D_1(0,0,2)$,$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-2)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,2)$,

$\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AD_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AD_1}}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{AD_1}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{4}{5}$,故异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{4}{5}$.

探究 2 直线与平面所成的角

【例 2】已知正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a,侧棱长为 $\sqrt{2}a$,求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

【解析】建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$,



则 $A(0,0,0)$,$B(0,a,0)$,$A_1(0,0,\sqrt{2}a)$,$C_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$,

方法一 取 A_1B_1 的中点 M,

则 $M\left(0,\dfrac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$,连接 AM,MC_1,

则 $\overrightarrow{MC_1}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,0,0\right)$,$\overrightarrow{AB}=(0,a,0)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{2}a)$.

$\therefore\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$,

$\therefore\overrightarrow{MC_1}\perp\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{MC_1}\perp\overrightarrow{AA_1}$,

则 $MC_1\perp AB$,$MC_1\perp AA_1$.

又 $AB\cap AA_1=A$,

$\therefore MC_1\perp$平面 ABB_1A_1.

$\therefore\angle C_1AM$ 是 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

由于 $\overrightarrow{AC_1}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$,$\overrightarrow{AM}=\left(0,\dfrac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$,

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AM}=0+\dfrac{a^2}{4}+2a^2=\dfrac{9a^2}{4}$,

$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}+2a^2}=\sqrt{3}a$,

$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+2a^2}=\dfrac{3}{2}a$,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AM}\rangle=\dfrac{\frac{9a^2}{4}}{\sqrt{3}a\times\frac{3a}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AM}\rangle\in[0°,180°]$,$\therefore\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AM}\rangle=30°$,

又直线与平面所成的角在$[0°,90°]$范围内,

$\therefore AC_1$ 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为 $30°$.

方法二 $\overrightarrow{AB}=(0,a,0)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{2}a)$,$\overrightarrow{AC_1}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$.

设侧面 ABB_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(\lambda,y,z)$,

$\therefore\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 且 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$. $\therefore ay=0$ 且 $\sqrt{2}az=0$.

$\therefore y=z=0$. 故 $\boldsymbol{n}=(\lambda,0,0)$.

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC_1}|}=-\dfrac{\lambda}{2|\lambda|}$,

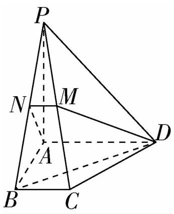
$\therefore|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{1}{2}$.

又直线与平面所成的角在$[0°,90°]$范围内,

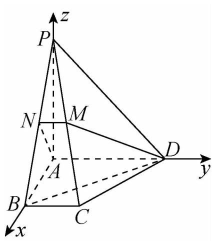
$\therefore AC_1$ 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为 $30°$.

点睛 用向量法求直线与平面所成的角的一般步骤是：先利用图形的几何特征建立适当的空间直角坐标系，再用向量的有关知识求解角度.

【变式训练 2】 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面为直角梯形，$AD/\!/BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=AD=AB=2BC$，M，N 分别为 PC，PB 的中点，求直线 BD 与平面 $ADMN$ 所成的角 θ.



【解析】 如图所示，建立空间直角坐标系 $Axyz$，设 $BC=1$，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$

则 $N(1,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AN}=(1,0,1)$，

设平面 $ADMN$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=0,\\ x+z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $z=-1$，

$\therefore \boldsymbol{n}=(1,0,-1)$，

$\because \cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{1}{2}$.

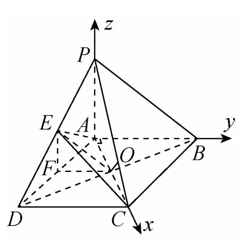
又 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant90^\circ$，

$\therefore \theta=30^\circ$.

探究 3　两个平面的夹角

【例 3】 在底面为平行四边形的四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$AB\perp AC$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=AB$，E 是 PD 的中点，求平面 EAC 与平面 $ABCD$ 的夹角.

【解析】 方法一　如图，以 A 为原点，分别以 AC，AB，AP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $Axyz$.



设 $PA=AB=a$，$AC=b$，连接 BD 与 AC，交于点 O，取 AD 中点 F，连接 EF，EO，FO，则 $C(b,0,0)$，$B(0,a,0)$.

$\because \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，

$\therefore D(b,-a,0)$，$P(0,0,a)$，

$\therefore E\left(\dfrac{b}{2},-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$，$O\left(\dfrac{b}{2},0,0\right)$，

$\overrightarrow{OE}=\left(0,-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(b,0,0)$.

$\because \overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\therefore \overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\left(0,-\dfrac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$\therefore \overrightarrow{OF}\perp\overrightarrow{AC}$.

$\therefore \angle EOF$ 等于平面 EAC 与平面 $ABCD$ 的夹角.

$\cos\langle\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OE}||\overrightarrow{OF}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 平面 EAC 与平面 $ABCD$ 的夹角为 45°.

方法二　建系如方法一，

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=(0,0,a)$ 为平面 $ABCD$ 的法向量，

$\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{b}{2},-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(b,0,0)$.

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}\dfrac{b}{2}x-\dfrac{a}{2}y+\dfrac{a}{2}z=0,\\ bx=0.\end{cases}$

$\therefore x=0$，$y=z$.

$\therefore$ 取 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$，

$\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AP}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AP}|}=\dfrac{a}{\sqrt{2}\cdot a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又平面 EAC 与平面 $ABCD$ 所成角的平面角为锐角，

$\therefore$ 平面 EAC 与平面 $ABCD$ 的夹角为 45°.

点睛 设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角（或其补角）就是这两个平面的夹角，用坐标法的解题步骤如下：

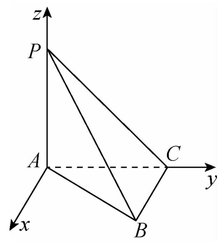
(1)建系：依据几何条件建立适当的空间直角坐标系；

(2)求法向量：在建立的坐标系下求两个面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$；

(3)计算：$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

【变式训练 3】 若 $PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，$PA=AC=1$，$BC=\sqrt{2}$，求二面角 $A\text{-}PB\text{-}C$ 的余弦值.

【解析】 如图所示建立空间直角坐标系 $Axyz$，则 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},1,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，



故 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},1,0)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-1,1)$，

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}z=0,\\ \sqrt{2}x+y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-\sqrt{2}$，故 $m=(1,-\sqrt{2},0)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}x'=0,\\ -y'+z'=0.\end{cases}$

令 $y'=-1$，则 $z'=-1$，故 $\boldsymbol{n}=(0,-1,-1)$，

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 锐二面角 A-PB-C 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

随堂小练

1. 直线 l_1，l_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，若 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 所成的角为 θ，直线 l_1，l_2 所成的角为 α，则 (D)

A. $\alpha=\theta$ B. $\alpha=\pi-\theta$

C. $\cos\theta=|\cos\alpha|$ D. $\cos\alpha=|\cos\theta|$

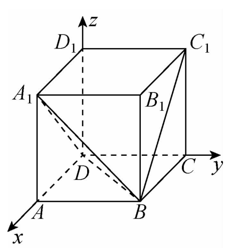
【解析】$\alpha=\theta$ 或 $\alpha=\pi-\theta$，且 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，因而 $\cos\alpha=|\cos\theta|$.

2. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 BC_1 与平面 A_1BD 所成角的正弦值为 (C)

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】建系如图，设正方体的棱长为 1，则 $D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$B(1,1,0)$，$C_1(0,1,1)$，$A(1,0,0)$，



$\therefore\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$.

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=1-1=0$，

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=1-1=0$.

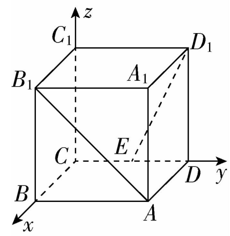
$\therefore AC_1\perp A_1B$，$AC_1\perp A_1D$，又 $A_1B\cap A_1D=A_1$，

$\therefore AC_1\perp$ 平面 A_1BD. $\therefore\overrightarrow{AC_1}$ 是平面 A_1BD 的法向量.

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{AC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{BC_1}||\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{1+1}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore$ 直线 BC_1 与平面 A_1BD 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3. 已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E 是 DC 的中点，建立如图所示的空间直角坐标系 $Cxyz$，则 AB_1 与 ED_1 所成角的余弦值为 (A)



A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

C. $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ D. $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】$\because A(2,2,0)$，$B_1(2,0,2)$，$E(0,1,0)$，$D_1(0,2,2)$，

$\therefore\overrightarrow{AB_1}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{ED_1}=(0,1,2)$，

$\therefore|\overrightarrow{AB_1}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{ED_1}|=\sqrt{5}$，

$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{ED_1}=0-2+4=2$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{ED_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{ED_1}}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{ED_1}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore AB_1$ 与 ED_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

4. 已知点 $A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,3)$，则平面 ABC 与平面 Oxy 所成锐二面角的余弦值为 $\underline{\dfrac{2}{7}}$.

【解析】$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$.

设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 知 $\begin{cases}-x+2y=0,\\ -x+3z=0.\end{cases}$

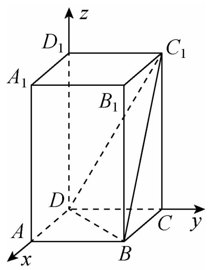
令 $x=2$，则 $y=1$，$z=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore$ 平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(2,1,\dfrac{2}{3}\right)$，平面 Oxy 的法向量为 $\overrightarrow{OC}=(0,0,3)$.

所以所求锐二面角的余弦值 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{2}{3\times\dfrac{7}{3}}=\dfrac{2}{7}$.

5. 已知在正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，求 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值.

【解析】 以 D 为原点，分别以 DA,DC,DD_1 为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$.



设 $AA_1=2AB=2$，

则 $B(1,1,0),C(0,1,0),D(0,0,0),C_1(0,1,2)$，

故 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0),\overrightarrow{DC_1}=(0,1,2),\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，

设平面 BDC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+2z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=-2,x=2$，

所以 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

设直线 CD 与平面 BDC_1 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DC}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{2}{3}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（九）

课后作业 · 单独成册

三、知能拓展

空间向量与立体几何复习

核心梳理

1. 空间向量及其运算

空间向量加法、减法、数乘向量的意义及运算律与平面向量类似，空间任意两个向量都可以通过平移转化为平面向量，两个向量相加的三角形法则与平行四边形法则仍然成立.

2. 空间向量基本定理

如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 (x,y,z)，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

(1)空间任意三个不共面的向量都可以作为空间向量的一个基底.

(2)由于零向量可视为与任意一个非零向量共线，与任意两个非零向量共面，所以，三个向量不共面，就隐含着它们都不是零向量.

(3)一个基底是指一个向量组，一个基向量是指基底中的某一个向量，二者是相关联的不同概念.

3. 空间向量运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；

(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；

(3)$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in\mathbf{R})$；

(4)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

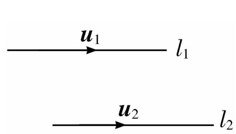
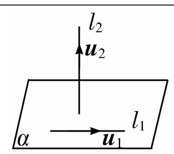
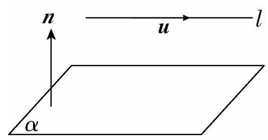
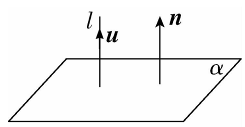
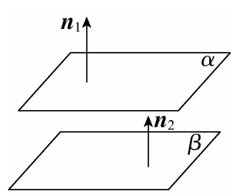
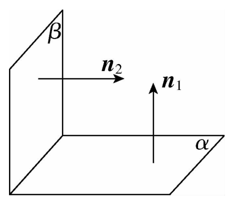
(5)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$；

(6)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$（$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$）；

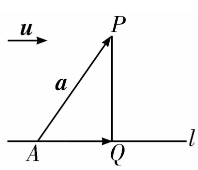
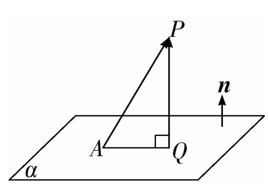
(7)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in\mathbf{R},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$；

(8)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

4. 用向量方法讨论垂直与平行

关系	图示	证明方法
线线平行 $(l_1/\!/l_2)$		$\boldsymbol{u}_1/\!/\boldsymbol{u}_2$（$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 分别是直线 l_1,l_2 的方向向量）
线线垂直 $(l_1\perp l_2)$		$\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2$，即 $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=0$（$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 分别是直线 l_1,l_2 的方向向量）
线面平行 $(l/\!/\alpha)$		$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$（$\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量）
线面垂直 $(l\perp\alpha)$		$\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量）
面面平行 $(\alpha/\!/\beta)$		$\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$（$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α,β 的法向量）
面面垂直 $(\alpha\perp\beta)$		$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，即 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$（$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α,β 的法向量）

5. 用向量方法求距离

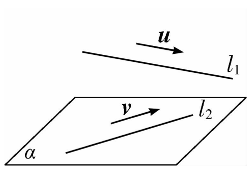
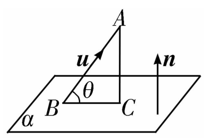
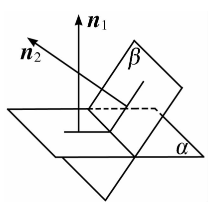
名称	图示	求法
点到直线的距离		点 P 到直线 l 的距离 $PQ=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$（$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{u}$ 为直线 l 的单位方向向量）
点到平面的距离		点 P 到平面 α 的距离 $PQ=\dfrac{\lvert\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}\rvert}$（$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量）

(1)在直线上选取点时，应遵循“便于计算”的原则，可视情况灵活选择.

(2)空间距离不只有向量法一种求法，比如点面距还有一种重要的求法为等积转化法.

(3)各种距离之间有密切联系，有些可以相互转化，如两条平行直线间的距离可转化为点到直线的距离，平行线面间的距离或平行平面间的距离都可转化为点到平面的距离.

6. 用向量方法求角

名称	图示	求法
异面直线所成的角		$\cos\theta=\lvert\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\rvert=\dfrac{\lvert\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\rvert}{\lvert\boldsymbol{u}\rvert\lvert\boldsymbol{v}\rvert}$($\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 分别为直线 l_1 与 l_2 的方向向量，θ 为直线 l_1 与 l_2 所成的角)
直线与平面所成的角		$\sin\theta=\lvert\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle\rvert=\dfrac{\lvert\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\rvert}{\lvert\boldsymbol{u}\rvert\lvert\boldsymbol{n}\rvert}$($\boldsymbol{u}$ 为直线 AB 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，θ 为直线 AB 与平面 α 所成的角)
平面与平面的夹角		$\cos\theta=\lvert\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle\rvert=\dfrac{\lvert\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}_1\rvert\lvert\boldsymbol{n}_2\rvert}$($\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 α 与 β 的法向量，θ 为平面 α 与 β 的夹角)

7. 立体几何中的向量方法

(1)用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”

①建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；(化为向量问题)

②通过向量运算，研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间的距离和夹角等问题；(进行向量运算)

③把向量运算的结果“翻译”成相应的几何结论.（回到图形问题）

(2)用坐标法解决立体几何问题的一般步骤

①建立适当的空间直角坐标系；

②写出相关点的坐标及向量的坐标；

③进行相关的计算；

④写出几何意义下的结论.

重难突破

要点1 空间向量及其运算

向量的表示与运算的关键是熟练掌握向量加减运算的平行四边形法则、三角形法则及各运算公式，理解向量运算法则、运算律及其几何意义.

【例1】 如图，在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，S 到 A,B,C,D 的距离都等于2. 给出以下结论：

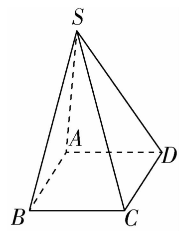
①$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\mathbf{0}$；

②$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}=\mathbf{0}$；

③$\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}=\mathbf{0}$；

④$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SD}$；

⑤$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=0$.



其中正确结论的序号是__③④__.

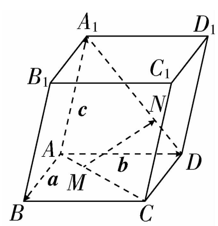
【解析】 容易推出 $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$，所以③正确；又因为底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，$SA=SB=SC=SD=2$，所以 $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=2\times2\cos\angle ASB$，$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SD}=2\times2\times\cos\angle CSD$，而 $\angle ASB=\angle CSD$，于是 $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SD}$，因此④正确，其余三个都不正确，故正确结论的序号是③④.

点睛 空间向量加法、减法运算的两个技巧

(1)巧用相反向量：向量加减法的三角形法则是解决空间向量加法、减法运算的关键，灵活应用相反向量可使向量间首尾相接.

(2)巧用平移：利用三角形法则和平行四边形法则进行向量的加法运算时，务必要注意和向量、差向量的方向，必要时可采用空间向量的自由平移获得更准确的结果.

【变式训练1】 如图所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AM=\dfrac{1}{3}AC$，$DN=\dfrac{1}{3}DA_1$，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$.



【解析】 连接 AN，则 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$，

由已知 $ABCD$ 是平行四边形，

故 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

因为 $AM=\dfrac{1}{3}AC$，

所以 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

因为 $DN=\dfrac{1}{3}DA$，

故 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{A_1D}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b})$.

于是 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b})$

$=\dfrac{1}{3}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

要点2 利用空间向量解决位置关系问题

(1)证明两条直线平行,只需证明这两条直线的方向向量是共线向量.

(2)证明线面平行的方法:

①证明直线的方向向量与平面的法向量垂直.

②能够在平面内找到一个向量与已知直线的方向向量共线.

③利用共面向量定理,即证明直线的方向向量与平面内的两个不共线向量是共面向量.

(3)证明面面平行的方法:

①转化为线线平行、线面平行处理.

②证明这两个平面的法向量是共线向量.

(4)证明两条直线垂直,只需证明这两条直线的方向向量垂直.

(5)证明线面垂直的方法:

①证明直线的方向向量与平面的法向量是共线向量.

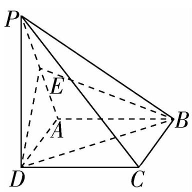
②证明直线的方向向量与平面内的两个不共线的向量互相垂直.

(6)证明面面垂直的方法:

①转化为证明线面垂直.

②证明两个平面的法向量互相垂直.

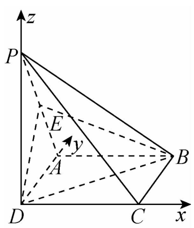
【例2】 如图,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,$PD\perp$平面 $ABCD$,$ABCD$ 是正方形,E 是 PA 的中点,求证:



(1)$PC/\!/$平面 EBD;

(2)平面 $PBC\perp$平面 PCD.

【证明】如图,以 D 为坐标原点,分别以 DC,DA,DP 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系 $Dxyz$.



设 $DC=a$,$PD=b$,则 $D(0,0,0)$,$C(a,0,0)$,$B(a,a,0)$,$P(0,0,b)$,$E\left(0,\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$.

(1)$\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$,$\overrightarrow{DB}=(a,a,0)$.

设平面 EBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{a}{2}y+\frac{b}{2}z=0,\\ ax+ay=0.\end{cases}$

令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=\left(1,-1,\frac{a}{b}\right)$,

因为 $\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=(a,0,-b)\cdot\left(1,-1,\frac{a}{b}\right)=0$,

所以 $\overrightarrow{PC}\perp\boldsymbol{n}$,故 $PC/\!/$平面 EBD.

(2)由题意得平面 PDC 的法向量为 $\overrightarrow{DA}=(0,a,0)$,

又 $\overrightarrow{PB}=(a,a,-b)$,$\overrightarrow{PC}=(a,0,-b)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}ax_1+ay_1-bz_1=0,\\ ax_1-bz_1=0,\end{cases}$

得 $y_1=0$,令 $x_1=1$,则 $z_1=\frac{a}{b}$,所以 $\boldsymbol{m}=\left(1,0,\frac{a}{b}\right)$,

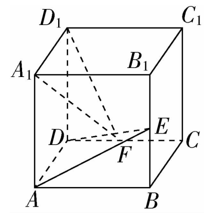
因为 $\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=(0,a,0)\cdot\left(1,0,\frac{a}{b}\right)=0$,

所以 $\overrightarrow{DA}\perp\boldsymbol{m}$,即平面 $PBC\perp$平面 PCD.

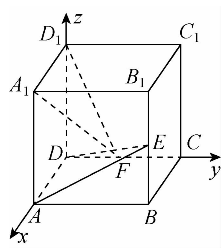
点睛 证明线线、线面、面面平行或垂直的步骤

(1)选点建立空间直角坐标系,并把相应的点用坐标的形式表示出来;(2)把证明线线、线面、面面平行或垂直的相关向量用坐标表示出来;(3)根据线线、线面、面面平行或垂直列式计算;(4)证出结论.

【变式训练2】已知 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,E,F 分别是 BB_1,CD 的中点,求证:平面 $AED\perp$平面 A_1FD_1.



【证明】如图,建立空间直角坐标系 $Dxyz$.设正方体棱长为 1,则



$E\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,$D_1(0,0,1)$,$A(1,0,0)$,$F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.

$\therefore\overrightarrow{DA}=(1,0,0)=\overrightarrow{D_1A_1}$,$\overrightarrow{DE}=\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{D_1F}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$.设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$分别是平面 AED 和 A_1FD_1 的法向量,

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=0,\\ x_1+y_1+\frac{1}{2}z_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=1$,得 $\boldsymbol{m}=(0,1,-2)$.

又由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1A_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1F}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x_2=0,\\ \frac{1}{2}y_2-z_2=0.\end{cases}$

令 $z_2=1$,得 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$.

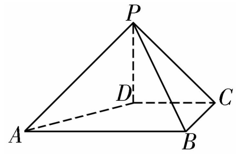
$\because\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(0,1,-2)\cdot(0,2,1)=0$,

$\therefore\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,$\therefore$平面 $AED\perp$平面 A_1FD_1.

要点3 利用空间向量求距离

求点到平面的距离的关键是找到平面的法向量和斜线段对应的向量,然后利用向量的投影求点到平面的距离;直线与平面平行时,直线上任一点到平面的距离为直线与平面的距离;异面直线的距离是夹在两条异面直线之间的公垂线段长.

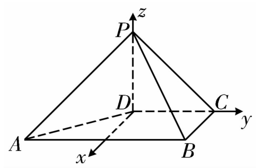
【例 3】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$平面 $ABCD$，$PD=DC=BC=1$，$AB=2$，$AB/\!/DC$，$\angle BCD=90^{\circ}$。



(1)求证：$PC\perp BC$。

(2)求点 A 到平面 PBC 的距离。

【解析】建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$，则 $P(0,0,1)$，$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，



(1)证明：$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，

$\because \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\therefore PC\perp BC$。

(2)设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ -x=0,\end{cases}$

令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$。

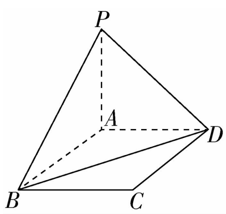
$\because A(1,-1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，

$\therefore$ 点 A 到平面 PBC 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|(0,2,0)\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$。

点睛 求点 A 到平面 PBC 的距离的步骤

第一步：建立空间直角坐标系，并求出平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$；第二步：在平面 PBC 上找一点 B，求出 $\overrightarrow{AB}$；第三步：利用公式 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$ 求距离。

【变式训练 3】如图，设 P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外的一点，直线 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB=3$，$BC=4$，$PA=1$。则点 P 到直线 BD 的距离为 $\underline{\ \dfrac{13}{5}\ }$。



【解析】$|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BD}|=|(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})|=|\overrightarrow{AB}|^2=9$，$|\overrightarrow{BD}|=5$，

$\therefore \overrightarrow{BP}$ 在 $\overrightarrow{BD}$ 上的射影长为 $\dfrac{9}{5}$，又 $\overrightarrow{BP}=\sqrt{10}$，

$\therefore$ 点 P 到直线 BD 的距离 $d=\sqrt{10-\left(\dfrac{9}{5}\right)^2}=\dfrac{13}{5}$。

要点 4 利用空间向量求角

(1)异面直线所成的角：两条异面直线所成的角的范围为 $0^{\circ}<\theta\leqslant 90^{\circ}$，需找到两条异面直线的方向向量，借助方向向量所成角求解。

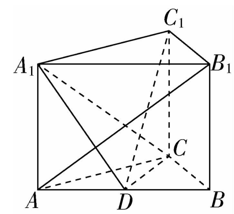
(2)直线与平面所成的角：要求直线 a 与平面 α 所成的角 θ，先求这个平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与直线 a 的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角的余弦值 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle$，再利用公式 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle|$，求 θ。

(3)平面与平面的夹角：对于两个平面 α 与 β，分别作这两个平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$，则平面 α 与 β 的夹角跟法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 所成的角相等或互补。

【例 4】如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=4$，$AC=BC=3$，D 为 AB 的中点。

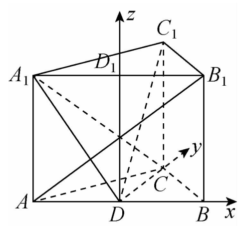
(1)求点 C 到平面 A_1ABB_1 的距离；

(2)若 $AB_1\perp A_1C$，求平面 A_1CD 与平面 C_1CD 夹角的余弦值。



【解析】(1)由 $AC=BC$，D 为 AB 的中点，得 $CD\perp AB$，又 $CD\perp AA_1$，$AA_1\cap AB=A$，故 $CD\perp$平面 A_1ABB_1，所以点 C 到平面 A_1ABB_1 的距离为 $CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{5}$。

(2)如图，过 D 作 $DD_1/\!/AA_1$ 交 A_1B_1 于 D_1，在直三棱柱中，易知 DB，DC，DD_1 两两垂直，以 D 为原点，DB，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $Dxyz$。



设直三棱柱的高为 h，则 $A(-2,0,0)$，$A_1(-2,0,h)$，$B_1(2,0,h)$，$C(0,\sqrt{5},0)$，$C_1(0,\sqrt{5},h)$，从而 $\overrightarrow{AB_1}=(4,0,h)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,\sqrt{5},-h)$，

由 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{A_1C}$，得 $8-h^2=0$，$h=2\sqrt{2}$。

故 $\overrightarrow{DA_1}=(-2,0,2\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{5},0)$。

设平面 A_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DC},\\ \boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DA_1},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{5}y_1=0,\\ -2x_1+2\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,1)$。

设平面 C_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC_1},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{5}y_2=0,\\ \sqrt{5}y_2+2\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$

取 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+1}\times 1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

所以平面 A_1CD 与平面 C_1CD 夹角的平面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

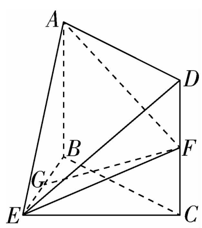
点睛 利用空间向量求角的步骤

(1)建立空间直角坐标系,将题目中给出的条件用坐标表示出来;(2)将所求角涉及的直线的方向向量和平面的法向量求出来;(3)代入公式求出角的三角函数值或角的度数.

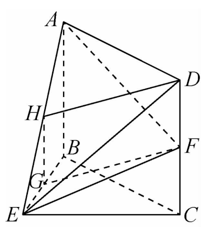
【变式训练 4】 如图,在几何体 $ABCDE$ 中,四边形 $ABCD$ 是矩形,$AB\perp$平面 BEC,$BE\perp EC$,$AB=BE=EC=2$,G,F 分别是线段 BE,DC 的中点.

(1)求证:$GF/\!/$平面 ADE.

(2)求平面 AEF 与平面 BEC 夹角的余弦值.



【解析】 方法一:(1)证明:如图,取 AE 的中点 H,连接 HG,HD,



又 G 是 BE 的中点,

所以 $GH/\!/AB$,且 $GH=\frac{1}{2}AB$.

又 F 是 CD 的中点,所以 $DF=\frac{1}{2}CD$.

由四边形 $ABCD$ 是矩形,得 $AB/\!/CD$,$AB=CD$,

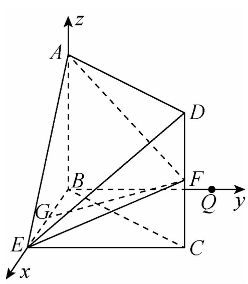
所以 $GH/\!/DF$,且 $GH=DF$,

从而四边形 $HGFD$ 是平行四边形,所以 $GF/\!/DH$.

又 $DH\subset$平面 ADE,$GF\not\subset$平面 ADE,

所以 $GF/\!/$平面 ADE.

(2)解:如图,在平面 BEC 内,



过 B 点作 $BQ/\!/EC$.

因为 $BE\perp CE$,所以 $BQ\perp BE$.

又因为 $AB\perp$平面 BEC,所以 $AB\perp BE$,$AB\perp BQ$.

以 B 为原点,分别以 BE,BQ,BA 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系 $Bxyz$,

则 $A(0,0,2)$,$B(0,0,0)$,$E(2,0,0)$,$F(2,2,1)$.

因为 $AB\perp$平面 BEC,所以 $\overrightarrow{BA}=(0,0,2)$ 为平面 BEC 的法向量.设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 AEF 的法向量.

又 $\overrightarrow{AE}=(2,0,-2)$,$\overrightarrow{AF}=(2,2,-1)$,

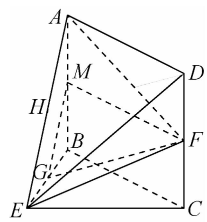
由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x-2z=0,\\ 2x+2y-z=0.\end{cases}$

取 $z=2$,得 $\boldsymbol{n}=(2,-1,2)$.

从而 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BA}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BA}|}=\frac{4}{2\times3}=\frac{2}{3}$,

所以平面 AEF 与平面 BEC 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

方法二:(1)证明:如图,取 AB 中点 M,连接 MG,MF.



又 G 是 BE 的中点,可知 $GM/\!/AE$.

又 $AE\subset$平面 ADE,$GM\not\subset$平面 ADE,

所以 $GM/\!/$平面 ADE.

在矩形 $ABCD$ 中,由 M,F 分别是 AB,CD 的中点得 $MF/\!/AD$.

又 $AD\subset$平面 ADE,$MF\not\subset$平面 ADE.

所以 $MF/\!/$平面 ADE.

又因为 $GM\cap MF=M$,$GM\subset$平面 GMF,$MF\subset$平面 GMF,

所以平面 $GMF/\!/$平面 ADE.

因为 $GF\subset$平面 GMF,所以 $GF/\!/$平面 ADE.

(2)同方法一.

拓展提升

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-2,4,0)$,则 $4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=$ (D)

A. (16,0,4)　　B. (8,−16,4)

C. (8,16,4)　　D. (8,0,4)

【解析】 因为 $4\boldsymbol{a}=(12,-8,4)$,$2\boldsymbol{b}=(-4,8,0)$,所以 $4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(8,0,4)$,故选 D.

2. 若直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$,平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-2,1,1)$,则 (C)

A. $l/\!/\alpha$　　B. $l\perp\alpha$

C. $l\subset\alpha$ 或 $l/\!/\alpha$　　D. l 与 α 斜交

【解析】 因为 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$,$\boldsymbol{n}=(-2,1,1)$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=1\times(-2)+0\times1+2\times1=0$,即 $l\subset\alpha$ 或 $l/\!/\alpha$.故选 C.

3. 已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长都是 2,点 E 是 AD 的中点,则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CE}=$ (A)

A. 1　　B. −1

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

【解析】如图，可知 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}$，

$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}=2\times2\times\cos 60^\circ+2\times1\times\cos 120^\circ=1.$

故选 A.

4. 已知 $A\in\alpha$，$P\notin\alpha$，$\overrightarrow{PA}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\left(0,-\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$，则直线 PA 与平面 α 所成的角为__$\frac{\pi}{3}$__.

【解析】设直线 PA 与平面 α 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PA}||\boldsymbol{n}|}$

$$=\frac{\left|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times0+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+2}\times\sqrt{0+\frac{1}{4}+2}}$$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

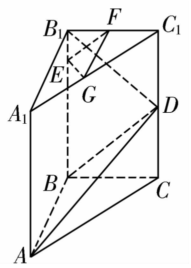
因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

5. 如图所示，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$BC=2$，$CC_1=4$，点 E 在线段 BB_1 上，且 $EB_1=1$，D，F，G 分别为 CC_1，C_1B_1，C_1A_1 的中点.

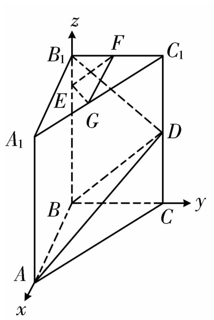
(1)求证：$B_1D\perp$平面 ABD.

(2)求证：平面 EGF//平面 ABD.

(3)求平面 EGF 与平面 ABD 的距离.



【证明】建立空间直角坐标系.



设 $AB=a$，则 $B_1(0,0,4)$，$F(0,1,4)$，$E(0,0,3)$，$A(a,0,0)$，$B(0,0,0)$，$D(0,2,2)$，$G\left(\frac{a}{2},1,4\right)$.

(1)$\overrightarrow{B_1D}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,0,0)$，$\overrightarrow{BD}=(0,2,2)$，

则 $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

$\therefore B_1D\perp AB$，$B_1D\perp BD$.

又 $AB\cap BD=B$，

$\therefore B_1D\perp$平面 ABD.

(2)证明：$\overrightarrow{EG}=\left(\frac{a}{2},1,1\right)$，$\overrightarrow{EF}=(0,1,1)$，

$\therefore \overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{EG}=0$，$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，

$\therefore B_1D\perp EG$，$B_1D\perp EF$，

又 $EG\cap EF=E$，

$\therefore B_1D\perp$平面 EGF，

又$\because B_1D\perp$平面 ABD，

$\therefore$平面 EGF//平面 ABD.

(3)由(1)(2)可知 $\overrightarrow{BF}=(0,1,4)$，$\overrightarrow{B_1D}=(0,2,-2)$是平面 ABD 的法向量，

$\therefore \overrightarrow{BF}$ 在 B_1D 上的投影长$=\left|\frac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{B_1D}}{|\overrightarrow{B_1D}|}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$点 F 到平面 ABD 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

由(2)知平面 EGD 与平面 ABD 的距离等于点 F 到平面 ABD 的距离，

$\therefore$平面 EGF 与平面 ABD 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十)

课后作业 · 单独成册

第二章 直线和圆的方程

一、课标导向

课标要求

1. 直线与方程

(1)在平面直角坐标系中,结合具体图形,探索确定直线位置的几何要素.

(2)理解直线的倾斜角和斜率的概念,经历用代数方法刻画直线斜率的过程,掌握过两点的直线斜率的计算公式.

(3)能根据斜率判定两条直线平行或垂直.

(4)根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式).

(5)能用解方程组的方法求两条直线的交点坐标.

(6)探索并掌握平面上两点间的距离公式、点到直线的距离公式,会求两条平行直线间的距离.

2. 圆与方程

(1)回顾确定圆的几何要素,在平面直角坐标系中,探索并掌握圆的标准方程与一般方程.

(2)能根据给定直线、圆的方程,判断直线与圆、圆与圆的位置关系.

(3)能用直线和圆的方程解决一些简单的数学问题与实际问题.

知识网络

- 直线和圆的方程
  - 直线
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程
      - 点斜式方程 — 斜截式方程
      - 两点式方程 — 截距式方程
      - 一般式方程
    - 两条直线的位置关系
      - 两条直线相交的条件 — 两条直线的交点
      - 两条直线平行、重合的条件 — 两条平行直线间的距离
      - 两条直线垂直的条件
    - 点到直线的距离
  - 圆
    - 圆的方程
      - 圆的标准方程
      - 圆的一般方程
    - 直线与圆、圆与圆的位置关系

二、精讲精练

2.1　直线的倾斜角与斜率

第1课时　倾斜角与斜率

学习目标	核心素养
1. 理解直线的倾斜角和斜率的概念.(重点) 2. 理解直线斜率的几何意义,掌握倾斜角与斜率的对应关系.(重点) 3. 掌握过两点的直线的斜率公式.(重点) 4. 掌握直线的倾斜角与斜率的对应关系在解题中的应用.(难点)	1. 通过直线的倾斜角与斜率概念的学习,培养数学抽象素养. 2. 借助掌握倾斜角与斜率的关系,提升数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 直线的倾斜角的定义

当直线 l 与 x 轴相交时,我们以 x 轴为基准,x 轴正向与直线 l 向上的方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角.

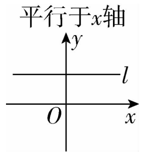
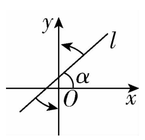
2. 直线的倾斜角的取值范围

直线的倾斜角 α 的取值范围是<u>$0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$</u>,并规定与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为<u>0°</u>.

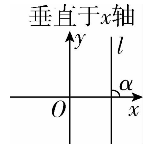
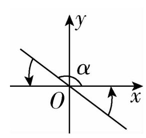
3. 直线的斜率的定义

一条直线的倾斜角 $\alpha(\alpha \neq 90^\circ)$ 的正切值叫做这条直线的斜率.斜率常用小写字母 k 表示,即<u>$k=\tan\alpha$</u>.

4. 倾斜角 α 与斜率 k 的关系

直线情况	α 的大小	k 的范围	k 的增减情况
平行于x轴 	0°	$k=0$	—
	$0^\circ<\alpha<90^\circ$	$k>0$	k 随 α 的增大而增大

续表

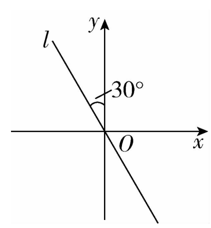
直线情况	α 的大小	k 的范围	k 的增减情况
垂直于x轴 	90°	不存在	—
	$90^\circ<\alpha<180^\circ$	$k<0$	k 随 α 的增大而增大

5. 直线的斜率的坐标公式

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$ 的直线的斜率公式是 $k=$<u>$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$</u>.

小试牛刀

1. 如图所示,直线 l 的倾斜角为　　　　(C)



A. 30°　　　　B. 60°

C. 120°　　　　D. 以上都不对

【解析】根据倾斜角的定义知，直线 l 的倾斜角为 $30°+90°=120°$.

2. 已知直线 l 过点 $M(-\sqrt{3},\sqrt{2})$，$N(-\sqrt{2},\sqrt{3})$，则 l 的斜率为 (B)

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\sqrt{6}$

【解析】根据题意，l 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-(-\sqrt{3})}=1$.

3. 斜率不存在的直线一定是 (B)

A. 过原点的直线　　B. 垂直于 x 轴的直线

C. 垂直于 y 轴的直线　　D. 不垂直于坐标轴的直线

【解析】只有直线垂直于 x 轴时，其倾斜角为 $90°$，斜率不存在.

4. 已知三点 $A(a,2)$，$B(3,7)$，$C(-2,-9a)$在同一条直线上，则实数 a 的值为 2 或 $\frac{2}{9}$.

【解析】∵A，B，C 三点共线，∴$k_{AB}=k_{BC}$，即 $\frac{5}{3-a}=\frac{9a+7}{5}$，

∴$a=2$ 或 $\frac{2}{9}$.

互动课堂

合作探究

探究 1 直线的倾斜角

【例 1】设直线 l 过坐标原点，它的倾斜角为 α，如果将 l 绕坐标原点按逆时针方向旋转 $45°$，得到直线 l_1，那么 l_1 的倾斜角为 (D)

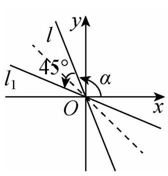
A. $\alpha+45°$

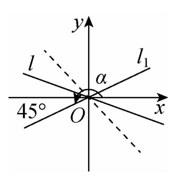
B. $\alpha-135°$

C. $135°-\alpha$

D. 当 $0°\leqslant\alpha<135°$时，倾斜角为 $\alpha+45°$；当 $135°\leqslant\alpha<180°$时，倾斜角为 $\alpha-135°$

【解析】根据题意，画出图形，如图所示：





因为 $0°\leqslant\alpha<180°$，显然 A，B，C 未分类讨论，均不全面，不合题意.

通过画图(如图所示)可知：

当 $0°\leqslant\alpha<135°$时，l_1 的倾斜角为 $\alpha+45°$；

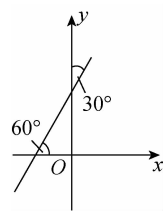
当 $135°\leqslant\alpha<180°$时，l_1 的倾斜角为 $45°+\alpha-180°=\alpha-135°$. 故选 D.

点睛 (1)要注意根据倾斜角的概念及倾斜角的取值范围解答本题.

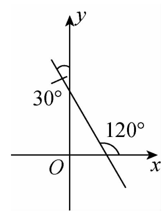
(2)求直线的倾斜角主要根据定义来求，其关键是根据题意画出图形，找准倾斜角，有时要根据情况分类讨论.

【变式训练 1】已知直线 l 向上方向与 y 轴正向所成的角为 $30°$，则直线 l 的倾斜角为 $60°$ 或 $120°$.

【解析】有两种情况：(1)如图①，直线 l 向上方向与 x 轴正向所成的角为 $60°$，即直线 l 的倾斜角为 $60°$.



图①



图②

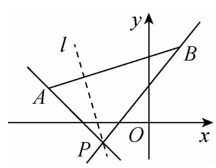
(2)如图②，直线 l 向上方向与 x 轴正向所成的角为 $120°$，即直线 l 的倾斜角为 $120°$.

探究 2 直线的斜率

【例 2】已知直线 l 过点 $P(-2,-1)$，且与以 $A(-4,2)$，$B(1,3)$为端点的线段相交，求直线 l 的斜率的取值范围.

【解析】根据题中的条件可画出图形，如图所示，由已知得直线 PA 的斜率 $k_{PA}=-\frac{3}{2}$，直线 PB 的斜率 $k_{PB}=\frac{4}{3}$，结合图形可知当直线 l 由 PB 变化到与 y 轴平行的位置时，它的倾斜角逐渐增大到 $90°$，故斜率的取值范围为 $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$，当直线 l 由与 y 轴平行的位置变化到 PA 位置时，它的倾斜角由 $90°$增大到 PA 的倾斜角，故斜率的变化范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$.

综上可知，直线 l 的斜率的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$.



点睛 (1)由倾斜角(或范围)求斜率(或范围)，利用定义式 $k=\tan\alpha(\alpha\neq90°)$求解.

(2)由两点坐标求斜率，利用斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$求解.

(3)涉及直线与线段有交点的问题，常数形结合利用公式求解.

【变式训练 2】已知直线 l_1,l_2,l_3 都经过点 $P(3,2)$，且 l_1,l_2,l_3 分别经过点 $Q_1(-2,-1)$，$Q_2(4,-2)$，$Q_3(-3,2)$，计算直线 l_1,l_2,l_3 的斜率，并判断这些直线的倾斜角是锐角、钝角还是 $0°$.

【解析】设 k_1,k_2,k_3 分别表示直线 l_1,l_2,l_3 的斜率.

由于 Q_1,Q_2,Q_3 的横坐标与点 P 的横坐标均不相等，

所以 $k_1=\frac{-1-2}{-2-3}=\frac{3}{5}$，$k_2=\frac{-2-2}{4-3}=-4$，$k_3=\frac{2-2}{-3-3}=0$.

由 $k_1>0$ 知，直线 l_1 的倾斜角为锐角；由 $k_2<0$ 知，直线 l_2 的倾斜角为钝角；由 $k_3=0$ 知，直线 l_3 的倾斜角为 $0°$.

探究 3 斜率公式的应用

【例 3】(1)已知 $A(1,1)$，$B(3,5)$，$C(a,7)$，$D(-1,b)$ 四点在同一条直线上，求直线的斜率 k 及 a,b 的值.

(2)设直线 l 过点 $A(6,12)$，$B(m,13)$，求直线 l 的斜率 k 及倾斜角 α 的取值范围.

(3)已知实数 x,y 满足 $y=-2x+8$，且 $2\leqslant x\leqslant 3$，求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值.

【解析】(1)由题意可知 $k_{AB}=\frac{5-1}{3-1}=2$，

$k_{AC}=\frac{7-1}{a-1}=\frac{6}{a-1}$，$k_{AD}=\frac{b-1}{-1-1}=\frac{b-1}{-2}$.

因为 A,B,C,D 四点在同一条直线上，

所以 $k=2=\frac{6}{a-1}=\frac{b-1}{-2}$，

解得 $a=4$，$b=-3$，

所以直线的斜率 $k=2$，$a=4$，$b=-3$.

(2)①当 $m=6$ 时，直线 l 与 x 轴垂直，斜率不存在，倾斜角 $\alpha=90°$.

②当 $m\neq 6$ 时，$k=\frac{13-12}{m-6}=\frac{1}{m-6}$.

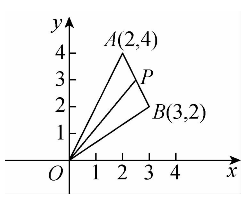
当 $m>6$ 时，$\frac{1}{m-6}>0$，即 $k>0$，

所以直线 l 的倾斜角的取值范围是 $(0°,90°)$；

当 $m<6$ 时，$\frac{1}{m-6}<0$，即 $k<0$，

所以直线 l 的倾斜角的取值范围是 $(90°,180°)$.

(3)如图所示，由于点 (x,y) 满足关系式 $2x+y=8$，且 $2\leqslant x\leqslant 3$，可知点 $P(x,y)$ 在线段 AB 上移动，并且 A,B 两点的坐标可分别求得为 $(2,4)$，$(3,2)$.



由于 $\frac{y}{x}$ 的几何意义是直线 OP 的斜率，

且 $k_{OA}=2$，$k_{OB}=\frac{2}{3}$，

所以可求得 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 2，最小值为 $\frac{2}{3}$.

点睛 (1)斜率公式表明直线相对于 x 轴的倾斜程度，通过直线上任意两点的坐标表示斜率，比使用几何方法求出倾斜角，再求斜率的方法简便.

(2)斜率公式中要求 $x_1\neq x_2$，则当两点的坐标中含有参数时，要注意分类讨论的必要性.

(3)斜率公式与两点的顺序无关，即两点的横、纵坐标在公式中的前后顺序可以同时颠倒，即 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

(4)对于给定坐标的三个点，要判断三点是否共线，先判断任意两点所确定的直线的斜率是否存在：①若都不存在，则三点共线；②若斜率存在，且三点中任意两点所确定的直线的斜率相等，则三点共线.

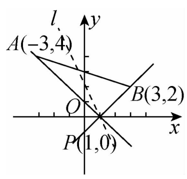
(5)由斜率相等且过同一点可推出三点共线，但三点共线时任意两点的连线的斜率不一定相等，还可能斜率不存在.

【变式训练 3】已知两点 $A(-3,4)$，$B(3,2)$，过点 $P(1,0)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点.

(1)求直线 l 的斜率 k 的取值范围；

(2)求直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.

【解析】如图所示，由题意可知 $k_{PA}=\frac{4-0}{-3-1}=-1$，$k_{PB}=\frac{2-0}{3-1}=1$，



(1)要使直线 l 与线段 AB 有公共点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $k\leqslant -1$，或 $k\geqslant 1$.

即斜率 k 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(2)由题意可知，直线 l 的倾斜角介于直线 PB 与直线 PA 的倾斜角之间，又直线 PB 的倾斜角是 $45°$，直线 PA 的倾斜角是 $135°$，所以 α 的取值范围是 $[45°,135°]$.

随堂小练

1. 下列说法正确的是　（ D ）

A. 直线和 x 轴的正方向所成的正角，叫做这条直线的倾斜角

B. 直线的倾斜角 α 的取值范围是 $[0°,180°]$

C. 与 x 轴平行的直线的倾斜角为 $180°$

D. 每一条直线都存在倾斜角，但并非每一条直线都存在斜率

【解析】直线的倾斜角为直线向上的方向与 x 轴的正方向所成的角，故 A 不正确；直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$，故 B 不正确；和 x 轴平行的直线，它的倾斜角为 $0°$，故 C 不正确. 只有 D 正确.

2. 已知经过两点 $A(2,1)$，$B(1,m)$ 的直线 l 的倾斜角为锐角，则 m 的取值范围是 （ A ）

A. $m<1$　　B. $m>1$

C. $m\leqslant1$　　D. $m\geqslant1$

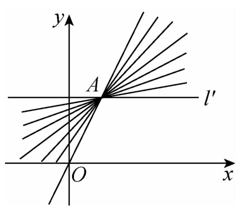
【解析】$k=\frac{m-1}{-1}>0$，$m-1<0$，得 $m<1$.

3. 已知直线 l 过点 $A(1,2)$，且不过第四象限，则直线 l 的斜率 k 的最大值是 （ D ）

A. 0　　B. 1

C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

【解析】如图，$k_{OA}=2$，$k_{l'}=0$，只有当直线落在图中所示位置时才符合题意，故 $k\in[0,2]$，故直线 l 的斜率 k 的最大值为 2.



4. 已知点 $A(1,2)$，若在坐标轴上有一点 P，使直线 PA 的倾斜角为 $135°$，则点 P 的坐标为__(3,0)或(0,3)__.

【解析】由题意知 $k_{PA}=-1$，若点 P 在 x 轴上，则设 $P(m,0)$，则 $\frac{0-2}{m-1}=-1$，解得 $m=3$；

若点 P 在 y 轴上，则设 $P(0,n)$，则 $\frac{n-2}{0-1}=-1$，解得 $n=3$.

故点 P 的坐标为 $(3,0)$ 或 $(0,3)$.

5. 已知直线 l 的斜率 $k=-2$，$A(5,-3)$，$B(4,x)$，$C(-1,y)$ 是这条直线上的三点，则 $x=$__-1__，$y=$__9__.

【解析】$\because k_{AB}=k_{AC}=-2$，

$\therefore \frac{x+3}{4-5}=-2$，得 $x=-1$，$\frac{y+3}{-1-5}=-2$，得 $y=9$.

6. 已知交于点 $M(8,6)$ 的四条直线 l_1,l_2,l_3,l_4 的倾斜角之比为 $1:2:3:4$，又知 l_2 过点 $N(5,3)$，求这四条直线的倾斜角.

【解析】因为 $k_2=k_{MN}=\frac{6-3}{8-5}=1$，

所以 l_2 的倾斜角为 $45°$，

又 l_1,l_2,l_3,l_4 的倾斜角之比为 $1:2:3:4$，

故这四条直线的倾斜角分别为 $22.5°,45°,67.5°,90°$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十一）

课后作业 · 单独成册

第2课时　两条直线平行和垂直的判定

学习目标	核心素养
1. 了解用代数方法研究几何问题. 2. 掌握两条直线相交、平行、垂直、重合等位置关系的判断方法.(重点) 3. 能用方程思想判断两条直线的位置关系.(难点)	1. 通过学习判断两条直线位置关系的方法,培养逻辑推理素养. 2. 借助两条直线平行和垂直的判定,培养数学运算素养.

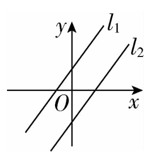
自主预习

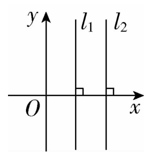
知新预学

1. 两条直线平行与斜率的关系

(1)如图①,设两条不重合的直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1,k_2,若 $l_1 /\!/ l_2$,则__$k_1=k_2$__;反之,若 $k_1=k_2$,则__$l_1 /\!/ l_2$__.

(2)如图②,若两条不重合的直线的斜率不存在,则这两条直线也平行.

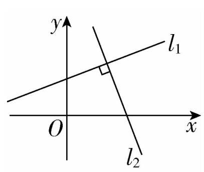

图①

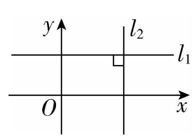

图②

2. 两条直线垂直与斜率的关系

(1)如图③,如果两条直线都有斜率,且它们互相垂直,那么它们的斜率之积等于__-1__;反之,如果两条直线的斜率之积等于__-1__,那么它们互相垂直. 即设两条直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2,则__$l_1 \perp l_2$__$\Leftrightarrow$__$k_1k_2=-1$__.

(2)如图④,若 l_1 与 l_2 中的一条直线的斜率不存在,另一条直线的斜率为零,则 l_1 与 l_2 的位置关系是垂直.


图③


图④

小试牛刀

1. 已知 $A(2,0)$,$B(3,3)$,直线 $l /\!/ AB$,则直线 l 的斜率 $k=$ 　　(B)

A. -3　　B. 3

C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

【解析】因为 $k=k_{AB}=\frac{3-0}{3-2}=3$,所以 l 的斜率为 3.

2. 已知直线 l_1, l_2 的斜率是方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根,则 l_1 与 l_2 的位置关系是 　　(D)

A. 平行　　B. 重合

C. 相交但不垂直　　D. 垂直

【解析】设两直线的斜率分别为 k_1, k_2,则 $k_1k_2=-1$,故 l_1 与 l_2 垂直.

3. 已知 l_1 过点 $A(m,1)$,$B(-3,4)$,l_2 过点 $C(0,2)$,$D(1,1)$,且 $l_1 /\!/ l_2$,则 $m=$__0__.

【解析】$\because l_1 /\!/ l_2$,且 $k_2=\frac{1-2}{1-0}=-1$,

$\therefore k_1=\frac{4-1}{-3-m}=-1$,$\therefore m=0$.

4. 已知经过点 $P(-2,-1)$,$Q(3,a)$的直线与倾斜角为 $45°$的直线垂直,则 $a=$__-6__.

【解析】由题意知 $\frac{a-(-1)}{3-(-2)}=-1$,所以 $a=-6$.

互动课堂

合作探究

探究1　两条直线平行的判定

【例1】根据下列给定的条件,判断直线 l_1 与直线 l_2 是否平行:

(1)l_1 经过点 $A(2,1)$,$B(-3,5)$,l_2 经过点 $C(3,-3)$,$D(8,-7)$;

(2)l_1 经过点 $E(0,1)$,$F(-2,-1)$,l_2 经过点 $G(3,4)$,$H(2,3)$;

(3)l_1 的倾斜角为 $60°$,l_2 经过点 $M(1,\sqrt{3})$,$N(-2,-2\sqrt{3})$;

(4)l_1 平行于 y 轴,l_2 经过点 $P(0,-2)$,$Q(0,5)$.

【解析】(1)由题意知,$k_1=\frac{5-1}{-3-2}=-\frac{4}{5}$,$k_2=\frac{-7+3}{8-3}=-\frac{4}{5}$,所以直线 l_1 与直线 l_2 平行或重合,

又 $k_{BC}=\frac{5-(-3)}{-3-3}=-\frac{4}{3}\neq-\frac{4}{5}$,故 $l_1 /\!/ l_2$.

(2)由题意知,$k_1=\frac{-1-1}{-2-0}=1$,$k_2=\frac{3-4}{2-3}=1$,所以直线 l_1

与直线 l_2 平行或重合，$k_{FG}=\frac{4-(-1)}{3-(-2)}=1$，故直线 l_1 与直线 l_2 重合.

(3)由题意知，$k_1=\tan 60°=\sqrt{3}$，$k_2=\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2-1}=\sqrt{3}$，$k_1=k_2$，所以直线 l_1 与直线 l_2 平行或重合.

(4)由题意知 l_1 的斜率不存在，且不是 y 轴，l_2 的斜率也不存在，恰好是 y 轴，所以 $l_1/\!/l_2$.

点睛 (1)判断两条直线是否平行，应首先看两条直线的斜率是否存在，即先看一条直线上的两点的横坐标是否相等，横坐标相等是特殊情况，应特殊判断. 在证明两条直线平行时，要区分平行与重合，因为斜率相等也可能推出两条直线重合，所以必须强调不重合才能确定平行.

(2)应用两条直线平行求参数值时，应分斜率存在与不存在两种情况求解.

【变式训练 1】 已知 $P(-2,m)$，$Q(m,4)$，$M(m+2,3)$，$N(1,1)$，若直线 $PQ/\!/MN$，求 m 的值.

【解析】 当 $m=-2$ 时，直线 PQ 的斜率不存在，而直线 MN 的斜率存在，MN 与 PQ 不平行，不合题意；

当 $m=-1$ 时，直线 MN 的斜率不存在，而直线 PQ 的斜率存在，MN 与 PQ 不平行，不合题意；

当 $m\neq-2$ 且 $m\neq-1$ 时，

$k_{PQ}=\frac{4-m}{m-(-2)}=\frac{4-m}{m+2}$，

$k_{MN}=\frac{3-1}{m+2-1}=\frac{2}{m+1}$.

因为直线 $PQ/\!/$直线 MN，所以 $k_{PQ}=k_{MN}$，

即 $\frac{4-m}{m+2}=\frac{2}{m+1}$，解得 $m=0$ 或 $m=1$.

当 $m=0$ 或 1 时，由图形知，两直线不重合.

综上，m 的值为 0 或 1.

探究 2 两条直线垂直的判定

【例 2】 (1)已知直线 l_1 经过点 $A(3,2)$，$B(3,-1)$，直线 l_2 经过点 $M(1,1)$，$N(2,1)$，判断 l_1 与 l_2 是否垂直.

(2)已知直线 l_1 经过点 $A(3,a)$，$B(a-2,3)$，直线 l_2 经过点 $C(2,3)$，$D(-1,a-2)$，若 $l_1\perp l_2$，求 a 的值.

【解析】 (1)直线 l_1 的斜率不存在，直线 l_2 的斜率为 0，所以 $l_1\perp l_2$.

(2)由题意，知 l_2 的斜率 k_2 一定存在，l_1 的斜率可能不存在.

当 l_1 的斜率不存在时，$3=a-2$，即 $a=5$，此时 $k_2=0$，

则 $l_1\perp l_2$，满足题意.

当 l_1 的斜率 k_1 存在时，$a\neq5$，

由斜率公式，得

$k_1=\frac{3-a}{a-2-3}=\frac{3-a}{a-5}$，$k_2=\frac{a-2-3}{-1-2}=\frac{a-5}{-3}$.

由 $l_1\perp l_2$，知 $k_1k_2=-1$，

即 $\frac{3-a}{a-5}\times\left(\frac{a-5}{-3}\right)=-1$，解得 $a=0$.

综上所述，a 的值为 0 或 5.

点睛 利用斜率公式判断两条直线是否垂直的方法

(1)一看：就是看其中一条直线经过的两点的横坐标是否相等，若相等，则直线的斜率不存在. 再看另一条直线上的两点的纵坐标是否相等，若相等，则两条直线垂直；若不相等，则进行下一步.

(2)二代：就是将点的坐标代入斜率公式.

(3)求值：计算斜率的值，进行判断. 尤其是当点的坐标中含有参数时，要对参数进行讨论.

提醒：若已知点的坐标含有参数，利用两条直线的垂直关系求参数值时，要注意讨论斜率不存在的情况.

【变式训练 2】 已知直线 l_1 的斜率为 $k_1=\frac{3}{4}$，直线 l_2 经过点 $A(3a,-2)$，$B(0,a^2+1)$，且 $l_1\perp l_2$，则实数 $a=$__1 或 3__.

【解析】 $\because l_1\perp l_2$，且 $k_1=\frac{3}{4}$，

$\therefore k_{AB}=-\frac{4}{3}$，

即 $\frac{a^2+1-(-2)}{0-3a}=-\frac{4}{3}$，即 $a^2-4a+3=0$，

解得 $a=1$ 或 $a=3$.

探究 3 直线平行与垂直的综合应用

【例 3】 在平面直角坐标系中，四边形 $OPQR$ 的顶点坐标按逆时针顺序依次为 $O(0,0)$，$P(1,t)$，$Q(1-2t,2+t)$，$R(-2t,2)$，其中 $t>0$. 试判断四边形 $OPQR$ 的形状.

【解析】 由斜率公式得 $k_{OP}=\frac{t-0}{1-0}=t$，

$k_{QR}=\frac{2-(2+t)}{-2t-(1-2t)}=\frac{-t}{-1}=t$，

$k_{OR}=\frac{2-0}{-2t-0}=-\frac{1}{t}$，

$k_{PQ}=\frac{2+t-t}{1-2t-1}=\frac{2}{-2t}=-\frac{1}{t}$.

所以 $k_{OP}=k_{QR}$，$k_{OR}=k_{PQ}$，

从而 $OP/\!/QR$，$OR/\!/PQ$.

所以四边形 $OPQR$ 为平行四边形.

又 $k_{OP}\cdot k_{OR}=-1$，所以 $OP\perp OR$，

故四边形 $OPQR$ 为矩形.

点睛(1)利用两条直线平行或垂直判断几何图形的形状的步骤

描点 → 在坐标系中描出给定的点

猜测 → 根据描出的点，猜测图形的形状

求斜率 → 若斜率不存在，则直接说明情况；若斜率存在，则根据给定的点的坐标，求直线的斜率

结论 → 由斜率之间的关系，判断形状

(2)判断几何图形形状的注意点

①在顶点确定的前提下，判断几何图形的形状时，要先画图，猜测其形状，以明确证明的目标.

②证明两条直线平行时，仅仅有 $k_1=k_2$ 是不够的，还要注意排除两条直线重合的情况.

③判断四边形的形状时，要依据四边形的特点.

【变式训练3】已知矩形 $OPQR$ 中的三个顶点按逆时针顺序依次为 $O(0,0)$，$P(1,t)$，$Q(1-2t,2+t)$，试求顶点 R 的坐标.

【解析】因为 $OPQR$ 为矩形，所以 OQ 的中点也是 PR 的中点，

设 $R(x,y)$，则由中点坐标公式知 $\begin{cases}\dfrac{0+1-2t}{2}=\dfrac{1+x}{2},\\ \dfrac{0+2+t}{2}=\dfrac{t+y}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-2t,\\ y=2.\end{cases}$ 所以 R 点的坐标是 $(-2t,2)$.

随堂小练

1. 过点 $(\sqrt{3},\sqrt{6})$，$(0,3)$ 的直线与过点 $(\sqrt{6},\sqrt{2})$，$(2,0)$ 的直线的位置关系为 (A)

A. 垂直　　B. 平行

C. 重合　　D. 以上都不正确

【解析】过点 $(\sqrt{3},\sqrt{6})$，$(0,3)$ 的直线的斜率 $k_1=\dfrac{\sqrt{6}-3}{\sqrt{3}-0}=\sqrt{2}-\sqrt{3}$；过点 $(\sqrt{6},\sqrt{2})$，$(2,0)$ 的直线的斜率 $k_2=\dfrac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{6}-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$. 因为 $k_1k_2=-1$，所以两条直线垂直.

2. 已知直线 l_1 的倾斜角为 $60°$，直线 l_2 的斜率为 $m^2+\sqrt{3}-4$，若 $l_1/\!/l_2$，则 m 的值为__±2__.

【解析】由题意得 $m^2+\sqrt{3}-4=\tan 60°$，解得 $m=\pm2$.

3. 求当 m 为何值时，过两点 $A(1,1)$，$B(2m^2+1,m-2)$ 的直线：

(1)倾斜角为 $135°$；

(2)与过 $(3,2)$，$(0,-7)$ 两点的直线垂直；

(3)与过 $(2,-3)$，$(-4,9)$ 两点的直线平行.

【解析】(1)由 $k_{AB}=\dfrac{m-3}{2m^2}=\tan 135°=-1$，

解得 $m=-\dfrac{3}{2}$ 或 $m=1$.

(2)由 $k_{AB}=\dfrac{m-3}{2m^2}$，且 $\dfrac{-7-2}{0-3}=3$.

则 $\dfrac{m-3}{2m^2}=-\dfrac{1}{3}$，解得 $m=\dfrac{3}{2}$ 或 $m=-3$.

(3)令 $\dfrac{m-3}{2m^2}=\dfrac{9+3}{-4-2}=-2$，解得 $m=\dfrac{3}{4}$ 或 $m=-1$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十二)

课后作业·单独成册

2.2 直线的方程

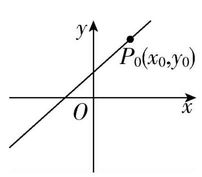
第 1 课时 直线的点斜式方程

学习目标	核心素养
1. 掌握直线的点斜式方程和直线的斜截式方程.(重点) 2. 结合具体实例理解直线的方程的概念及直线在 y 轴上的截距的含义.(重点、难点)	1. 通过直线的点斜式和斜截式方程的学习，培养数学抽象素养. 2. 通过直线的点斜式和斜截式方程适用范围的学习，提升逻辑推理和数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 直线的点斜式方程

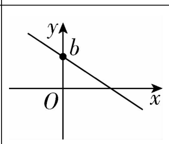
名称	已知条件	示意图	方程	使用范围
点斜式	点 $P_0(x_0,y_0)$ 和直线的斜率 k		$y-y_0=k(x-x_0)$	斜率存在的直线

2. 直线 $l:y=kx+b$ 在坐标轴上的截距

(1)直线 l 在 y 轴上的截距：直线 l 与 y 轴的交点 $(0,b)$ 的__纵坐标 b__.

(2)直线 l 在 x 轴上的截距：直线 l 与 x 轴的交点 $(a,0)$ 的横坐标 a.

3. 直线的斜截式方程

名称	已知条件	示意图	方程	使用范围
斜截式	直线的斜率 k 和它在 y 轴上的截距 b		$y=kx+b$	斜率存在的直线

小试牛刀

1. 已知直线的方程是 $y+2=-x-1$，则 (D)

A. 直线经过点 $(2,-1)$，斜率为 -1

B. 直线经过点 $(1,-2)$，斜率为 -1

C. 直线经过点 $(-2,-1)$，斜率为 1

D. 直线经过点 $(-1,-2)$，斜率为 -1

【解析】直线的方程是 $y+2=-x-1$，所以 $y-(-2)=-[x-(-1)]$，由点斜式方程可知直线过点 $(-1,-2)$，斜率为 -1，故选 D.

2. 过点 $(4,-2)$，倾斜角为 $150°$ 的直线的点斜式方程为 (B)

A. $y-2=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$

B. $y-(-2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$

C. $y-(-2)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$

D. $y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$

【解析】由题意知 $k=\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线的点斜式方程为 $y-(-2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$.

3. 已知直线 l 的斜率为 -1，且它与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}$，则直线 l 的方程为__$y=-x+1$ 或 $y=-x-1$__.

【解析】设 l 的方程为 $y=-x+b$，则它与两个坐标轴的交点为 $A(b,0)$ 和 $B(0,b)$，所以 Rt$\triangle OAB$ 的两个直角边长都为 $|b|$，所以其面积为 $\frac{1}{2}b^2$，由 $\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}$ 解得 $b=\pm1$，所以所求直线的方程为 $y=-x+1$ 或 $y=-x-1$.

4. 已知直线 l 过点 $P(2,1)$，且直线 l 的斜率为直线 $x-4y+3=0$ 的斜率的 2 倍，则直线 l 的方程为__$x-2y=0$__.

【解析】由 $x-4y+3=0$，得 $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$，其斜率为 $\frac{1}{4}$，故所求直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$，又直线 l 过点 $P(2,1)$，所以直线 l 的方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x-2y=0$.

互动课堂

合作探究

探究 1 直线的点斜式方程

【例 1】求满足下列条件的直线的点斜式方程：

(1)过点 $P(-4,3)$,斜率 $k=-3$;

(2)过点 $P(3,-4)$,且与 x 轴平行;

(3)过 $P(-2,3)$,$Q(5,-4)$两点.

【解析】(1)∵直线过点 $P(-4,3)$,斜率 $k=-3$,

由直线方程的点斜式得直线方程为 $y-3=-3(x+4)$.

(2)与 x 轴平行的直线,其斜率 $k=0$,由直线方程的点斜式可得直线方程为 $y-(-4)=0\times(x-3)$,即 $y+4=0$.

(3)过点 $P(-2,3)$,$Q(5,-4)$的直线的斜率

$k_{PQ}=\frac{-4-3}{5-(-2)}=\frac{-7}{7}=-1$.

又∵直线过点 $P(-2,3)$,$Q(5,-4)$,

∴直线的点斜式方程为 $y-3=-(x+2)$.或 $y+4=-(x-5)$.

点睛 (1)求直线的点斜式方程的步骤:定点$(x_0,y_0)\to$定斜率 $k\to$写出方程 $y-y_0=k(x-x_0)$.

(2)点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$可表示过点 $P_0(x_0,y_0)$的所有直线,但 $x=x_0$ 除外.

【变式训练1】(1)经过点$(-3,1)$且平行于 y 轴的直线方程为__$x=-3$__.

(2)已知直线 l_1 过点 $A(-1,-2)$,其倾斜角等于直线 $l_2:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角的2倍,则 l_1 的点斜式方程为__$y+2=\sqrt{3}(x+1)$__.

【解析】(1)∵直线与 y 轴平行,

∴该直线斜率不存在,∴直线方程为 $x=-3$.

(2)∵直线 l_2 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,

设其倾斜角为 α,则 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$得 $\alpha=30°$,

那么直线 l_1 的倾斜角为 $2\times30°=60°$,

则 l_1 的点斜式方程为 $y+2=\tan 60°(x+1)$,

即 $y+2=\sqrt{3}(x+1)$.

探究2 直线的斜截式方程

【例2】根据条件写出下列直线的斜截式方程:

(1)斜率为2,在 y 轴上的截距是5;

(2)倾斜角为150°,在 y 轴上的截距是-2;

(3)倾斜角为60°,与 y 轴的交点到坐标原点的距离是3.

【解析】(1)由直线方程的斜截式可知,

所求直线方程为 $y=2x+5$.

(2)∵倾斜角 $\alpha=150°$,∴斜率 $k=\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由直线方程的斜截式可得方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$.

(3)∵直线的倾斜角为60°,

∴其斜率 $k=\tan 60°=\sqrt{3}$,

∵直线与 y 轴的交点到原点的距离为3,

∴直线在 y 轴上的截距 $b=3$ 或 $b=-3$.

∴所求直线方程为 $y=\sqrt{3}x+3$ 或 $y=\sqrt{3}x-3$.

点睛 (1)本例第(3)小题在求解过程中,常因混淆截距与距离的概念,而漏掉解"$y=\sqrt{3}x-3$".

(2)截距是直线与 x 轴(或 y 轴)交点的横(或纵)坐标,它是个数值,可正、可负、可为零.

【变式训练2】已知直线 l 的斜率为$\frac{1}{6}$,且与两坐标轴围成面积为3的三角形,求 l 的斜截式方程.

【解析】设直线方程为 $y=\frac{1}{6}x+b$,则 $x=0$ 时,$y=b$;$y=0$ 时,$x=-6b$.由已知可得$\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|-6b|=3$,即 $6|b|^2=6$,所以 $b=\pm1$.故所求直线方程为 $y=\frac{1}{6}x+1$ 或 $y=\frac{1}{6}x-1$.

探究3 直线恒过定点问题

【例3】已知直线 $l:5ax-5y-a+3=0$.

(1)求证:不论实数 a 为何值,直线 l 总经过第一象限.

(2)若直线 l 不经过第二象限,求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)证明:将直线 l 的方程整理为 $y-\frac{3}{5}=a\left(x-\frac{1}{5}\right)$,

则直线 l 的斜率为 a,且直线 l 过定点 $A\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$.

又点 $A\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$在第一象限,所以直线 l 过第一象限.

故不论实数 a 为何值,直线 l 总经过第一象限.

(2)因为 $O(0,0)$,$A\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$,所以直线 OA 的斜率为 $k=\frac{\frac{3}{5}-0}{\frac{1}{5}-0}=3$.又直线 l 不经过第二象限,所以 $a\geqslant3$.

即实数 a 的取值范围是$[3,+\infty)$.

点睛 对于直线过定点问题,若直线的斜率存在,则把直线方程化为点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$的形式,从而不论直线的斜率 k 取何值,直线都过定点(x_0,y_0).

【变式训练3】已知直线 $l:y=kx+2k+1$.

(1)求证:直线 l 过定点.

(2)若当 $-3<x<3$ 时,直线 l 上的点都在 x 轴上方,求实数 k 的取值范围.

【解析】(1)证明:由 $y=kx+2k+1$,得 $y-1=k(x+2)$,则直线 l 过定点$(-2,1)$.

(2)设函数 $f(x)=kx+2k+1$,显然其图象是一条直线.当 $-3<x<3$ 时,直线 l 上的点都在 x 轴上方,则 $\begin{cases}f(-3)\geqslant0,\\f(3)\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3k+2k+1\geqslant0,\\3k+2k+1\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{5}\leqslant k\leqslant1$.

所以实数 k 的取值范围是$\left[-\frac{1}{5},1\right]$.

随堂小练

1. 已知直线方程 $y-3=\sqrt{3}(x-4)$，则这条直线经过的定点和倾斜角分别是 (A)

A. $(4,3)$，$60°$　　B. $(-3,-4)$，$30°$

C. $(4,3)$，$30°$　　D. $(-4,-3)$，$60°$

【解析】$y-3=\sqrt{3}(x-4)$，得直线过定点$(4,3)$. 因为斜率 $k=\sqrt{3}$，所以倾斜角为 $60°$.

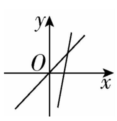
2. 已知直线 $kx-y+1-3k=0$，当 k 变化时，所有的直线恒过定点 (C)

A. $(1,3)$　　B. $(-1,-3)$

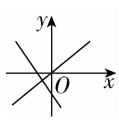
C. $(3,1)$　　D. $(-3,-1)$

【解析】直线 $kx-y+1-3k=0$ 变形为 $y-1=k(x-3)$，由直线的点斜式可得直线恒过定点$(3,1)$.

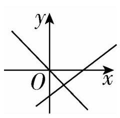
3. 下列选项中，在同一直角坐标系中，表示直线 $y=ax$ 与 $y=x+a$ 正确的是 (C)



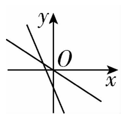
A



B



C



D

【解析】①当 $a>0$ 时，直线 $y=ax$ 的倾斜角为锐角，直线 $y=x+a$ 在 y 轴上的截距 $a>0$，A，B，C，D 都不成立；②当 $a=0$ 时，直线 $y=ax$ 的倾斜角为 $0°$，A，B，C，D 都不成立；③当 $a<0$ 时，直线 $y=ax$ 的倾斜角为钝角，直线 $y=x+a$ 的倾斜角为锐角且在 y 轴上的截距 $a<0$，只有 C 成立.

4. 已知直线 l 在 y 轴上的截距为 -3，且它与两坐标轴围成的三角形的面积为 6，则直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x-3$.

【解析】由题意，设直线方程为 $y=kx-3$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{3}{k}$，

则 $\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{|k|}=6$，

$|k|=\frac{3}{4}$，$\therefore k=\pm\frac{3}{4}$，

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x-3$.

5. 求证：不论 m 为何值，直线 l：$y=(m-1)x+2m+1$ 总过第二象限.

【证明】方法一　直线 l 的方程可化为 $y-3=(m-1)(x+2)$，

$\therefore$ 直线 l 过定点$(-2,3)$，

$\because$ 点$(-2,3)$在第二象限，$\therefore$ 直线 l 总过第二象限.

方法二　直线 l 的方程可化为 $m(x+2)-(x+y-1)=0$.

令 $\begin{cases}x+2=0,\\x+y-1=0,\end{cases}$ 解得 $x=-2$，$y=3$.

$\therefore$ 无论 m 取何值，直线 l 总经过点$(-2,3)$.

$\because$ 点$(-2,3)$在第二象限，$\therefore$ 直线 l 总过第二象限.

温馨提示：请自主完成课后作业(十三)

课后作业·单独成册

第 2 课时　直线的两点式方程

学习目标	核心素养
1. 掌握直线的两点式方程.(重点) 2. 能够利用截距式求相关三角形的面积.(重点、难点)	1. 通过直线的两点式、截距式方程的学习,培养数学抽象素养. 2. 通过直线的两点式、截距式方程适用范围的学习,提升逻辑推理和数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 直线的两点式方程

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$(其中 $x_1\neq x_2,y_1\neq y_2$)的直线方程是 $\underline{\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}}$,我们把它叫做直线的两点式方程,简称两点式.

2. 直线的截距式方程

直线 l 与 x 轴交于点 $A(a,0)$,与 y 轴交于点 $B(0,b)$,其中 $a\neq0,b\neq0$,则得直线方程为 $\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$,我们把它叫做直线的截距式方程,简称截距式.

小试牛刀

1. 过两点(1,2),(5,3)的直线方程是　　　　(B)

A. $\dfrac{y-2}{5-1}=\dfrac{x-1}{3-1}$　　B. $\dfrac{y-2}{3-2}=\dfrac{x-1}{5-1}$

C. $\dfrac{y-1}{5-1}=\dfrac{x-3}{5-3}$　　D. $\dfrac{x-2}{5-2}=\dfrac{y-3}{2-3}$

【解析】∵直线过两点(1,2),(5,3),

∴由两点式得直线的方程为$\dfrac{y-2}{3-2}=\dfrac{x-1}{5-1}$. 故选 B.

2. 已知 $A(3,0)$,$B(0,4)$,动点 $P(x_0,y_0)$在线段 AB 上移动,则 $4x_0+3y_0=$__12__.

【解析】AB 所在直线方程为 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$,则 $\dfrac{x_0}{3}+\dfrac{y_0}{4}=1$,即 $4x_0+3y_0=12$.

3. 过点 $P(1,3)$的直线 l 分别与两坐标轴交于 A,B 两点,若 P 为 AB 的中点,则直线 l 的截距式方程是 $\underline{\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}=1}$.

【解析】设 $A(m,0)$,$B(0,n)$,由 $P(1,3)$是 AB 的中点可得 $m=2,n=6$,即 $A(2,0)$,$B(0,6)$.

则直线 l 的截距式方程为$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}=1$.

互动课堂

合作探究

探究 1　直线的两点式方程

【例 1】已知△ABC 的三个顶点 $A(-3,2)$,$B(5,-4)$,$C(0,-2)$,在△ABC 中,

(1)求 BC 边的方程;

(2)求 BC 边上的中线所在直线的方程.

【解析】(1)∵BC 边过两点 $B(5,-4)$,$C(0,-2)$,

∴由两点式得$\dfrac{y-(-4)}{(-2)-(-4)}=\dfrac{x-5}{0-5}$,

即 $2x+5y+10=0$.

故 BC 边的方程为 $2x+5y+10=0(0\leqslant x\leqslant5)$.

(2)设 BC 的中点为 $M(x_0,y_0)$,

则 $x_0=\dfrac{5+0}{2}=\dfrac{5}{2}$,$y_0=\dfrac{(-4)+(-2)}{2}=-3$.

∴$M\left(\dfrac{5}{2},-3\right)$,

又 BC 边上的中线经过点 $A(-3,2)$.

∴由两点式得$\dfrac{y-2}{-3-2}=\dfrac{x-(-3)}{\frac{5}{2}-(-3)}$,

即 $10x+11y+8=0$.

故 BC 边上的中线所在直线的方程为 $10x+11y+8=0$.

点睛 (1)首先要鉴别题目条件是否符合直线方程相应形式的要求,对含有字母的则需分类讨论.

(2)注意问题叙述的异同,例 1 中第(1)问表示的是线段,所以要添加范围;第(2)问则表示的是直线.

【变式训练 1】已知△ABC 的顶点是 $A(-1,-1)$,$B(3,1)$,$C(1,6)$,求与 CB 平行的中位线所在直线的方程.

【解析】由 $A(-1,-1)$,$C(1,6)$,得 AC 的中点为 $M\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$. 由 $A(-1,-1)$,$B(3,1)$,得 AB 的中点为 $N(1,0)$.

故过 MN 的直线为 $\frac{y-0}{\frac{5}{2}-0}=\frac{x-1}{0-1}$(两点式),即平行于 CB 的中位线所在直线的方程为 $5x+2y-5=0$.

探究 2 直线的截距式方程

【例 2】求过点(4,−3)且在两坐标轴上截距的绝对值相等的直线 l 的方程.

【解析】设直线在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a,b.

①当 $a\neq0$,$b\neq0$ 时,设 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

∵点(4,−3)在直线上,

∴ $\frac{4}{a}+\frac{-3}{b}=1$,

若 $a=b$,则 $a=b=1$,直线 l 的方程为 $x+y-1=0$.

若 $a=-b$,则 $a=7$,$b=-7$,直线 l 的方程为 $x-y-7=0$.

②当 $a=b=0$ 时,直线过原点,且过点(4,−3),

∴直线 l 的方程为 $3x+4y=0$.

综上可知,所求直线 l 的方程为 $x+y-1=0$ 或 $x-y-7=0$ 或 $3x+4y=0$.

点睛 当直线与两坐标轴相交时,一般可考虑用截距式表示直线的方程,用待定系数法求解.选用截距式时一定要注意条件,直线不能过原点.

【变式训练 2】直线 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ 在两坐标轴上的截距之和为 (B)

A. 1　　B. −1

C. 7　　D. −7

【解析】直线 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ 在 x 轴上的截距为 3,在 y 轴上的截距为 −4,所以和为 −1.

探究 3 直线与坐标轴围成的面积

【例 3】已知直线 l 过定点 $A(-2,3)$,且与两坐标轴围成的三角形面积为 4,求直线 l 的方程.

【解析】由题意可知直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(ab\neq0)$,

则有 $\begin{cases}\frac{-2}{a}+\frac{3}{b}=1,\\ \frac{1}{2}|ab|=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{4}{3},\\ b=-6.\end{cases}$

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 或 $\frac{x}{-\frac{4}{3}}+\frac{y}{-6}=1$,

即 $x+2y-4=0$ 或 $9x+2y+12=0$.

点睛 涉及直线与坐标轴围成的图形面积问题,往往用直线在坐标轴上的截距解答.

【变式训练 3】已知直线 l 经过点(1,6)和点(8,−8).

(1)求直线 l 的两点式方程,并化为截距式方程;

(2)求直线 l 与两坐标轴围成的图形面积.

【解析】(1)因为直线 l 的两点式方程为 $\frac{y-6}{-8-6}=\frac{x-1}{8-1}$,

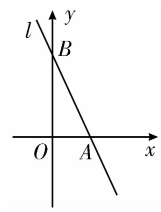
所以 $\frac{y-6}{-14}=\frac{x-1}{7}$,即 $\frac{y-6}{-2}=x-1$.

所以 $y-6=-2x+2$,即 $2x+y=8$.

所以 $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$.

故所求截距式方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$.

(2)如图所示,直线 l 与两坐标轴围成的图形是直角三角形 AOB,且 $OA\perp OB$,$|OA|=4$,$|OB|=8$,



故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|=\frac{1}{2}\times4\times8=16$.

故直线 l 与两坐标轴围成的图形面积为 16.

随堂小练

1. 经过两点(5,0),(2,−5)的直线方程为 (B)

A. $5x+3y-25=0$

B. $5x-3y-25=0$

C. $3x-5y-25=0$

D. $5x-3y+25=0$

【解析】经过两点(5,0),(2,−5)的直线方程为 $\frac{y-0}{-5-0}=\frac{x-5}{2-5}$,

整理得 $5x-3y-25=0$. 故选 B.

2. 经过两点(1,1),(2,−1)的直线方程为 (C)

A. $2x-y-1=0$　　B. $x-2y+3=0$

C. $2x+y-3=0$　　D. $x+2y-3=0$

【解析】∵直线过两点(1,1)和(2,−1),

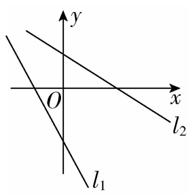
∴直线的斜率为 $k=\frac{1+1}{1-2}=-2$,

∴直线的方程为 $y-1=-2(x-1)$,

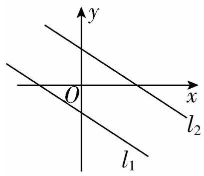
变形可得 $2x+y-3=0$,

故选 C.

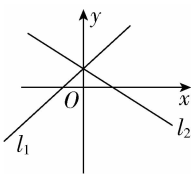
3. 两条直线 $l_1:\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ 和 $l_2:\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=1$ 在同一直角坐标系中的图象可以是 （ A ）



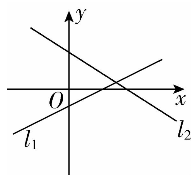
A



B



C



D

【解析】化为截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-b}=1$，$\frac{x}{b}+\frac{y}{-a}=1$.

先确定 l_1，判断 a，b 符号，再确定 l_2 的位置，知 A 项符合.

4. 经过点(－2，3)且在两坐标轴上截距互为相反数的直线方程为 $\underline{3x+2y=0 \text{ 或 } x-y+5=0}$.

【解析】该直线过原点时，设直线方程为 $y=kx$，

将 $x=-2$，$y=3$ 代入得 $k=-\frac{3}{2}$，

∴直线方程为 $3x+2y=0$.

当直线在两坐标轴上截距不为零时，

设直线方程为 $\frac{x}{a}-\frac{y}{a}=1$，

∵直线过点(－2，3)，

∴$-\frac{2}{a}-\frac{3}{a}=1$，

得 $a=-5$，

∴直线方程为 $x-y+5=0$，

故所求直线方程为 $3x+2y=0$ 或 $x-y+5=0$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十四)

课后作业 · 单独成册

第 3 课时 直线的一般式方程

学习目标	核心素养
1. 掌握直线的一般式方程.(重点) 2. 了解平面直角坐标系中任意一条直线都可以用关于 x,y 的二元一次方程来表示. 3. 能将直线方程的几种形式进行互相转换,并弄清各种形式的应用范围.(重点、难点)	1. 通过直线方程的两点式、截距式和一般式的学习,培养数学抽象素养. 2. 通过直线方程的两点式、截距式和一般式适用范围的学习,提升逻辑推理和数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 直线的一般式方程

关于 x,y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$(其中 A,B 不同时为 0) 叫做直线的一般式方程,简称一般式.

2. 对于直线 $Ax+By+C=0$,当 $B\neq0$ 时,其斜率为 $-\dfrac{A}{B}$,在 y 轴上的截距为 $-\dfrac{C}{B}$;当 $B=0$ 时,在 x 轴上的截距为 $-\dfrac{C}{A}$;当 $AB\neq0$ 时,在 x 轴、y 轴上的截距分别为 $-\dfrac{C}{A}$,$-\dfrac{C}{B}$.

3. 直线的一般式方程的结构特征

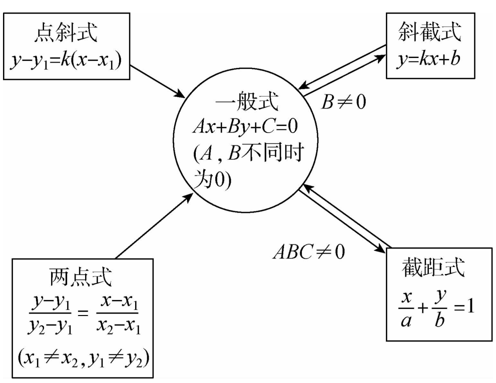
(1)方程是关于 x,y 的二元一次方程.

(2)方程中等号的左侧自左向右一般按 x,y,常数的先后顺序排列.

(3)x 的系数一般不为分数和负数.

(4)虽然直线的一般式方程有三个参数,但只需两个独立的条件即可求得直线的方程.

4. 直线的一般式与点斜式、斜截式、两点式、截距式的关系



小试牛刀

1. 直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$,若直线 l 过原点和第二、四象限,则 (D)

A. $C=0,B>0$　　B. $A>0,B>0,C=0$

C. $AB<0,C=0$　　D. $AB>0,C=0$

【解析】通过直线的斜率和截距进行判断.

2. 若直线 $ax+my+2a=0(a\neq0)$ 过点 $(1,-\sqrt{3})$,则此直线的斜率为 (D)

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】因为直线 $ax+my+2a=0(a\neq0)$ 过点 $(1,-\sqrt{3})$,所以 $a-\sqrt{3}m+2a=0$,所以 $\sqrt{3}a=m$,

所以这条直线的斜率是 $k=-\dfrac{a}{m}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 在 y 轴上的截距为 2,且过点 $(-1,4)$ 的直线的一般式方程为 $2x+y-2=0$.

【解析】因为在 y 轴上的截距为 2,所以设直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{2}=1$,把点 $(-1,4)$ 代入,得 $a=1$,所以所求直线的方程为 $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}=1$,整理得 $2x+y-2=0$.

4. 已知直线的方程为 $4x+5y-20=0$,则此直线在 x 轴、y 轴上的截距分别为 5,4.

【解析】令 $x=0$,得 $y=4$,令 $y=0$,得 $x=5$,

故此直线在 x,y 轴上的截距分别为 5,4.

互动课堂

合作探究

探究 1 直线的一般式方程

【例 1】设直线 l 的方程为 $(m^2-2m-3)x-(2m^2+m-1)y+6-2m=0$.

(1)若直线 l 在 x 轴上的截距为-3,求 m 的值;

(2)若直线 l 的斜率为1,求 m 的值.

【解析】(1)令 $y=0$,则 $x=\dfrac{2m-6}{m^2-2m-3}$,

$\therefore \dfrac{2m-6}{m^2-2m-3}=-3$,且 $m^2-2m-3\neq 0$,

得 $m=-\dfrac{5}{3}$ 或 $m=3$(舍去).

$\therefore m=-\dfrac{5}{3}$.

(2)将直线 l 化为斜截式方程

得 $y=\dfrac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}x+\dfrac{6-2m}{2m^2+m-1}$,

得$\dfrac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}=1$,且 $2m^2+m-1\neq 0$,

得 $m=-2$ 或 $m=-1$(舍去),$\therefore m=-2$.

点睛(1)一般式化为斜截式的步骤

①移项得 $By=-Ax-C$;

②当 $B\neq 0$ 时,得斜截式 $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$.

(2)一般式化为截距式的步骤

方法一:①把常数项移到方程右边,得 $Ax+By=-C$;

②当 $C\neq 0$ 时,方程两边同除以$-C$,得$\dfrac{Ax}{-C}+\dfrac{By}{-C}=1$;

③化为截距式$\dfrac{x}{-\frac{C}{A}}+\dfrac{y}{-\frac{C}{B}}=1$.

方法二:当 $AB\neq 0$ 时,

①令 $x=0$ 求直线在 y 轴上的截距 b;

②令 $y=0$ 求直线在 x 轴上的截距 a;

③得截距式方程$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

由于直线方程的斜截式和截距式是唯一的,而两点式和点斜式不唯一,因此,通常情况下,一般式不化为两点式和点斜式.

【变式训练1】已知直线 l 的方程为$(a+1)x+y+2-a=0$.

(1)若 l 在两坐标轴上的截距相等,求 a 的值;

(2)若 l 不经过第二象限,求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)当 $a=-1$ 时,直线 l 的方程为 $y+3=0$,不满足题意.令 $x=0$,则 $y=a-2$,

令 $y=0$,则 $x=\dfrac{a-2}{a+1}$,

$\because l$ 在两坐标轴上的截距相等,

$\therefore a-2=\dfrac{a-2}{a+1}$,得 $a=2$ 或 $a=0$.

(2)将 l 的方程化为 $y=-(a+1)x+a-2$,

所以$\begin{cases}-(a+1)>0,\\ a-2\leqslant 0,\end{cases}$ 或$\begin{cases}-(a+1)=0,\\ a-2\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant -1$.

综上,实数 a 的取值范围是$(-\infty,-1]$.

探究2 直线方程的综合应用

【例2】已知直线 l 过点 $M(2,1)$,且分别与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴交于 A,B 两点,O 为原点,当$\triangle AOB$ 的面积最小时,求直线 l 的方程.

【解析】方法一 设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$,

则可得 $A\left(\dfrac{2k-1}{k},0\right)$,$B(0,1-2k)$.

$\because$与 x 轴,y 轴正半轴分别交于 A,B 两点,

$\therefore\begin{cases}\dfrac{2k-1}{k}>0,\\ 1-2k>0\end{cases}\Rightarrow k<0$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2k-1}{k}\cdot(1-2k)$

$=\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{1}{k}-4k\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\left[4+2\sqrt{\left(-\dfrac{1}{k}\right)\cdot(-4k)}\right]=4$,当且仅当$-\dfrac{1}{k}=-4k$,即 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时,$\triangle AOB$ 的面积有最小值4,此时,直线 l 的方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-2)$,即 $x+2y-4=0$.

方法二 设所求直线 l 的方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a>0,b>0)$,则$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$.

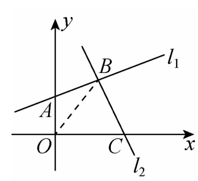
$\therefore$由$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{2}{ab}}$,得$\dfrac{1}{2}ab\geqslant 4$,当且仅当$\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$,即 $a=4$,$b=2$ 时,$\triangle AOB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab$ 有最小值4.

此时,直线 l 的方程是$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$,即 $x+2y-4=0$.

点睛(1)求解与直线方程有关的最值问题,先根据题意建立目标函数,再利用基本不等式(或函数)求解最值.

(2)求解直线方程与函数相结合的问题,一般是利用直线方程中 x,y 的关系,将问题转化为关于 x(或 y)的函数,借助函数的性质解决问题.

【变式训练2】已知直线 l_1:$ax-2y=2a-4$,l_2:$2x+a^2y=2a^2+4$,当 $0<a<2$ 时,直线 l_1,l_2 与两坐标轴围成一个四边形,当四边形的面积最小时,求实数 a 的值.



【解析】因为 l_1:$ax-2y=2a-4$,

所以当 $x=0$ 时,$y=2-a$,即直线 l_1 与 y 轴交于点 $A(0,2-a)$.

因为 l_2:$2x+a^2y=2a^2+4$,

所以当 $y=0$ 时,$x=a^2+2$,

即直线 l_2 与 x 轴交于点 $C(a^2+2,0)$.

又 $0<a<2$,由已知画出简图,如图所示.

易知直线 l_1 与 l_2 均过定点$(2,2)$,即两直线相交于点 $B(2,2)$.

则四边形 $AOCB$ 的面积为

$S=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}(2-a)\times 2+\frac{1}{2}(a^2+2)\times 2$

$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\geqslant\frac{15}{4}$.

所以 $S_{\min}=\frac{15}{4}$，此时 $a=\frac{1}{2}$.

随堂小练

1. 已知直线 $ax+3my+2a=0(m\neq 0)$ 过点 $(1,-1)$，则该直线的斜率 $k=$ （ D ）

A. -3　　B. 3

C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

【解析】由点 $(1,-1)$ 在直线上可得 $a-3m+2a=0(m\neq 0)$，解得 $m=a$，故直线方程为 $ax+3ay+2a=0(a\neq 0)$，即 $x+3y+2=0$，其斜率 $k=-\frac{1}{3}$.

2. 过点 $(5,2)$，且在 x 轴上的截距是在 y 轴上的截距的 2 倍的直线方程是 （ D ）

A. $2x+y-12=0$

B. $2x+y-12=0$ 或 $2x-5y=0$

C. $x-2y-1=0$

D. $x+2y-9=0$ 或 $2x-5y=0$

【解析】当在 y 轴上的截距 $b=0$ 时，设直线方程为 $y=kx$. 将点 $(5,2)$ 代入，得 $y=\frac{2}{5}x$，即 $2x-5y=0$. 当 $b\neq 0$ 时，设直线方程为 $\frac{x}{2b}+\frac{y}{b}=1$，将点 $(5,2)$ 代入，得 $\frac{5}{2b}+\frac{2}{b}=1$，解得 $b=\frac{9}{2}$，即直线方程为 $\frac{x}{9}+\frac{y}{\frac{9}{2}}=1$，整理得 $x+2y-9=0$. 故选 D.

3. 已知两条直线 $a_1x+b_1y+4=0$ 和 $a_2x+b_2y+4=0$ 都过点 $A(2,3)$，则过两点 $P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$ 的直线方程为 $\underline{2x+3y+4=0}$.

【解析】由条件知 $\begin{cases}2a_1+3b_1+4=0,\\2a_2+3b_2+4=0,\end{cases}$ 易知两点 $P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$ 都在直线 $2x+3y+4=0$ 上，即 $2x+3y+4=0$ 为所求.

4. 若方程 $(a^2+5a+6)x+(a^2+2a)y+1=0$ 表示一条直线，则实数 a 的取值范围是 $\underline{(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)}$.

【解析】由 $\begin{cases}a^2+5a+6=0,\\a^2+2a=0\end{cases}$ 得 $a=-2$，

∵方程 $(a^2+5a+6)x+(a^2+2a)y+1=0$ 表示一条直线，

∴$a\neq -2$.

∴a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十五）

课后作业·单独成册

2.3 直线的交点坐标与距离公式

第1课时 两条直线的交点坐标

学习目标	核心素养
1. 会用解方程组的方法求两条直线的交点坐标.(重点) 2. 会根据方程组解的个数判断两条直线的位置关系.	借助求两条直线的交点坐标,培养数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 点与直线的基础知识

几何元素及关系	代数表示
点 P	$P(a,b)$
直线 l	$l:Ax+By+C=0$(A,B 不同时为 0)
点 P 在直线 l 上	$Aa+Bb+C=0$
直线 l_1 与 l_2 的交点是 P	方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$的解是$\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$

2. 两条直线的交点坐标

已知两条直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$,$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$. 将两条直线的方程联立,得方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$若方程组有唯一解,则两条直线__相交__,此解就是交点的坐标;若方程组无解,则两条直线无公共点,此时两条直线__平行__.

3. 一般地,直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 和直线 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的位置关系如下表所示:

方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$的解	一组	无数组	无解
直线 l_1 和 l_2 的公共点个数	__1__个	__无数__个	__0__个
直线 l_1 和 l_2 的位置关系	相交	重合	平行

4. 过定点的直线系方程

已知直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 交于点 $P(x_0,y_0)$,则方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 表示过点 P 的直线系,但不包括直线 l_2.

小试牛刀

1. 直线 $x+2y-2=0$ 与直线 $2x+y-3=0$ 的交点坐标是 (C)

A. $(4,1)$　　B. $(1,4)$

C. $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

【解析】由$\begin{cases}x+2y-2=0,\\2x+y-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\y=\frac{1}{3},\end{cases}$即交点坐标是$\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$.

2. 方程组$\begin{cases}3x+y+1=0,\\6x+2y-5=0\end{cases}$的解的个数是 (A)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 无数个

3. 已知两条直线 $l_1:x+my+6=0$,$l_2:(m-2)x+3y+2m=0$,若 $l_1/\!/l_2$,则 $m=$__-1__;若 $l_1\perp l_2$,则 $m=$__$\frac{1}{2}$__.

【解析】(1)由 $l_1/\!/l_2$ 知$\begin{cases}1\times3-m(m-2)=0,\\2m^2\neq6\times3,\end{cases}$

解得 $m=-1$.

(2)由 $l_1\perp l_2$ 知 $1\times(m-2)+m\times3=0$,

解得 $m=\frac{1}{2}$.

互动课堂

合作探究

探究1 两条直线的位置关系

【例1】判断下列各对直线的位置关系.如果相交,求出交点坐标:

(1)$l_1:3x+4y-2=0,l_2:2x+y+2=0$;

(2)$l_1:2x-6y+3=0,l_2:y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$;

(3)$l_1:2x-6y=0,l_2:y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$.

【解析】(1)解方程组$\begin{cases}3x+4y-2=0,\\2x+y+2=0\end{cases}$得唯一解$\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$所以两条直线相交,且交点坐标为$(-2,2)$.

(2)l_1与l_2组成的方程组有无数组解,所以两条直线重合.

(3)l_1与l_2组成的方程组无解,所以两条直线平行.

点睛 根据解的个数判断两条直线的位置关系,在解方程时,要先观察方程的系数,求出方程组解的个数.若方程组有唯一解,则两条直线相交;若方程组无解,则两条直线平行;若方程组有无数个解,则两条直线重合.也可根据直线的斜率和截距的关系判断两条直线的位置关系.

【变式训练1】判断下列各对直线的位置关系.如果相交,求出交点坐标:

(1)$l_1:2x+y+3=0,l_2:x-2y-1=0$;

(2)$l_1:x+y+2=0,l_2:2x+2y+3=0$;

(3)$l_1:x-y+1=0,l_2:2x-2y+2=0$.

【解析】(1)解方程组$\begin{cases}2x+y+3=0,\\x-2y-1=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}$

所以直线l_1与l_2相交,交点坐标为$(-1,-1)$.

(2)解方程组$\begin{cases}x+y+2=0,①\\2x+2y+3=0,②\end{cases}$

①×2-②,得$1=0$,矛盾,方程组无解.

所以直线l_1与l_2无公共点,即$l_1/\!/l_2$.

(3)解方程组$\begin{cases}x-y+1=0,①\\2x-2y+2=0,②\end{cases}$

①×2,得$2x-2y+2=0$.因此,①和②可以化为同一个方程,即①和②表示同一条直线,所以两直线重合.

探究2 两条直线的交点问题

【例2】求经过两条直线$l_1:x-2y+4=0$和$l_2:x+y-2=0$的交点P,且与直线$l_3:3x-4y+5=0$垂直的直线l的方程.

【解析】解方程组$\begin{cases}x-2y+4=0,\\x+y-2=0\end{cases}$得$P(0,2)$.

因为直线l_3的斜率为$\frac{3}{4}$,

所以直线l的斜率为$-\frac{4}{3}$.

所以直线的方程为$y=-\frac{4}{3}x+2$,

即$4x+3y-6=0$.

点睛 涉及两条直线的交点问题,通常是先求交点坐标,再进一步解决问题.

【变式训练2】将例2中的“垂直”改为“平行”,其他条件不变,求直线l的方程.

【解析】由本题可知$P(0,2)$,直线l的斜率为$\frac{3}{4}$,故直线l的方程为$y-2=\frac{3}{4}x$,

即$3x-4y+8=0$.

探究3 直线恒过定点问题

【例3】无论实数a取何值,方程$(a-1)x-y+2a-1=0$表示的直线恒过定点,试求该定点.

【解析】由$(a-1)x-y+2a-1=0$,

得$-x-y-1+a(x+2)=0$.

所以,已知直线恒过直线$-x-y-1=0$与直线$x+2=0$的交点.

解方程组$\begin{cases}-x-y-1=0,\\x+2=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=-2,\\y=1.\end{cases}$

所以方程$(a-1)x-y+2a-1=0$表示的直线恒过定点$(-2,1)$.

点睛 解决过定点问题常用的两种方法

(1)特殊值法:给方程中的参数取两个特殊值,可得关于x,y的两个方程,从中解出的x,y的值即为所求定点的坐标,必须代回原方程检验.

(2)分离参数法:将含参数的直线方程整理为过交点的直线系方程$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$的形式,则该方程表示的直线必过直线$A_1x+B_1y+C_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2=0$的交点,而此交点就是定点.

【变式训练 3】方程 $y=k(x+4)$ 表示 (C)

A. 过点 $(-4,0)$ 的所有直线

B. 过点 $(4,0)$ 的所有直线

C. 过点 $(-4,0)$ 且不垂直于 x 轴的所有直线

D. 过点 $(-4,0)$ 且除去 x 轴的所有直线

【解析】方程 $y=k(x+4)$，即 $y-0=k(x+4)$，它表示过点 $(-4,0)$，斜率等于 k 的直线. 故选 C.

随堂小练

1. 已知直线 $y=kx+2k+1$ 与 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的交点位于第一象限，则实数 k 的取值范围是 (C)

A. $(-6,2)$　　B. $\left(-\frac{1}{6},0\right)$

C. $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】由 $\begin{cases}y=kx+2k+1,\\ y=-\frac{1}{2}x+2,\end{cases}$

得交点坐标为 $\left(\frac{2-4k}{2k+1},\frac{6k+1}{2k+1}\right)$，由交点在第一象限，

得 $\begin{cases}\frac{2-4k}{2k+1}>0,\\ \frac{6k+1}{2k+1}>0,\end{cases}$ 解得 $k\in\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$.

2. 不论 m 为何实数，直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 恒过的定点坐标是 $\underline{\quad(9,-4)\quad}$.

【解析】方法一　取 $m=1$，得直线 $y=-4$.

取 $m=\frac{1}{2}$，得直线 $x=9$.

故两直线的交点为 $(9,-4)$，

下面验证直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 恒过点 $(9,-4)$.

将 $x=9$，$y=-4$ 代入直线方程，左边 $=9(m-1)-4(2m-1)=m-5=$ 右边，

故直线恒过点 $(9,-4)$.

方法二　直线方程可变形为 $(x+2y-1)m-(x+y-5)=0$，

$\because$ 对任意 m 该方程恒成立，

$\therefore \begin{cases}x+2y-1=0,\\ x+y-5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=9,\\ y=-4,\end{cases}$

故直线恒过定点 $(9,-4)$.

3. 已知直线 l 过直线 $l_1:3x-5y-10=0$ 和 $l_2:x+y+1=0$ 的交点，且平行于 $l_3:x+2y-5=0$，则直线 l 的方程是 $\underline{\quad 8x+16y+21=0\quad}$.

【解析】设所求的直线方程为 $3x-5y-10+\lambda(x+y+1)=0$，整理得 $(3+\lambda)x+(\lambda-5)y+\lambda-10=0$.

由题意得 $\frac{3+\lambda}{5-\lambda}=-\frac{1}{2}$，

解得 $\lambda=-11$，

所以 l 的方程为 $8x+16y+21=0$.

4. 求经过 $2x+y+8=0$ 和 $x+y+3=0$ 的交点，且与直线 $2x+3y-10=0$ 垂直的直线的方程.

【解析】方法一　解方程组 $\begin{cases}2x+y+8=0,\\ x+y+3=0\end{cases}$ 得

$\begin{cases}x=-5,\\ y=2,\end{cases}$ 即交点 $P(-5,2)$.

$\because$ 直线 $2x+3y-10=0$ 的斜率为 $-\frac{2}{3}$，

$\therefore$ 所求直线的斜率是 $\frac{3}{2}$.

故所求直线的方程是 $y-2=\frac{3}{2}(x+5)$，即 $3x-2y+19=0$.

方法二　设所求直线方程是 $3x-2y+m=0$.

解方程组 $\begin{cases}2x+y+8=0,\\ x+y+3=0\end{cases}$ 得交点为 $(-5,2)$，把 $(-5,2)$ 代入 $3x-2y+m=0$，求得 $m=19$. 故所求直线方程为 $3x-2y+19=0$.

方法三　设所求直线的方程为 $(2x+y+8)+\lambda(x+y+3)=0$，即 $(2+\lambda)x+(1+\lambda)y+8+3\lambda=0$①，

$\because$ 所求直线与直线 $2x+3y-10=0$ 垂直，

$\therefore \frac{-2-\lambda}{1+\lambda}=\frac{3}{2}$，解得 $\lambda=-\frac{7}{5}$. 把 $\lambda=-\frac{7}{5}$ 代入①式得所求直线方程为 $3x-2y+19=0$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十六）

课后作业 · 单独成册

第2课时　两点间的距离公式

学习目标	核心素养
1. 掌握两点间的距离公式,能用两点间的距离公式解决实际问题.(重点) 2. 了解坐标法,会利用坐标法解决简单的几何问题.(重点、难点)	1. 通过两点间的距离公式的推导,培养逻辑推理素养. 2. 借助两点间的距离的计算,提升数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 两点间的距离公式

平面上的两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$间的距离公式 $|P_1P_2|=$ __$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$__. 特别地,原点 $O(0,0)$与任一点 $P(x,y)$间的距离$|OP|=$__$\sqrt{x^2+y^2}$__.

2. 利用"坐标法"解决平面几何问题的基本步骤

(1)建立坐标系,用坐标表示有关的量.

(2)进行有关的代数运算.

(3)把代数运算的结果"翻译"成几何结论.

小试牛刀

1. 已知点 $A(-2,-1)$,$B(a,3)$,且$|AB|=5$,则 $a=$　(C)

A. 1　　B. -5

C. 1 或-5　　D. -1 或 5

【解析】由两点间距离公式得,$(a+2)^2+(3+1)^2=5^2$,

$\therefore(a+2)^2=9$,$\therefore a=1$ 或 $a=-5$,故选 C.

2. 点 $P(-3,4)$关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点 Q 的坐标是　(B)

A. $(-2,1)$　　B. $(-2,5)$

C. $(2,-5)$　　D. $(4,-3)$

3. 已知两点 $P_1(4,2)$,$P_2(2,-2)$,则$|P_1P_2|=$__$2\sqrt{5}$__.

【解析】$|P_1P_2|=\sqrt{(4-2)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$.

4. 设点 A 在 x 轴上,点 B 在 y 轴上,AB 的中点为 $P(2,-1)$,则$|AB|=$__$2\sqrt{5}$__.

【解析】依题意设 $A(a,0)$,$B(0,b)$,

又 $P(2,-1)$为 AB 的中点,

所以 $a=4$,$b=-2$.

所以 $A(4,0)$,$B(0,-2)$.

所以$|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{5}$.

互动课堂

合作探究

探究1　求两点间的距离

【例 1】 已知$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-3,1)$,$B(3,-3)$,$C(1,7)$,试判断$\triangle ABC$ 的形状.

【解析】方法一　$\because|AB|=\sqrt{(3+3)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{13}$,

$|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(7-1)^2}=2\sqrt{13}$,

$|BC|=\sqrt{(1-3)^2+(7+3)^2}=2\sqrt{26}$,

$\therefore|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$,

且$|AB|=|AC|$,

$\therefore\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

方法二　$\because k_{AC}=\dfrac{7-1}{1-(-3)}=\dfrac{3}{2}$,

$k_{AB}=\dfrac{-3-1}{3-(-3)}=-\dfrac{2}{3}$,

则 $k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$,$\therefore AC\perp AB$.

又$|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(7-1)^2}=2\sqrt{13}$,

$|AB|=\sqrt{(3+3)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{13}$,

$\therefore|AC|=|AB|$. $\therefore\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

点睛 在分析三角形的形状时,要从两方面考虑:①角的特征,主要考虑是否为直角或等角;②边的特征,主要考虑边长是否相等或是否满足勾股定理.

【变式训练 1】已知 $A(-1,0)$，$B(5,6)$，$C(3,4)$三点，则 $\dfrac{|AC|}{|CB|}$的值为　　（ D ）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 3　　D. 2

【解析】由两点间的距离公式，

得 $|AC|=\sqrt{[3-(-1)]^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$，

$|CB|=\sqrt{(3-5)^2+(4-6)^2}=2\sqrt{2}$，

故 $\dfrac{|AC|}{|CB|}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2$.

探究 2　求点的坐标

【例 2】已知点 $A(-3,4)$，$B(2,\sqrt{3})$，在 x 轴上找一点 P，使 $|PA|=|PB|$，并求 $|PA|$的值.

【解析】设点 P 为$(x,0)$

则有 $|PA|=\sqrt{(x+3)^2+(0-4)^2}$

$=\sqrt{x^2+6x+25}$，

$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(0-\sqrt{3})^2}=\sqrt{x^2-4x+7}$.

由 $|PA|=|PB|$，

得 $x^2+6x+25=x^2-4x+7$，

解得 $x=-\dfrac{9}{5}$.

即所求点 P 为 $\left(-\dfrac{9}{5},0\right)$.

且 $|PA|=\sqrt{\left(-\dfrac{9}{5}+3\right)^2+(0-4)^2}=\dfrac{2\sqrt{109}}{5}$.

点睛 利用坐标平面内两点间的距离公式可以求平面上任意两个已知点间的距离；反过来，已知两点间的距离也可以根据条件求其中一个点的坐标.

【变式训练 2】在直线 l：$3x-y+1=0$ 上求一点 P，使点 P 到两点 $A(1,-1)$，$B(2,0)$的距离相等.

【解析】设 P 点坐标为(x,y)，

由 P 在 l 上和 P 到 A，B 距离相等建立方程组，

$$\begin{cases}3x-y+1=0,\\ \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2},\end{cases}$$

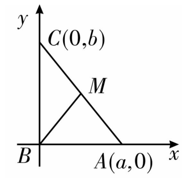
解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}$ 所以 P 点坐标为$(0,1)$.

探究 3　坐标法的应用

【例 3】已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\angle B$ 为直角，$AB=a$，$BC=b$，建立适当的坐标系，写出顶点 A，B，C 的坐标，并求证斜边 AC 的中点 M 到三个顶点的距离相等.

【解析】取边 BA 所在的直线为 x 轴，边 BC 所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图所示，则三个顶点的坐标分别为 $A(a,0)$，$B(0,0)$，$C(0,b)$.

由中点坐标公式得斜边 AC 的中点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$.



所以 $|MA|=\sqrt{\left(a-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(0-\dfrac{b}{2}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$，

$|MB|=\sqrt{\left(0-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(0-\dfrac{b}{2}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$，

$|MC|=\sqrt{\left(0-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(b-\dfrac{b}{2}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$，

$\therefore |MA|=|MB|=|MC|$.

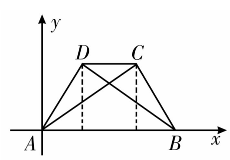
点睛 建系的原则主要有两点：

(1)让尽可能多的点落在坐标轴上，这样便于运算.

(2)如果条件中有互相垂直的两条线，可考虑将它们作为坐标轴；如果图形为中心对称图形，可考虑将中心作为原点；如果有轴对称性，可考虑将对称轴作为坐标轴.

【变式训练 3】已知在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，对角线为 AC 和 BD. 求证：$|AC|=|BD|$.

【证明】如图所示，建立平面直角坐标系，设 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(b,c)$，则点 D 的坐标是$(a-b,c)$.



所以 $|AC|=\sqrt{(b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{b^2+c^2}$，

$|BD|=\sqrt{(a-b-a)^2+(c-0)^2}$

$=\sqrt{b^2+c^2}$.

故 $|AC|=|BD|$.

随堂小练

1. 已知△ABC 的三个顶点分别是 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$C\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，则△ABC 的形状是 (C)

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 钝角三角形

【解析】∵ $|AB|=2|a|$，

$|AC|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}+a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-0\right)^2}=\sqrt{3}|a|$，

$|BC|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-0\right)^2}=|a|$，

∴ $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$，

∴△ABC 为直角三角形.

2. 光线从点 $A(-3,5)$ 射到 x 轴上，经反射以后经过点 $B(2,10)$，则光线从 A 到 B 经过的路程为 (C)

A. $5\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $5\sqrt{10}$　　D. $10\sqrt{5}$

【解析】∵点 A 关于 x 轴的对称点 $A'(-3,-5)$，

∴ $|A'B|=\sqrt{(-3-2)^2+(-5-10)^2}=5\sqrt{10}$，

由光的反射理论可知，

此即为光线从 A 到 B 的距离.

3. 已知△ABC 的三个顶点分别是 $A(3,8)$，$B(-11,3)$，$C(-8,-2)$，则 BC 边上的高 AD 的长度为 $\underline{\frac{5}{2}\sqrt{34}}$.

【解析】由两点间距离公式得 $|AB|=\sqrt{221}$，$|BC|=\sqrt{34}$，$|AC|=\sqrt{221}$.

∴ $|AB|=|AC|$，∴△ABC 是等腰三角形，

又∵AD 是 BC 边上的高，∴D 为 BC 的中点，由中点坐标公式易得 $D\left(-\frac{19}{2},\frac{1}{2}\right)$，

∴ $|AD|=\sqrt{\left(-\frac{19}{2}-3\right)^2+\left(\frac{1}{2}-8\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{34}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十七）

课后作业·单独成册

第3课时 点到直线的距离公式、两条平行直线间的距离

学习目标	核心素养
1.理解点到直线的距离公式的推导过程,会用点到直线的距离公式求距离并推导两条平行直线间的距离.(难点) 2.掌握点到直线的距离公式,能用点到直线的距离公式解决实际问题.(重点)	1.通过点到直线的距离公式的推导,培养逻辑推理素养. 2.借助点到直线的距离与两条平行直线间的距离的计算,提升数学运算素养.

自主预习

知新预学

1.点到直线的距离

(1)概念:过一点向直线作垂线,则该点与垂足之间的距离,就是该点到直线的距离.

(2)公式:点 $P(x_0,y_0)$到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离 $d=$ $\underline{\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$.

2.两条平行直线间的距离

(1)概念:两条平行直线间的距离是指夹在这两条平行直线间的公垂线段的长.

(2)公式:两条平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 与 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 间的距离 $d=$ $\underline{\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$.

小试牛刀

1.点(1,2)到直线 $y=2x+1$ 的距离为 (A)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

【解析】直线 $y=2x+1$ 即 $2x-y+1=0$,由点到直线的距离公式得 $d=\dfrac{|2\times1-2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

2.直线 $5x+12y-1=0$ 与 $5x+12y-10=0$ 间的距离为 (C)

A. $\dfrac{9}{169}$ B. $\dfrac{1}{13}$ C. $\dfrac{9}{13}$ D. 1

【解析】由公式知两条平行直线间的距离 $d=\dfrac{|-1-(-10)|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{9}{13}$.

3.分别过点 $A(-2,1)$和点 $B(3,-5)$的两条直线均垂直于 x 轴,则这两条直线间的距离是 $\underline{\ 5\ }$.

【解析】$d=|3-(-2)|=5$.

4.求过点 $P(1,2)$且与原点距离最大的直线的方程.

【解析】由题意知过点 P 且与 OP 垂直的直线到原点 O 的距离最大,

$\because k_{OP}=2$,

$\therefore$所求直线方程为 $y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$,

即 $x+2y-5=0$.

互动课堂

合作探究

探究1 点到直线的距离

【例1】求过点 $P(1,2)$且与点 $A(2,3)$,$B(4,-5)$的距离相等的直线 l 的方程.

【解析】方法一 由题意知 $k_{AB}=-4$,线段 AB 的中点为 $C(3,-1)$,所以过点 $P(1,2)$且与直线 AB 平行的直线方程为 $y-2=-4(x-1)$,

即 $4x+y-6=0$.此直线符合题意.

过点 $P(1,2)$与线段 AB 中点 $C(3,-1)$的直线方程为 $\dfrac{y-2}{-1-2}=\dfrac{x-1}{3-1}$,

即 $3x+2y-7=0$.此直线也符合题意.

故所求直线 l 的方程为 $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$.

方法二 显然所求直线的斜率存在,

设直线方程为 $y=kx+b$,

根据条件得 $\begin{cases}2=k+b,\\ \dfrac{|2k-3+b|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|4k+5+b|}{\sqrt{k^2+1}},\end{cases}$

化简得 $\begin{cases}k+b=2,\\ k=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k+b=2,\\ 3k+b+1=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}k=-4,\\ b=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-\dfrac{3}{2},\\ b=\dfrac{7}{2}.\end{cases}$

所以所求直线 l 的方程为：

$y=-4x+6$ 或 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$，

即 $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$.

点睛(1)求点到直线的距离，首先要把直线方程化成一般式方程，然后再利用点到直线的距离公式求解.

(2)当点与直线有特殊位置关系时，也可以用公式求解，但是这样会把问题变复杂，要注意数形结合.

(3)几种特殊情况的点到直线的距离：

①点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=a$ 的距离 $d=|y_0-a|$；

②点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $x=b$ 的距离 $d=|x_0-b|$.

【变式训练 1】(1)若点 $(4,a)$ 到直线 $4x-3y=0$ 的距离不大于 3，则 a 的取值范围是 $\underline{\left[\frac{1}{3},\frac{31}{3}\right]}$.

(2)已知点 $A(-3,-4)$，$B(6,3)$ 到直线 $l:ax+y+1=0$ 的距离相等，则实数 a 的值为 $\underline{-\frac{1}{3}\text{或}-\frac{7}{9}}$.

【解析】(1)由题意得 $\frac{|4\times4-3a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\leqslant3$，

化简得 $|16-3a|\leqslant15$，所以 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{31}{3}$.

(2)由题意及点到直线的距离公式得 $\frac{|-3a-4+1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|6a+3+1|}{\sqrt{a^2+1}}$，

解得 $a=-\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{7}{9}$.

探究 2 两条平行直线间的距离

【例 2】求与直线 $l:5x-12y+6=0$ 平行且到 l 的距离为 2 的直线的方程.

【解析】方法一 设所求直线的方程为 $5x-12y+m=0$，

$\because$ 两直线间的距离为 2，$\therefore \frac{|6-m|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=2$，

$\therefore m=32$ 或 $m=-20$.

$\therefore$ 所求直线的方程为 $5x-12y+32=0$ 或 $5x-12y-20=0$.

方法二 设所求直线的方程为 $5x-12y+c=0$.

在直线 $5x-12y+6=0$ 上取一点 $P_0\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

点 P_0 到直线 $5x-12y+c=0$ 的距离为：

$$d=\frac{\left|-12\times\frac{1}{2}+c\right|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|c-6|}{13},$$

由题意得 $\frac{|c-6|}{13}=2$，则 $c=32$ 或 $c=-20$.

$\therefore$ 所求直线的方程为 $5x-12y+32=0$ 或 $5x-12y-20=0$.

点睛(1)针对这种类型的题目一般有两种思路：

①利用“化归”思想将求两条平行直线间的距离转化为求其中一条直线上任意一点到另一条直线的距离；

②利用两条平行直线间的距离公式 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(2)当两条直线都与 x 轴(或 y 轴)垂直时，可利用数形结合的方法来解决.

①当两条直线都与 x 轴垂直时，$l_1:x=x_1$，$l_2:x=x_2$，则 $d=|x_2-x_1|$；

②当两条直线都与 y 轴垂直时，$l_1:y=y_1$，$l_2:y=y_2$，则 $d=|y_2-y_1|$.

【变式训练 2】(1)已知两条直线 $3x+y-3=0$ 和 $6x+my-1=0$ 平行，则它们之间的距离为 $\underline{\frac{\sqrt{10}}{4}}$.

(2)已知直线 l 与两条直线 $l_1:2x-y+3=0$ 和 $l_2:2x-y-1=0$ 的距离相等，则 l 的方程为 $\underline{2x-y+1=0}$.

【解析】(1)由题意得 $\frac{6}{3}=\frac{m}{1}$，$\therefore m=2$.

将直线 $3x+y-3=0$ 化为 $6x+2y-6=0$，

由两平行线间距离公式得：

$\frac{|-1+6|}{\sqrt{6^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

(2)设直线 l 的方程为 $2x-y+c=0$，

由题意知 $\frac{|3-c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|c+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$，

得 $c=1$，

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $2x-y+1=0$.

探究 3 距离公式的应用

【例 3】求点 $P(-5,13)$ 关于直线 $l:2x-3y-3=0$ 的对称点 P' 的坐标.

【解析】设 P' 的坐标为 (x_0,y_0)，

则线段 PP' 中点 Q 的坐标为 $\left(\frac{x_0-5}{2},\frac{y_0+13}{2}\right)$.

$\because Q$ 在直线 l 上，

$\therefore 2\cdot\frac{x_0-5}{2}-3\cdot\frac{y_0+13}{2}-3=0$，

即 $2x_0-3y_0-55=0$. ①

又 $\because PP'\perp l$，$\therefore k_l\cdot k_{PP'}=-1$，

即 $\frac{2}{3}\cdot\frac{y_0-13}{x_0+5}=-1$，

即 $3x_0+2y_0-11=0$. ②

联立①②解得 $\begin{cases}x_0=11,\\y_0=-11,\end{cases}$

$\therefore P'$ 的坐标为 $(11,-11)$.

点睛(1)点关于直线对称的点的求法

点 $N(x_0,y_0)$关于直线 $l:Ax+By+C=0$ 的对称点 $M(x,y)$

可由方程组$\begin{cases}\dfrac{y-y_0}{x-x_0}\left(-\dfrac{A}{B}\right)=-1(AB\neq0),\\ A\cdot\dfrac{x+x_0}{2}+B\cdot\dfrac{y+y_0}{2}+C=0\end{cases}$求得.

(2)直线关于直线对称的直线的求法

求直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 关于直线 $l:Ax+By+C=0$ 对称的直线 l_2 的方程的方法是转化为点关于直线对称,在 l_1 上任取两点 P_1 和 P_2,求出 P_1,P_2 关于直线 l 的对称点,再用两点式求出 l_2 的方程.

(3)解决最值问题的关键是理解式子表示的几何意义,将"数"转化为"形",从而利用图形的直观性加以解决.

【变式训练 3】若动点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$分别在直线 $l_1:x+y-7=0$ 和 $l_2:x+y-5=0$ 上移动,则 AB 的中点 M 到原点的距离的最小值是 (A)

A. $3\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{2}$

【解析】由题意知,M 点的轨迹为平行于直线 l_1,l_2 且到 l_1,l_2 距离相等的直线 l,其方程为 $x+y-6=0$,∴M 到原点的距离的最小值即是原点到 l 的距离,为 $d=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

随堂小练

1. 已知点 $A(a,2)(a>0)$到直线 $l:x-y+3=0$ 的距离为 1,则 $a=$ (C)

A. $\sqrt{2}$ B. $2-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{2}+1$

【解析】由点到直线的距离公式,得$\dfrac{|a-2+3|}{\sqrt{2}}=1$,

即 $|a+1|=\sqrt{2}$,所以 $a=\sqrt{2}-1$ 或 $a=-\sqrt{2}-1$.

又因为 $a>0$,所以 $a=\sqrt{2}-1$.

2. 若两条平行直线 $3x-2y-1=0$ 与 $6x+ay+c=0$ 间的距离为$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$,则$\dfrac{c+2}{a}=$__±1__.

【解析】由 $3x-2y-1=0$ 和 $6x+ay+c=0$ 平行,得 $\dfrac{3}{2}=-\dfrac{6}{a}$,所以 $a=-4$.所以 $3x-2y-1=0$ 化为 $6x-4y-2=0$.所以$\dfrac{|c+2|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$,解得 $c+2=4$ 或 $c+2=-4$.

所以$\dfrac{c+2}{a}=\pm1$.

3. 已知直线 l 在 x 轴上的截距为 1,且点 $A(-2,-1)$,$B(4,5)$到 l 的距离相等,则 l 的方程为__$x=1$ 或 $x-y-1=0$__.

【解析】显然 $l\perp x$ 轴时符合要求,此时 l 的方程为 $x=1$;

l 不垂直于 x 轴时,设 l 的斜率为 k,则 l 的方程为 $y=k(x-1)$,即 $kx-y-k=0$.

∵点 A,B 到 l 的距离相等,

∴$\dfrac{|-2k+1-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|4k-5-k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

∴$|1-3k|=|3k-5|$,

∴$k=1$,∴l 的方程为 $x-y-1=0$.

综上,l 的方程为 $x=1$ 或 $x-y-1=0$.

4. 已知点 $A(4,-3)$,$B(2,-1)$和直线 $l:4x+3y-2=0$,求一点 P,使$|PA|=|PB|$,且点 P 到直线 l 的距离等于 2.

【解析】方法一 设点 P 的坐标为(a,b),

由$|PA|=|PB|$,得

$(4-a)^2+(-3-b)^2=(2-a)^2+(-1-b)^2$,

化简,得 $a-b=5$.①

由点 P 到直线 l 的距离等于 2,得

$\dfrac{|4a+3b-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$.②

由方程①②联立解得$\begin{cases}a=1,\\b=-4\end{cases}$或$\begin{cases}a=\dfrac{27}{7},\\b=-\dfrac{8}{7}.\end{cases}$

所以,所求的点为 $P(1,-4)$或 $P\left(\dfrac{27}{7},-\dfrac{8}{7}\right)$.

方法二 设点 P 的坐标为(a,b),

因为 $A(4,-3)$,$B(2,-1)$,所以线段 AB 中点 M 的坐标为$(3,-2)$.而直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{-3-(-1)}{4-2}=-1$,

所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-(-2)=x-3$,

即 $x-y-5=0$.

而点 $P(a,b)$在直线 $x-y-5=0$ 上,

故 $a-b-5=0$,①

由已知点 P 到 l 的距离为 2,

得$\dfrac{|4a+3b-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$,②

由方程①②联立,解得$\begin{cases}a=1,\\b=-4\end{cases}$或$\begin{cases}a=\dfrac{27}{7},\\b=-\dfrac{8}{7}.\end{cases}$

所以,所求的点为 $P(1,-4)$或 $P\left(\dfrac{27}{7},-\dfrac{8}{7}\right)$.

温馨提示:请自主完成课后作业(十八)

课后作业·单独成册

2.4 圆的方程

第 1 课时 圆的标准方程

学习目标	核心素养
1. 会用定义推导圆的标准方程并掌握圆的标准方程的特征.(重点) 2. 能根据所给条件求圆的标准方程.(重点) 3. 掌握点与圆的位置关系.(重点)	1. 通过圆的标准方程及其特征的学习,培养数学抽象素养. 2. 借助圆的标准方程的求解与应用,提升数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 圆的定义

圆是平面上到定点的距离等于定长的点的集合.其中定点是圆的圆心,定长是圆的半径.

2. 圆的标准方程

圆心为(a,b),半径为 r 的圆的标准方程为$\underline{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$.当 $a=b=0$ 时,方程为 $x^2+y^2=r^2$,表示以__原点__为圆心,半径为 r 的圆.

3. 点与圆的位置关系

点与圆有三种位置关系,即点在圆外、点在圆上、点在圆内.判断点与圆的位置关系的方法有几何法和代数法.

(1)几何法:将所给的点 M 到圆心 C 的距离跟半径 r 比较:

若$|CM|=r$,则点 M 在__圆 C 上__;

若$|CM|>r$,则点 M 在__圆 C 外__;

若$|CM|<r$,则点 M 在__圆 C 内__.

(2)代数法:可以利用圆 C 的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 来确定:

若$(m-a)^2+(n-b)^2=r^2$,则点 $M(m,n)$在__圆 C 上__;

若$(m-a)^2+(n-b)^2>r^2$,则点 $M(m,n)$在__圆 C 外__;

若$(m-a)^2+(n-b)^2<r^2$,则点 $M(m,n)$在__圆 C 内__.

小试牛刀

1. 圆心为(1,1)且过原点的圆的标准方程是 (D)

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

B. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

D. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

【解析】圆的半径 $r=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$,

圆心坐标为(1,1),

所以圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

2. 已知 $M(5,-7)$和圆$(x-2)^2+(y+3)^2=25$,则点 M 在 (B)

A. 圆内　　B. 圆上

C. 圆外　　D. 无法确定

【解析】因为$(5-2)^2+(-7+3)^2=25$,所以点 M 在圆上.

3. 写出下列方程表示的圆的圆心坐标和半径:

(1)$(x+3)^2+y^2=4$ 的圆心坐标为__$(-3,0)$__,半径为__2__;

(2)$(x-2)^2+(y+1)^2=5$ 的圆心坐标为__$(2,-1)$__,半径为__$\sqrt{5}$__;

(3)$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2(a<0)$的圆心坐标为__$(-1,a)$__,半径为__$-a$__.

互动课堂

合作探究

探究 1 求圆的标准方程

【例 1】已知圆过两点 $A(3,1)$,$B(-1,3)$,且它的圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上,求此圆的标准方程.

【解析】方法一 设所求圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

依题意,有$\begin{cases}(3-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\(-1-a)^2+(3-b)^2=r^2,\\3a-b-2=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}a^2+b^2-6a-2b=r^2-10,\\a^2+b^2+2a-6b=r^2-10,\\3a-b-2=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=4,\\r^2=10.\end{cases}$

故所求圆的标准方程为$(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

方法二 直线 AB 的斜率$k=\dfrac{3-1}{-1-3}=-\dfrac{1}{2}$,

所以线段 AB 的垂直平分线 l 的斜率为 2.

线段 AB 的中点的横坐标和纵坐标分别为 $x=\frac{3-1}{2}=1$，$y=\frac{1+3}{2}=2$，

因此直线 l 的方程为 $y-2=2(x-1)$，

即 $2x-y=0$.

又因为圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，

所以圆心是这两条直线的交点.

联立方程，得 $\begin{cases}2x-y=0,\\3x-y-2=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=4.\end{cases}$

设圆心为 C，所以圆心 $C(2,4)$.

又因为半径 $r=|CA|=\sqrt{10}$，

所以所求圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

方法三　设圆心为 C.

因为圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，

所以可设圆心 C 的坐标为 $(a,3a-2)$.

又因为 $|CA|=|CB|$，

所以 $\sqrt{(a-3)^2+(3a-2-1)^2}$

$=\sqrt{(a+1)^2+(3a-2-3)^2}$，

解得 $a=2$.

所以圆心 $C(2,4)$，半径长 $r=|CA|=\sqrt{10}$.

故所求圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

点睛 (1)用直接法求圆的标准方程的策略

①确定圆的标准方程只需确定圆心坐标和半径，因此用直接法求圆的标准方程时，一般先从确定圆的两个要素入手，即首先求出圆心坐标和半径，然后直接写出圆的标准方程.

②确定圆心和半径时，常用到中点坐标公式、两点间距离公式，有时还用到平面几何知识，如“弦的中垂线必过圆心”“两条弦的中垂线的交点必为圆心”等.

(2)用待定系数法求圆的标准方程的一般步骤

设方程 —— 设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

↓

列方程组 —— 由已知条件，建立关于 a,b,r 的方程组

↓

解方程组 —— 解方程组，求出 a,b,r

↓

得方程 —— 将 a,b,r 代入所设方程，得所求圆的方程

【变式训练 1】求下列圆的标准方程：

(1)圆心在 y 轴上，半径为 5，且过点 $(3,-4)$；

(2)已知圆和直线 $x-6y-10=0$ 相切于点 $(4,-1)$，且经过点 $(9,6)$；

(3)圆过 $A(5,1)$，$B(1,3)$ 两点，圆心在 x 轴上.

【解析】(1)设圆心坐标为 $(0,b)$，

则 $\sqrt{(3-0)^2+(-4-b)^2}=5$，

得 $b=0$ 或 $b=-8$，

所以圆的标准方程为 $x^2+y^2=25$ 或 $x^2+(y+8)^2=25$.

(2)因为圆和直线 $x-6y-10=0$ 相切于点 $(4,-1)$，

所以过点 $(4,-1)$ 的直径所在直线的斜率为 $-\frac{1}{\frac{1}{6}}=-6$.

其方程为 $y+1=-6(x-4)$，

即 $y=-6x+23$.

又因为圆心在以 $(4,-1)$，$(9,6)$ 两点为端点的线段的中垂线 $y-\frac{5}{2}=-\frac{5}{7}\left(x-\frac{13}{2}\right)$ 上，

即 $5x+7y-50=0$ 上，

所以由 $\begin{cases}y=-6x+23,\\5x+7y-50=0,\end{cases}$

解得圆心坐标为 $(3,5)$，

所以半径为 $\sqrt{(9-3)^2+(6-5)^2}=\sqrt{37}$，

故所求圆的标准方程为 $(x-3)^2+(y-5)^2=37$.

(3)线段 AB 的垂直平分线为

$y-2=2(x-3)$，

令 $y=0$，则 $x=2$，

所以圆心坐标为 $(2,0)$，

半径 $r=\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$，

故圆的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=10$.

探究 2　点与圆的位置关系的判断

【例 2】已知点 $A(1,2)$ 不在圆 $C:(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2$ 的内部，求实数 a 的取值范围.

【解析】由题意，得点 A 在圆 C 上或圆 C 的外部，

$\therefore (1-a)^2+(2+a)^2\geqslant 2a^2$，

$\therefore 2a+5\geqslant 0$，$\therefore a\geqslant -\frac{5}{2}$，又 $a\neq 0$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{5}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$.

点睛 判断点 $P(x_0,y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系的方法有几何法与代数法.

(1)几何法：主要是利用点与圆心的距离与半径比较大小.

(2)代数法：主要是把点的坐标直接代入圆的标准方程，具体判断方法如下：

①当 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$ 时，点在圆内；

②当 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ 时，点在圆上；

③当 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$ 时，点在圆外.

【变式训练 2】(1)已知点 $(1,1)$ 在圆 $(x-a)^2+(y+a)^2=4$ 的外部，则 a 的取值范围是 <u>$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$</u>.

(2)已知点 $M(5\sqrt{a}+1,\sqrt{a})$ 在圆 $(x-1)^2+y^2=26$ 的内部，则 a 的取值范围是 <u>$[0,1)$</u>.

【解析】(1)由题意知，$(1-a)^2+(1+a)^2>4$，$2a^2-2>0$，即 $a<-1$ 或 $a>1$.

(2)由题意知 $(5\sqrt{a}+1-1)^2+(\sqrt{a})^2<26$，

即 $\begin{cases}26a<26,\\a\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a<1$.

探究3 与圆有关的最值问题

【例3】已知实数 x,y 满足方程 $(x-2)^2+y^2=3$.

(1)求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值；

(2)求 $y-x$ 的最大值和最小值；

(3)求 x^2+y^2 的最大值和最小值.

【解析】(1)原方程表示以点 $(2,0)$ 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆，设 $\frac{y}{x}=k$，即 $y=kx$，

当直线 $y=kx$ 与圆相切时，斜率 k 取最大值和最小值，此时 $\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$.

故 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$，最小值为 $-\sqrt{3}$.

(2)设 $y-x=b$，即 $y=x+b$，

当 $y=x+b$ 与圆相切时，纵截距 b 取最大值和最小值，

此时 $\frac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，即 $b=-2\pm\sqrt{6}$.

故 $y-x$ 的最大值为 $-2+\sqrt{6}$，最小值为 $-2-\sqrt{6}$.

(3)x^2+y^2 表示圆上的点与原点距离的平方，由平面几何知识知，它在原点与圆心所在直线与圆的两个交点处取得最大值和最小值，又圆心到原点的距离为2，

故 $(x^2+y^2)_{max}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$，

$(x^2+y^2)_{min}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

点睛 与圆有关的最值问题，常见的有以下几种类型：

(1)形如 $u=\frac{y-b}{x-a}$ 形式的最值问题，可转化为过点 (x,y) 和 (a,b) 的动直线斜率的最值问题；

(2)形如 $l=ax+by$ 形式的最值问题，可转化为动直线 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{l}{b}$ 截距的最值问题；

(3)形如 $u=(x-a)^2+(y-b)^2$ 形式的最值问题，可转化为动点 (x,y) 到定点 (a,b) 的距离的平方的最值问题.

【变式训练3】若实数 x,y 满足 $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$，则 x^2+y^2 的最小值是__1__.

【解析】x^2+y^2 表示圆上的点 (x,y) 与 $(0,0)$ 间距离的平方，由几何意义可知，最小值为 $14-\sqrt{5^2+12^2}=1$.

随堂小练

1. 点 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 的位置关系是 (C)

A. 点在圆上　　B. 点在圆内

C. 点在圆外　　D. 不能确定

【解析】因为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1>\frac{1}{2}$，故点 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在圆外.

2. 已知一圆的圆心为点 $A(2,-3)$，一条直径的端点分别在 x 轴和 y 轴上，则圆的方程是 (B)

A. $(x+2)^2+(y-3)^2=13$

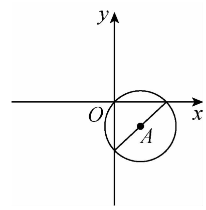
B. $(x-2)^2+(y+3)^2=13$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2=52$

D. $(x+2)^2+(y-3)^2=52$

【解析】如图，结合圆的性质可知原点在圆上，

圆的半径 $r=\sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{13}$.



故所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=13$.

3. 若圆 C 与圆 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ 关于原点对称，则圆 C 的方程是 (A)

A. $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

B. $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

D. $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

【解析】已知圆的圆心为 $(-2,1)$，

关于原点的对称点的坐标为 $(2,-1)$，

∴圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

4. 圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上的点到直线 $x-y=2$ 的距离的最大值是__$\sqrt{2}+1$__.

【解析】圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心坐标为 $(1,1)$，则圆心到直线 $x-y=2$ 的距离 $d=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，故圆上的点到直线 $x-y=2$ 的距离的最大值为 $\sqrt{2}+1$.

5. 若圆 C 的半径为1，圆心在第一象限，且与直线 $4x-3y=0$ 和 x 轴都相切，则该圆的标准方程是__$(x-2)^2+(y-1)^2=1$__.

【解析】∵圆心在第一象限，而且与 x 轴相切，

∴可设圆心坐标为 $(a,1)$，

∵圆心到直线 $4x-3y=0$ 的距离为1，

∴ $\frac{|4a-3|}{5}=1$，得 $a=2$ 或 $a=-\frac{1}{2}$（舍去），

∴该圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十九）

课后作业·单独成册

第2课时 圆的一般方程

学习目标	核心素养
1. 了解二元二次方程与圆的一般方程之间的关系. 2. 理解记忆圆的一般方程的代数特征,理解方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件.(难点) 3. 掌握圆的一般方程及其特点,能把圆的一般方程化为圆的标准方程,会由圆的一般方程求出圆心坐标和半径,会用待定系数法求圆的一般方程.(重点)	1. 通过圆的一般方程的学习,培养数学抽象素养. 2. 借助圆的一般方程的求解及其应用,培养数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 圆的一般方程

(1)当 $\underline{D^2+E^2-4F>0}$ 时,方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 叫做圆的一般方程,其圆心坐标为 $\underline{\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)}$,半径为 $\underline{\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}}$.

(2)当 $\underline{D^2+E^2-4F=0}$ 时,方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示点 $\underline{\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)}$.

(3)当 $\underline{D^2+E^2-4F<0}$ 时,方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 不表示任何图形.

2. 由圆的一般方程判断点与圆的位置关系

已知点 $M(x_0,y_0)$ 和圆的方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$. 则其位置关系如下表:

位置关系	代数关系
点 M 在圆外	$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0$
点 M 在圆上	$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$
点 M 在圆内	$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0$

小试牛刀

1. 圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 的圆心坐标及半径分别为 (B)

A. $(2,0),5$　　B. $(2,0),\sqrt{5}$

C. $(0,2),\sqrt{5}$　　D. $(2,2),5$

【解析】$x^2+y^2-4x-1=0$ 可化为 $(x-2)^2+y^2=5$,

∴圆心坐标为 $(2,0)$,半径 $r=\sqrt{5}$.

2. 若直线 $3x+y+a=0$ 过圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 的圆心,则 a 的值为 (B)

A. -1　　B. 1

C. 3　　D. -3

【解析】∵圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 的圆心坐标为 $(-1,2)$,

∴$3x+y+a=0$ 过点 $(-1,2)$,即 $-3+2+a=0$,∴$a=1$.

3. 圆 $x^2+y^2-2x+6y+8=0$ 的半径为 $\underline{\sqrt{2}}$.

【解析】由圆的方程可求得圆的半径 $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+6^2-4\times 8}}{2}=\sqrt{2}$.

4. 过 $O(0,0)$,$A(3,0)$,$B(0,4)$ 三点的圆的一般方程为 $\underline{x^2+y^2-3x-4y=0}$.

【解析】该圆的圆心坐标为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$,半径为 $\frac{5}{2}$,

故其标准方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$.

化成一般方程为 $x^2+y^2-3x-4y=0$.

互动课堂

合作探究

探究1 圆的一般方程的定义

【例1】判断方程 $x^2+y^2-4mx+2my+20m-20=0$ 能否表示圆,若能表示圆,求出圆心坐标和半径.

【解析】方法一　由方程 $x^2+y^2-4mx+2my+20m-20=0$,知 $D=-4m$,$E=2m$,$F=20m-20$,

故 $D^2+E^2-4F=16m^2+4m^2-80m+80=20(m-2)^2$.

因此,当 $m=2$ 时,它表示一个点;

当 $m\neq 2$ 时,原方程表示圆,此时,圆的圆心坐标为 $(2m,-m)$,半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\sqrt{5}|m-2|$.

方法二　原方程可化为 $(x-2m)^2+(y+m)^2=5(m-2)^2$.

因此，当 $m=2$ 时，它表示一个点；

当 $m\neq 2$ 时，原方程表示圆，此时，圆的圆心坐标为 $(2m,-m)$，半径 $r=\sqrt{5}|m-2|$.

点睛 对形如 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的二元二次方程，判断其能否表示圆时有如下两种方法：

(1)由圆的一般方程的定义，判断 D^2+E^2-4F 是否为正. 若 $D^2+E^2-4F>0$，则方程能表示圆，否则不能表示圆.

(2)将方程配方变为“标准”形式后，根据圆的标准方程的特征，观察其是否能表示圆.

【变式训练 1】(1)若方程 $2x^2+2y^2+2ax-2ay=0(a\neq 0)$ 表示圆，则圆心坐标和半径分别为 $\underline{\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right),\frac{\sqrt{2}|a|}{2}}$.

(2)点 M,N 在圆 $x^2+y^2+kx+2y-4=0$ 上，且点 M,N 关于直线 $x-y+1=0$ 对称，则该圆的面积为 $\underline{9\pi}$.

【解析】(1)方程 $2x^2+2y^2+2ax-2ay=0(a\neq 0)$

可化为 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$，

圆心坐标为 $\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{2}|a|}{2}$.

(2)圆 $x^2+y^2+kx+2y-4=0$ 的圆心坐标是 $\left(-\frac{k}{2},-1\right)$，

由圆的性质知直线 $x-y+1=0$ 经过圆心，

$\therefore -\frac{k}{2}+1+1=0$，得 $k=4$，

圆 $x^2+y^2+4x+2y-4=0$ 的半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2+16}=3$，

$\therefore$ 该圆的面积为 9π.

探究 2 求圆的一般方程

【例 2】已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1,4)$，$B(-2,3)$，$C(4,-5)$，求 $\triangle ABC$ 的外接圆方程、圆心坐标和外接圆半径.

【解析】方法一 设 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

$\because A,B,C$ 在圆上，

$\therefore\begin{cases}1+16+D+4E+F=0,\\4+9-2D+3E+F=0,\\16+25+4D-5E+F=0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}D=-2,\\E=2,\\F=-23,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆方程为 $x^2+y^2-2x+2y-23=0$，

即 $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

$\therefore$ 圆心坐标为 $(1,-1)$，外接圆半径为 5.

方法二 设 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

$\because A,B,C$ 在圆上，

$\therefore\begin{cases}(1-a)^2+(4-b)^2=r^2,\\(-2-a)^2+(3-b)^2=r^2,\\(4-a)^2+(-5-b)^2=r^2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\\r=5,\end{cases}$ 即外接圆的圆心坐标为 $(1,-1)$，半径为 5，

$\therefore$ 圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=25$，展开易得其一般方程为 $x^2+y^2-2x+2y-23=0$.

方法三 $\because k_{AB}=\frac{4-3}{1+2}=\frac{1}{3}$，$k_{AC}=\frac{4+5}{1-4}=-3$，

$\therefore k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$，

$\therefore AB\perp AC$.

$\therefore \triangle ABC$ 是以角 A 为直角的直角三角形.

$\therefore$ 圆心是线段 BC 的中点，

坐标为 $(1,-1)$，$r=\frac{1}{2}|BC|=5$.

$\therefore$ 外接圆方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

展开得一般方程为 $x^2+y^2-2x+2y-23=0$.

点睛 应用待定系数法求圆的方程的方法

(1)对于由已知条件容易求得圆心坐标、半径或是需利用圆心坐标或半径列方程的问题，一般采用圆的标准方程，再用待定系数法求出 a,b,r；

(2)如果已知条件与圆心和半径都无直接关系，一般采用圆的一般方程，再用待定系数法求出常数 D,E,F.

【变式训练 2】已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(2,2)$，$B(5,3)$，$C(3,-1)$.

(1)求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程；

(2)若点 $M(a,2)$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，求 a 的值.

【解析】(1)设 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

由题意得 $\begin{cases}2^2+2^2+2D+2E+F=0,\\5^2+3^2+5D+3E+F=0,\\3^2+(-1)^2+3D-E+F=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}D=-8,\\E=-2,\\F=12.\end{cases}$

即 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$.

(2)由(1)知，$\triangle ABC$ 的外接圆方程为 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$，

$\because$ 点 $M(a,2)$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，

$\therefore a^2+2^2-8a-2\times 2+12=0$，

即 $a^2-8a+12=0$，解得 $a=2$ 或 $a=6$.

探究3 与圆有关的轨迹问题

【例3】已知 $A(2,0)$ 为圆 $x^2+y^2=4$ 上一定点，$B(1,1)$ 为圆内一点，P,Q 为圆上的动点.

(1)求线段 AP 中点的轨迹方程；

(2)若 $\angle PBQ=90^\circ$，求线段 PQ 中点的轨迹方程.

【解析】(1)设 AP 的中点为 $M(x,y)$，由中点坐标公式可知，P 点坐标为 $(2x-2,2y)$.

因为 P 点在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

所以 $(2x-2)^2+(2y)^2=4$.

故线段 AP 中点的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.

(2)设 PQ 的中点为 $N(x,y)$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBQ$ 中，$|PN|=|BN|$，

设 O 为坐标原点，连接 ON，则 $ON\perp PQ$，

所以 $|OP|^2=|ON|^2+|PN|^2=|ON|^2+|BN|^2$.

所以 $x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

故线段 PQ 中点的轨迹方程为 $x^2+y^2-x-y-1=0$.

点睛 求与圆有关的轨迹问题常用的方法

(1)直接法：根据题目的条件，建立适当的平面直角坐标系，设出动点坐标，并找出动点坐标所满足的关系式.

(2)定义法：当列出的关系式符合圆的定义时，可利用定义写出动点的轨迹方程.

(3)相关点法：若动点 $P(x,y)$ 随着圆上的另一动点 $Q(x_1,y_1)$ 运动而运动，且 x_1,y_1 可用 x,y 表示，则可将 Q 点的坐标代入已知圆的方程，即得动点 P 的轨迹方程.

【变式训练3】已知点 $P(10,0)$，Q 为圆 $x^2+y^2=16$ 上一动点. 当 Q 在圆上运动时，求 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

【解析】设 $M(x,y)$ 为所求轨迹上任意一点，$Q(x_0,y_0)$.

因为 M 是 PQ 的中点，

所以 $\begin{cases}x=\dfrac{10+x_0}{2},\\ y=\dfrac{0+y_0}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=2x-10,\\ y_0=2y.\end{cases}$ ①

因为 $Q(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=16$ 上，所以 $x_0^2+y_0^2=16$.

将①代入得 $(2x-10)^2+(2y)^2=16$，即 $(x-5)^2+y^2=4$，

故中点 M 的轨迹方程为 $(x-5)^2+y^2=4$.

随堂小练

1. 方程 $x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2=0$ 表示的图形为 (D)

A. 以 (a,b) 为圆心的圆　　B. 以 $(-a,-b)$ 为圆心的圆

C. 点 (a,b)　　D. 点 $(-a,-b)$

【解析】原方程可化为 $(x+a)^2+(y+b)^2=0$，

$\therefore\begin{cases}x+a=0,\\ y+b=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-a,\\ y=-b.\end{cases}$

$\therefore$ 表示点 $(-a,-b)$.

2. 当 a 为任意实数时，直线 $(a-1)x-y+a+1=0$ 恒过定点 C，则以 C 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆的方程为 (C)

A. $x^2+y^2-2x+4y=0$　　B. $x^2+y^2+2x+4y=0$

C. $x^2+y^2+2x-4y=0$　　D. $x^2+y^2-2x-4y=0$

【解析】直线 $(a-1)x-y+a+1=0$ 可化为 $(-x-y+1)+a(1+x)=0$，

由 $\begin{cases}-x-y+1=0,\\ x+1=0\end{cases}$ 得 $C(-1,2)$.

$\therefore$ 圆的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$，

即 $x^2+y^2+2x-4y=0$.

3. 若以 6 为直径的圆 M 恰好经过点 $C(1,-1)$，则圆心 M 的轨迹方程是 $\underline{(x-1)^2+(y+1)^2=9}$.

【解析】设圆心为 $M(x,y)$. 由直径为 6 知圆 M 的半径长 $r=3$，则 $|MC|=3$，即 $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=3$，

所以 $(x-1)^2+(y+1)^2=9$.

4. 已知圆 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ 关于直线 $y=2x+b$ 成轴对称，则 $a-b$ 的取值范围是 $\underline{(-\infty,1)}$.

【解析】由题意知，直线 $y=2x+b$ 过圆心，而圆心坐标为 $(-1,2)$，代入直线方程，得 $b=4$，

圆的方程化为标准方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5-a$，

所以 $a<5$，由此，得 $a-b<1$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十)

课后作业·单独成册

2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系

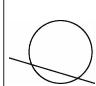
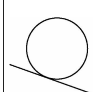
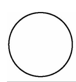
第 1 课时 直线与圆的位置关系

学习目标	核心素养
1. 了解用代数方法解决几何问题的思想. 2. 掌握直线与圆的位置关系的定义及其判断方法.(重点) 3. 掌握直线与圆的位置关系的性质.(难点)	1. 通过直线与圆的位置关系的学习,培养直观想象和逻辑推理素养. 2. 通过解决直线与圆位置关系的综合问题,培养数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 直线与圆的位置关系及判断

位置关系		相交	相切	相离
公共点个数		2 个	1 个	0 个
判断方法	几何法:设圆心到直线的距离 $d=\frac{\lvert Aa+Bb+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	$d<r$	$d=r$	$d>r$
	代数法:由 $\begin{cases}Ax+By+C=0,\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$ 消元得到一元二次方程的判别式 Δ	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
图形				

2. 求圆的切线的方法

(1)求过圆上一点 (x_0,y_0) 的圆的切线方程

先求切点与圆心的连线的斜率 k,则由垂直关系,知切线斜率为 $-\frac{1}{k}$,由点斜式方程可求得切线方程. 如果 $k=0$ 或 k 不存在,则由图形可直接得切线方程为 $y=y_0$ 或 $x=x_0$.

(2)求过圆外一点 (x_0,y_0) 的圆的切线方程

几何法:设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,即 $kx-y-kx_0+y_0=0$. 由圆心到直线的距离等于半径,可求得 k,即可求出切线方程. 并注意检验当 k 不存在时,直线 $x=x_0$ 是否为圆的切线.

代数法:设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,即 $y=kx-kx_0+y_0$,代入圆的方程,得到一个关于 x 的一元二次方程,由 $\Delta=0$ 求得 k,即可求出切线方程. 并注意检验当 k 不存在时,直线 $x=x_0$ 是否为圆的切线.

小试牛刀

1. 直线 $3x+4y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系是 (B)

A. 相交　　B. 相切

C. 相离　　D. 无法判断

【解析】圆心 $(0,0)$ 到直线 $3x+4y-5=0$ 的距离 $d=\frac{\lvert -5\rvert}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$,又圆 $x^2+y^2=1$ 的半径 $r=1$,∴$d=r$,故直线与圆相切.

2. 设直线 l 过点 $P(-2,0)$,且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切,则 l 的斜率是 (C)

A. ± 1　　B. $\pm\frac{1}{2}$　　C. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

【解析】设 l:$y=k(x+2)$,即 $kx-y+2k=0$.

又 l 与圆相切,∴$\frac{\lvert 2k\rvert}{\sqrt{1+k^2}}=1$. ∴$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 被圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦长为 (C)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. $4\sqrt{6}$

【解析】圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$,圆心 $(1,2)$ 到直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 的距离 $d=\frac{\lvert 1+2\times 2-5+\sqrt{5}\rvert}{\sqrt{1^2+2^2}}=$

1,所以弦长为 $2\sqrt{5-1^2}=4$.

4.若直线 $x+y-m=0$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 相离,则 m 的取值范围是 ___$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$___.

【解析】因为直线 $x+y-m=0$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 相离,

所以 $\frac{|-m|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{2}$,解得 $m<-2$ 或 $m>2$.

即 m 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

互动课堂

合作探究

探究1 直线与圆的位置关系的判断

【例1】已知直线方程 $mx-y-m-1=0$,圆的方程 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$. 当 m 为何值时,圆与直线:

(1)有两个公共点;

(2)只有一个公共点;

(3)没有公共点.

【解析】方法一 将直线 $mx-y-m-1=0$ 代入圆的方程化简整理得,

$(1+m^2)x^2-2(m^2+2m+2)x+m^2+4m+4=0$.

$\because \Delta=4m(3m+4)$,

$\therefore$ 当 $\Delta>0$,即 $m>0$ 或 $m<-\frac{4}{3}$ 时,直线与圆相交,即直线与圆有两个公共点;

当 $\Delta=0$,即 $m=0$ 或 $m=-\frac{4}{3}$ 时,直线与圆相切,即直线与圆只有一个公共点;

当 $\Delta<0$,即 $-\frac{4}{3}<m<0$ 时,直线与圆相离,即直线与圆没有公共点.

方法二 已知圆的方程可化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$,

可得圆心坐标为 $(2,1)$,半径 $r=2$.

圆心到直线 $mx-y-m-1=0$ 的距离

$d=\frac{|2m-1-m-1|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|m-2|}{\sqrt{1+m^2}}$.

当 $d<2$,即 $m>0$ 或 $m<-\frac{4}{3}$ 时,直线与圆相交,即直线与圆有两个公共点;

当 $d=2$,即 $m=0$ 或 $m=-\frac{4}{3}$ 时,直线与圆相切,即直线与圆只有一个公共点;

当 $d>2$,即 $-\frac{4}{3}<m<0$ 时,直线与圆相离,即直线与圆没有公共点.

点睛 直线与圆的位置关系的三种判断方法

(1)几何法:由圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的大小关系判断.

(2)代数法:根据直线与圆的方程组成的方程组的解的个数判断.

(3)直线系法:若直线恒过定点,可通过点与圆的位置关系判断,但有一定的局限性,必须是过定点的直线系.

【变式训练1】若直线 $4x-3y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2=100$ 有如下关系:(1)相交;(2)相切;(3)相离. 试分别求实数 a 的取值范围.

【解析】方法一 (代数法)

由方程组 $\begin{cases}4x-3y+a=0,\\x^2+y^2=100,\end{cases}$

消去 y,得 $25x^2+8ax+a^2-900=0$.

$\Delta=(8a)^2-4\times25(a^2-900)=-36a^2+90\ 000$.

(1)当直线和圆相交时,$\Delta>0$,即 $-36a^2+90\ 000>0$,

解得 $-50<a<50$,

即 a 的取值范围是 $(-50,50)$;

(2)当直线和圆相切时,$\Delta=0$,即 $-36a^2+90\ 000=0$,

解得 $a=50$ 或 $a=-50$;

(3)当直线和圆相离时,$\Delta<0$,即 $-36a^2+90\ 000<0$,

解得 $a<-50$ 或 $a>50$,

即 a 的取值范围是 $(-\infty,-50)\cup(50,+\infty)$.

方法二 (几何法)

圆 $x^2+y^2=100$ 的圆心坐标为 $(0,0)$,半径 $r=10$,

则圆心到直线的距离 $d=\frac{|a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|a|}{5}$,

(1)当直线和圆相交时,$d<r$,即 $\frac{|a|}{5}<10$,解得 $-50<a<50$,即 a 的取值范围是 $(-50,50)$;

(2)当直线和圆相切时,$d=r$,即 $\frac{|a|}{5}=10$,解得 $a=50$ 或 $a=-50$;

(3)当直线和圆相离时,$d>r$,即 $\frac{|a|}{5}>10$,解得 $a<-50$ 或 $a>50$,即 a 的取值范围是 $(-\infty,-50)\cup(50,+\infty)$.

探究2 圆的切线问题

【例2】已知圆 $O:x^2+y^2=16$,求过点 $P(4,6)$ 的圆的切线方程.

【解析】P 点与圆心 $O(0,0)$ 的距离 $d=\sqrt{16+36}>4$,所以 P 在圆外,故过 P 点有两条切线. 若其斜率存在,设切线方程

为 $y-6=k(x-4)$，即 $kx-y+6-4k=0$.

由圆心到切线的距离等于半径 4，可得 $\frac{|6-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=4$，

解之得 $k=\frac{5}{12}$. 故得切线方程为 $5x-12y+52=0$.

若斜率不存在，过点 $P(4,6)$ 的直线为 $x=4$，易知它也是圆 O 的切线.

综上，所求切线方程为 $5x-12y+52=0$ 或 $x=4$.

点睛 (1)过一点 $P(x_0,y_0)$ 求圆的切线方程问题，首先要判断该点与圆的位置关系. 若点在圆外，切线有两条，一般设点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 用待定系数法求解，但要注意斜率不存在的情况；若点在圆上，则切线有一条，用切线垂直于过切点的半径求切线的斜率，再由点斜式可直接得切线方程.

(2)一般地，有关圆的切线问题，若已知切点，则用 $k_1k_2=-1$ (k_1,k_2 分别为切线和圆心与切点连线的斜率)列式；若未知切点，则用 $d=r$(d 为圆心到切线的距离，r 为半径)列式.

【变式训练 2】圆 C 与直线 $2x+y-5=0$ 相切于点 $(2,1)$，且与直线 $2x+y+15=0$ 也相切，求圆 C 的方程.

【解析】设圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

因为两切线 $2x+y-5=0$ 与 $2x+y+15=0$ 平行，

所以 $2r=\frac{|15-(-5)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=4\sqrt{5}$. 所以 $r=2\sqrt{5}$.

所以 $\frac{|2a+b+15|}{\sqrt{2^2+1}}=r=2\sqrt{5}$，

即 $|2a+b+15|=10$；①

$\frac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1}}=r=2\sqrt{5}$，即 $|2a+b-5|=10$. ②

又因为过圆心和切点的直线与切线垂直，

所以 $\frac{b-1}{a-2}=\frac{1}{2}$. ③

联立①②③，解得 $\begin{cases}a=-2,\\ b=-1.\end{cases}$

故所求圆 C 的方程为 $(x+2)^2+(y+1)^2=20$.

探究 3 圆的弦长问题

【例 3】(1)过圆 $x^2+y^2=8$ 内的点 $P(-1,2)$ 作直线 l 交圆于 A,B 两点. 若直线 l 的倾斜角为 $135°$，求弦 AB 的长.

(2)直线 l 经过点 $P(5,5)$，且和圆 C：$x^2+y^2=25$ 相交于 A,B 两点，截得的弦长为 $4\sqrt{5}$，求 l 的方程.

【解析】(1)方法一 (交点法)

由题意知直线 l 的方程为 $y-2=-(x+1)$，

即 $x+y-1=0$.

由 $\begin{cases}x+y-1=0,\\ x^2+y^2=8,\end{cases}$

解得 $A\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2},\frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)$，$B\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2},\frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)$.

$\therefore |AB|=$

$\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2}-\frac{1+\sqrt{15}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2}-\frac{1-\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\sqrt{30}$.

方法二 (弦长公式法)

由题意知直线 l 的方程为 $y-2=-(x+1)$，

即 $x+y-1=0$.

由 $\begin{cases}x+y-1=0,\\ x^2+y^2=8,\end{cases}$

消去 y，得 $2x^2-2x-7=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\therefore x_1+x_2=1$，$x_1x_2=-\frac{7}{2}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+1}\times\sqrt{1^2+4\times\frac{7}{2}}$

$=\sqrt{30}$.

方法三 (几何法)

由题意知直线 l 的方程为 $y-2=-(x+1)$，

即 $x+y-1=0$，

圆心 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离是 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则有 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{8-\frac{1}{2}}=\sqrt{30}$.

(2)方法一 若直线 l 的斜率不存在，

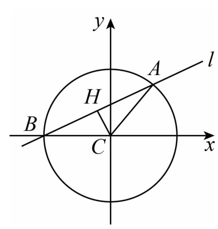
则 l：$x=5$ 与圆 C 相切，不合题意，

所以直线 l 的斜率存在，

设其方程为 $y-5=k(x-5)$，

即 $kx-y+5(1-k)=0$.

如图所示，$|CH|$ 是圆心到直线 l 的距离，



$|CA|$ 是圆的半径，$|AH|$ 是弦长 $|AB|$ 的一半，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHC$ 中，$|CA|=5$，$|AH|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

所以 $|CH|=\sqrt{|CA|^2-|AH|^2}=\sqrt{5}$，

所以$\dfrac{|5(1-k)|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，

解得$k=\dfrac{1}{2}$或$k=2$.

所以直线l的方程为$x-2y+5=0$或$2x-y-5=0$.

方法二 若直线l的斜率不存在，

则$l:x=5$与圆C相切，不合题意，

所以直线l的斜率存在，

设直线l的方程为$y-5=k(x-5)$，

且与圆相交于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$两点，

由$\begin{cases}y-5=k(x-5),\\x^2+y^2=25,\end{cases}$消去$y$，

得$(k^2+1)x^2+10k(1-k)x+25k(k-2)=0$.

所以$\Delta=[10k(1-k)]^2-4(k^2+1)\cdot 25k(k-2)>0$，

解得$k>0$，

又因为$x_1+x_2=-\dfrac{10k(1-k)}{k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{25k(k-2)}{k^2+1}$，

由斜率公式，得$y_1-y_2=k(x_1-x_2)$.

所以$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)\left[\dfrac{100k^2(1-k)^2}{(k^2+1)^2}-4\cdot\dfrac{25k(k-2)}{k^2+1}\right]}$

$=4\sqrt{5}$，

两边平方，整理得$2k^2-5k+2=0$，

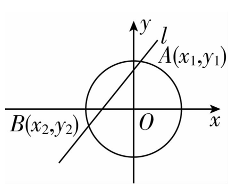
解得$k=\dfrac{1}{2}$或$k=2$，均符合题意.

故直线l的方程为$x-2y+5=0$或$2x-y-5=0$.

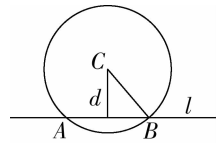
点睛 求直线与圆相交时的弦长的三种方法

(1)交点法：先将直线方程与圆的方程联立，求出交点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，再根据两点间的距离公式$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$求解.

(2)弦长公式法：如图，将直线的方程与圆O的方程联立，设直线l与圆O的两个交点分别是$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|$(直线$l$的斜率$k$存在).



(3)几何法：如图，直线l与圆C交于A,B两点，设弦心距为d，圆的半径为r，弦长为$|AB|$，则有$\left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2+d^2=r^2$，即$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$.通常采用几何法较为简便.



【变式训练3】已知直线$l:kx-y+k+2=0$与圆$C:x^2+y^2=8$.

(1)求证：直线l与圆C相交.

(2)当直线l被圆截得的弦长最短时，求直线l的方程，并求出弦长.

【解析】(1)证明：$\because l:kx-y+k+2=0$，

直线l的方程可化为$y-2=k(x+1)$，

$\therefore$直线l经过定点$(-1,2)$，

$\because(-1)^2+2^2<8$，

$\therefore(-1,2)$在圆C内，

$\therefore$直线l与圆C相交.

(2)由(1)知，直线l过定点$P(-1,2)$，

又$x^2+y^2=8$的圆心为原点O，

则与OP垂直的直线截得的弦长最短，

$\because k_{OP}=-2$，$\therefore k_l=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$直线$l:y-2=\dfrac{1}{2}(x+1)$，

即$x-2y+5=0$.

设直线l与圆交于A、B两点，

$|AB|=2\sqrt{r^2-|OP|^2}=2\sqrt{8-5}=2\sqrt{3}$.

$\therefore$直线l的方程为$x-2y+5=0$，弦长为$2\sqrt{3}$.

随堂小练

1. 已知圆C与直线$x-y=0$及$x-y-4=0$都相切，圆心在直线$x+y=0$上，则圆C的方程为 (B)

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$　B. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　D. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

【解析】由条件，知$x-y=0$与$x-y-4=0$都与圆相切，且平行，所以圆C的圆心C在直线$x-y-2=0$上.由$\begin{cases}x-y-2=0,\\x+y=0,\end{cases}$得圆心$C(1,-1)$.又因为两平行线间距离$d=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，所以所求圆的半径长$r=\sqrt{2}$，故圆$C$的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

2. 在圆 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 内，过点 $E(0,1)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD，则四边形 $ABCD$ 的面积为 (B)

A. $5\sqrt{2}$　　B. $10\sqrt{2}$

C. $15\sqrt{2}$　　D. $20\sqrt{2}$

【解析】圆的方程化为标准形式为 $(x-1)^2+(y-3)^2=10$，由圆的性质可知 $AC\perp BD$，最长弦 $|AC|=2\sqrt{10}$，最短弦 BD 恰以 $E(0,1)$ 为中点.

设点 F 为圆心，则 $F(1,3)$. 故 $|EF|=\sqrt{5}$，

$\therefore |BD|=2\sqrt{10-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=10\sqrt{2}$.

3. 一条光线从点 $(-2,-3)$ 射出，经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为 (D)

A. $-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

【解析】由已知，得点 $(-2,-3)$ 关于 y 轴的对称点的坐标为 $(2,-3)$，由入射光线与反射光线的对称性，知反射光线一定过点 $(2,-3)$. 设反射光线所在直线的斜率为 k，则反射光线所在直线的方程为 $y+3=k(x-2)$，即 $kx-y-2k-3=0$.

由反射光线与圆相切，则有 $d=\frac{|-3k-2-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=-\frac{4}{3}$ 或 $k=-\frac{3}{4}$，故选 D.

4. 圆心为 $C(2,-1)$，被直线 $y=x-1$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$ 的圆的方程为__$(x-2)^2+(y+1)^2=4$__.

【解析】设圆的半径为 r，由条件，得

圆心到直线 $y=x-1$ 的距离为 $d=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

又直线 $y=x-1$ 被圆截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，

即半弦长为 $\sqrt{2}$，

所以 $r^2=2+2=4$，$r=2$，

所以所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十一)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　圆与圆的位置关系

学习目标	核心素养
1. 了解圆与圆的五种位置关系的几何特点. 2. 理解圆与圆的位置关系的判断方法.(重点) 3. 理解圆系方程.(难点)	1. 通过学习圆与圆的位置关系,培养直观想象素养. 2. 借助对圆与圆的位置关系判断的学习,培养数学运算素养.

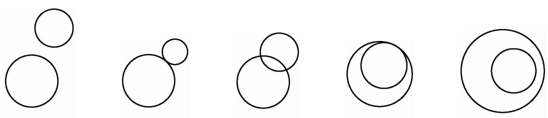
自主预习

知新预学

1. 圆与圆的位置关系

圆与圆有五种位置关系,分别是<u>外离、外切、相交、内切、内含</u>.

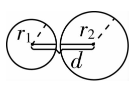
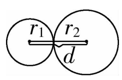
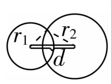
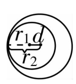
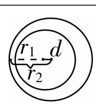
外离和内含统称为相离,外切和内切统称为相切. 如图:



外离　外切　相交　内切　内含

2. 圆与圆的位置关系的判断

若两圆的半径分别为 r_1,r_2,两圆的圆心距为 d,则两圆的位置关系的判断方法如下表:

位置关系	图示	d 与 r_1,r_2 的关系
外离		$d>r_1+r_2$
外切		$d=r_1+r_2$
相交		$\|r_1-r_2\|<d<r_1+r_2$
内切		$d=\|r_1-r_2\|$
内含		$d<\|r_1-r_2\|$

小试牛刀

1. 两圆 $x^2+y^2-1=0$ 和 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 的位置关系是　　(B)

A. 内切　　B. 相交　　C. 外切　　D. 外离

【解析】圆 $x^2+y^2-1=0$ 的圆心为 $C_1(0,0)$,半径为 $r_1=1$,圆 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 的圆心为 $C_2(2,-1)$,半径为 $r_2=3$,两圆心距离 $d=|C_1C_2|=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$,又 $r_2-r_1=2$,$r_1+r_2=4$,所以 $r_2-r_1<d<r_1+r_2$,故两圆相交.

2. 圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 的交点坐标为　　(C)

A. $(1,0)$和$(0,1)$　　B. $(1,0)$和$(0,-1)$

C. $(-1,0)$和$(0,-1)$　　D. $(-1,0)$和$(0,1)$

【解析】由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x^2+y^2+2x+2y+1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=-1.\end{cases}$ 故两圆交点坐标为$(-1,0)$或$(0,-1)$.

3. 当两个圆仅有一个公共点时,这两个圆一定外切吗?

【解析】不一定,也有可能是内切.

互动课堂

合作探究

探究 1　圆与圆的位置关系的判断

【例 1】求当 a 为何值时,圆 C_1:$x^2+y^2-2ax+4y+a^2-5=0$ 和圆 C_2:$x^2+y^2+2x-2ay+a^2-3=0$ (1)外切;(2)相交;(3)外离.

【解析】分别将两圆的方程写成标准方程,即 C_1:$(x-a)^2+(y+2)^2=9$,C_2:$(x+1)^2+(y-a)^2=4$.

故两圆的圆心和半径分别为 $C_1(a,-2)$,$r_1=3$;$C_2(-1,a)$,$r_2=2$.

设两圆的圆心距为 d,

则 $d^2=(a+1)^2+(-2-a)^2=2a^2+6a+5$.

(1)当 $d=5$,即 $2a^2+6a+5=25$ 时,两圆外切,此时 $a=-5$ 或 $a=2$.

(2)当 $1<d<5$,即 $1<2a^2+6a+5<25$ 时,两圆相交,此时 $-5<a<-2$ 或 $-1<a<2$.

(3)当 $d>5$,即 $2a^2+6a+5>25$ 时,两圆外离,此时 $a>2$ 或 $a<-5$.

点睛 判断两圆的位置关系或利用两圆的位置关系求参数的取值范围有以下几个步骤:

(1)化成圆的标准方程,写出圆心和半径.

(2)计算两圆圆心的距离 d.

(3)通过 d 与 r_1+r_2,$|r_1-r_2|$ 的大小关系来判断两圆的位置关系或求参数的范围,必要时可借助于图形,数形结合.

【变式训练 1】(1)圆 $x^2+y^2-2y=0$ 与圆 $(x-4)^2+(y+2)^2=4$ 的位置关系是 (A)

A. 相离　　B. 相交

C. 外切　　D. 内切

(2)已知 $0<r<\sqrt{2}+1$,则两圆 $x^2+y^2=r^2$ 与 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ 的位置关系是 (D)

A. 内切　　B. 外切

C. 内含　　D. 相交

【解析】(1)∵圆的方程 $x^2+y^2-2y=0$ 化为 $x^2+(y-1)^2=1$,

∴两圆圆心分别为 $(0,1)$,$(4,-2)$,

圆心距为 $\sqrt{(4-0)^2+(-2-1)^2}=5$,

由 $d=5>r_1+r_2=1+2$,

∴两圆相离.

(2)∵两圆的圆心分别为 $(0,0)$,$(1,-1)$,半径分别为 r,$\sqrt{2}$,

∴圆心距 $d=\sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$,

∵$0<r<\sqrt{2}+1$,

∴$0<|r-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$,

∴$|r-\sqrt{2}|<d=\sqrt{2}<r+\sqrt{2}$.

∴两圆相交.

探究 2　圆与圆相切的有关问题

【例 2】已知以 $C(4,-3)$ 为圆心的圆与圆 O:$x^2+y^2=1$ 相切,求圆 C 的方程.

【解析】设圆 C 的半径为 r,

圆心距 $d=\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2}=5$,

当圆 C 与圆 O 外切时,$r+1=5$,$r=4$,

当圆 C 与圆 O 内切时,$r-1=5$,$r=6$,

故圆的方程为 $(x-4)^2+(y+3)^2=16$

或 $(x-4)^2+(y+3)^3=36$.

点睛 两圆相切时常用的性质

(1)设两圆的圆心分别为 O_1,O_2,半径分别为 r_1,r_2,则两圆内切⇔$|O_1O_2|=|r_1-r_2|$,两圆外切⇔$|O_1O_2|=r_1+r_2$.

(2)两圆相切时,两圆圆心的连线过切点;两圆相交时,两圆圆心的连线垂直平分公共弦.

【变式训练 2】已知两圆 $x^2+y^2-2x-6y-1=0$ 和 $x^2+y^2-10x-12y+m=0$ 相切,求 m 的值.

【解析】两圆的标准方程分别为 $(x-1)^2+(y-3)^2=11$,$(x-5)^2+(y-6)^2=61-m$,

圆心分别为 $C_1(1,3)$,$C_2(5,6)$;半径分别为 $\sqrt{11}$ 和 $\sqrt{61-m}$.

(1)当两圆外切时,$\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{11}+\sqrt{61-m}$,

解得 $m=25+10\sqrt{11}$.

(2)当两圆内切时,因定圆的半径 $\sqrt{11}$ 小于两圆圆心间距离 5,故有 $\sqrt{61-m}-\sqrt{11}=5$,

解得 $m=25-10\sqrt{11}$.

探究 3　圆与圆相交的有关问题

【例 3】已知两圆 $x^2+y^2-2x+10y-24=0$ 和 $x^2+y^2+2x+2y-8=0$.

(1)判断两圆的位置关系;

(2)求公共弦所在直线的方程;

(3)求公共弦的长.

【解析】(1)记两圆分别为 C_1,C_2,将两圆方程配方化为标准方程,

C_1:$(x-1)^2+(y+5)^2=50$,

C_2:$(x+1)^2+(y+1)^2=10$,

则圆 C_1 的圆心为 $(1,-5)$,半径 $r_1=5\sqrt{2}$.

圆 C_2 的圆心为 $(-1,-1)$,半径 $r_2=\sqrt{10}$.

又∵$|C_1C_2|=2\sqrt{5}$,$r_1+r_2=5\sqrt{2}+\sqrt{10}$,

$r_1-r_2=5\sqrt{2}-\sqrt{10}$,

∴$r_1-r_2<|C_1C_2|<r_1+r_2$,

∴两圆相交.

(2)将两圆方程相减,得公共弦所在直线方程为 $x-2y+4=0$.

(3)方法一　由(2)知圆 C_1 的圆心 $(1,-5)$ 到直线 $x-2y+4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|1-2\times(-5)+4|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$,

∴公共弦长 $l=2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{50-45}=2\sqrt{5}$.

方法二　设两圆相交于点 A,B,则 A,B 两点满足方程组 $\begin{cases}x-2y+4=0,\\x^2+y^2+2x+2y-8=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-4,\\y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$

∴$|AB|=\sqrt{(-4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$.

即公共弦长为 $2\sqrt{5}$.

点睛 (1)两圆相交时,公共弦所在直线的方程的求法

若圆 C_1:$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 C_2:$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 相交,则两圆公共弦所在直线的方程为 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$.

(2)公共弦长的求法

①代数法:将两圆的方程联立,解出交点坐标,利用两点间的距离公式求出弦长.

②几何法:求出公共弦所在直线的方程,利用圆的半径、半弦长、弦心距构成的直角三角形,根据勾股定理求解.

(3)过两个已知圆 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程为 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda\neq-1)$.

【变式训练3】求过两圆 $x^2+y^2-1=0$ 和 $x^2+y^2-4x=0$ 的交点，且与直线 $x-\sqrt{3}y-6=0$ 相切的圆的方程.

【解析】设所求圆的方程为 $x^2+y^2-1+\lambda(x^2+y^2-4x)=0(\lambda\neq-1)$,

整理，得 $x^2+y^2-\frac{4\lambda}{1+\lambda}x-\frac{1}{1+\lambda}=0$,

配方，得 $\left(x-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\frac{4\lambda^2+\lambda+1}{(1+\lambda)^2}$,

因为圆与直线 $x-\sqrt{3}y-6=0$ 相切，

所以 $\left(\frac{\left|\frac{2\lambda}{1+\lambda}-\sqrt{3}\times0-6\right|}{\sqrt{1+3}}\right)^2=\frac{4\lambda^2+\lambda+1}{(1+\lambda)^2}$.

化简得 $11\lambda+8=0,\lambda=-\frac{8}{11}$.

所以所求圆的方程为 $3x^2+3y^2+32x-11=0$.

经检验 $x^2+y^2-4x=0$ 也与直线 $x-\sqrt{3}y-6=0$ 相切.

所以所求圆的方程为 $3x^2+3y^2+32x-11=0$ 或 $x^2+y^2-4x=0$.

随堂小练

1. 已知集合 $M=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant4\}$，$N=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant r^2,r>0\}$，且 $M\cap N=N$，则 r 的取值范围是 (C)

A. $(0,\sqrt{2}-1)$　　B. $(0,1]$

C. $(0,2-\sqrt{2}]$　　D. $(0,2]$

【解析】由已知 $M\cap N=N$，知 $N\subseteq M$，

∴圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$ 内切或内含，

∴$2-r\geqslant\sqrt{2}$，

∴$0<r\leqslant2-\sqrt{2}$.

2. 已知圆 $x^2+y^2-2x-5=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的交点为 A,B，则线段 AB 的垂直平分线的方程为 (A)

A. $x+y-1=0$　　B. $2x-y+1=0$

C. $x-2y+1=0$　　D. $x-y+1=0$

【解析】直线 AB 的方程为 $4x-4y+1=0$，因此它的垂直平分线斜率为 -1，且经过圆心 $(1,0)$，故其方程为 $y=-(x-1)$，即两圆连心线.

3. 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$，$B=\{(x,y)|(x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$，其中 $r>0$，若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素，则 r 的值是 __3 或 7__.

【解析】∵$A\cap B$ 中有且仅有一个元素，

∴圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$ 相切.

当两圆内切时，$\sqrt{3^2+4^2}=|2-r|$，解得 $r=7(r>0)$.

当两圆外切时，$\sqrt{3^2+4^2}=2+r$，解得 $r=3$.

∴$r=3$ 或 7.

4. 圆 $C_1:x^2+y^2-2x-8=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的公共弦长为 __$2\sqrt{7}$__.

【解析】圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线 l 的方程为 $x-y+1=0$，

点 $C_1(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，

又圆 C_1 的半径 $r_1=3$，

故圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{7}$.

5. 求圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，且经过两圆 $x^2+y^2-4x-6=0$ 和 $x^2+y^2-4y-6=0$ 的交点的圆的方程.

【解析】方法一　设经过已知两圆的交点的圆的方程为 $x^2+y^2-4x-6+\lambda(x^2+y^2-4y-6)=0(\lambda\neq-1)$，则其圆心坐标为 $\left(\frac{2}{1+\lambda},\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$.

∵所求圆的圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，

∴$\frac{2}{1+\lambda}-\frac{2\lambda}{1+\lambda}-4=0$，得 $\lambda=-\frac{1}{3}$.

故所求圆的方程为

$x^2+y^2-4x-6-\frac{1}{3}(x^2+y^2-4y-6)=0$，

即 $x^2+y^2-6x+2y-6=0$.

方法二　由 $\begin{cases}x^2+y^2-4x-6=0,\\x^2+y^2-4y-6=0\end{cases}$ 得两圆公共弦所在直线的方程为 $y=x$，

由 $\begin{cases}y=x,\\x^2+y^2-4y-6=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=-1,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\y_2=3.\end{cases}$

所以两圆 $x^2+y^2-4x-6=0$ 和 $x^2+y^2-4y-6=0$ 的交点分别为 $A(-1,-1)$、$B(3,3)$，线段 AB 的垂直平分线所在直线的方程为 $y-1=-(x-1)$.

由 $\begin{cases}y-1=-(x-1),\\x-y-4=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$

所以所求圆的圆心为 $(3,-1)$，

半径为 $\sqrt{(3-3)^2+[3-(-1)]^2}=4$.

所以所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y+1)^2=16$，

即为 $x^2+y^2-6x+2y-6=0$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十二)

课后作业 · 单独成册

三、知能拓展

直线和圆的方程复习

核心梳理

1. 直线的倾斜角与斜率

(1)直线的倾斜角的范围是$[0°,180°)$.

(2)若直线 l 的倾斜角 $\alpha \neq 90°$,则斜率 $k=\tan\alpha$.

(3)若点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$在直线 l 上,且 $x_1\neq x_2$,则直线 l 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

2. 直线方程的五种形式

方程	适用范围
点斜式:$y-y_1=k(x-x_1)$	不包含直线 $x=x_1$
斜截式:$y=kx+b$	不包含垂直于 x 轴的直线
两点式:$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不包含直线 $x=x_1(x_1=x_2)$ 和直线 $y=y_1(y_1=y_2)$
截距式:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不包含垂直于坐标轴和过原点的直线
一般式:$Ax+By+C=0$(A,B 不全为 0)	对平面直角坐标系内的直线都适用

注意:常见的直线系方程

(1)过定点 $P(x_0,y_0)$的直线系方程:$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C=0(A^2+B^2\neq 0)$,还可以表示为 $y-y_0=k(x-x_0)$,斜率不存在时可设为 $x=x_0$.

(2)平行于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系方程:$Ax+By+C_1=0(C_1\neq C)$.

(3)垂直于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系方程:$Bx-Ay+C_1=0$.

(4)过两条已知直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$,$A_2x+B_2y+C_2=0$ 交点的直线系方程:$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$(其中不包括直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$).

3. 两条直线的位置关系

直线形式	斜截式	一般式
直线方程	$l_1:y=k_1x+b_1$, $l_2:y=k_2x+b_2$	$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$
l_1 与 l_2 相交	$k_1\neq k_2$	$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$
l_1 与 l_2 垂直	$k_1k_2=-1$	$A_1A_2+B_1B_2=0$
l_1 与 l_2 平行	$k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$	$\begin{cases}A_1B_2-A_2B_1=0,\\B_1C_2-B_2C_1\neq 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A_1B_2-A_2B_1=0,\\A_1C_2-A_2C_1\neq 0\end{cases}$
l_1 与 l_2 重合	$k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$	$A_1B_2-A_2B_1=A_1C_2-A_2C_1=B_1C_2-B_2C_1=0$

注意:(1)当两条直线平行时,不要忘记它们的斜率不存在的情况;(2)当两条直线垂直时,不要忘记一条直线的斜率不存在、另一条直线的斜率为零的情况.

4. 两条直线的交点

对于直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$,$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$,l_1 与 l_2 的交点坐标就是方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$的解.

(1)方程组有唯一解$\Leftrightarrow l_1$ 与 l_2 相交,交点坐标就是方程组的解;

(2)方程组无解$\Leftrightarrow l_1/\!/l_2$;

(3)方程组有无数解$\Leftrightarrow l_1$ 与 l_2 重合.

5. 距离问题

(1)平面上任意两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$间的距离 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(2)点 $P(x_0,y_0)$到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(3)两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$间的距离 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

6.对称问题

(1)中心对称:点 $B(x,y)$为点 $A(x_1,y_1)$与点 $C(x_2,y_2)$的中点,中点坐标公式为$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$

(2)轴对称:若点 P 关于直线 l 的对称点为 P',则 $PP'\perp l$,且 PP'的中点在 l 上.

7.圆的方程

圆	圆的标准方程	圆的一般方程
定义	在平面内,到定点的距离等于定长的点的集合叫做圆,确定一个圆最基本的要素是圆心和半径	
方程	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$
圆心	(a,b)	$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$
半径	r	$\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$
区别与联系	(1)圆的标准方程明确地表现出圆的几何要素,即圆心坐标和半径;(2)圆的一般方程的代数结构明显,圆心坐标和半径需要通过代数运算才能得出;(3)二者可以互相转化:将圆的标准方程展开可得一般方程,将圆的一般方程配方可得标准方程	

注意:当 $D^2+E^2-4F=0$ 时,方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示一个点$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$;当 $D^2+E^2-4F<0$ 时,方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 没有意义,不表示任何图形.

8.点与圆的位置关系的判断方法

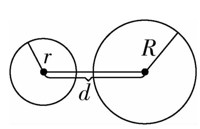
点与圆的位置关系	标准方程的形式	一般方程的形式
点(x_0,y_0)在圆上	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$	$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$
点(x_0,y_0)在圆外	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$	$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0$
点(x_0,y_0)在圆内	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$	$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0$

9.直线与圆的位置关系的判断方法

判断方法	直线与圆的位置关系	
几何法:由圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系来判断	$d>r$	直线与圆相离
	$d=r$	直线与圆相切
	$d<r$	直线与圆相交
代数法:联立直线与圆的方程,消元后得到关于 x(或 y)的一元二次方程,根据一元二次方程的解的个数来判断	$\Delta<0$	方程无实数解,直线与圆相离
	$\Delta=0$	方程有唯一的实数解,直线与圆相切
	$\Delta>0$	方程有两个不同的实数解,直线与圆相交

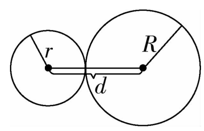
10.圆与圆的位置关系的判断方法

由两圆的圆心距 d 与半径 R,r 的大小关系来判断(如下图,其中 $R>r$).



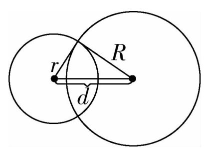
$d>R+r$

外离



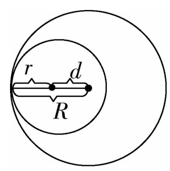
$d=R+r$

外切



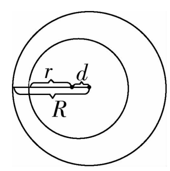
$R-r<d<R+r$

相交



$d=R-r$

内切



$d<R-r$

内含

注意:圆的三个性质

①圆心在过切点且垂直于切线的直线上;

②圆心在任一弦的中垂线上;

③两圆相切时,切点与两个圆心三点共线.

11.两圆相交时公共弦所在直线的方程

设圆 $C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$　①,

圆 $C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$　②,

若两圆相交,则有一条公共弦,由①-②得$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$ ③.

方程③表示圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线的方程.

重难突破

要点1　直线方程的五种形式

求直线方程的方法一般是待定系数法,在使用待定系数法求直线方程时,要注意直线方程形式的选择及适用范围,如点

斜式、斜截式适合直线斜率存在的情形，容易遗漏斜率不存在的情形；两点式不含垂直于坐标轴的直线；截距式不含垂直于坐标轴和过原点的直线；一般式适用于平面直角坐标系中的任何直线. 因此，要注意运用分类讨论的思想.

【例 1】求与直线 $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ 垂直，并且与两坐标轴围成的三角形的面积为 24 的直线 l 的方程.

【解析】方法一　由直线 l 与直线 $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ 垂直，可设直线方程为 $y=-\frac{3}{4}x+b$，则直线 l 在 x 轴，y 轴上的截距分别为 $x_0=\frac{4}{3}b$，$y_0=b$.

又因为直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 24，

所以 $S=\frac{1}{2}|x_0||y_0|=24$，即 $\frac{1}{2}\left|\frac{4}{3}b\right||b|=24$，$b^2=36$.

解得 $b=6$ 或 $b=-6$.

故所求直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+6$ 或 $y=-\frac{3}{4}x-6$，

即 $3x+4y-24=0$ 或 $3x+4y+24=0$.

方法二　设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，则直线的斜率 $k=-\frac{b}{a}$. 因为直线 l 与直线 $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ 垂直，

所以 $k=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{4}$，即 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$.

又因为直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 24，

所以 $\frac{1}{2}|ab|=24$，即 $|ab|=48$.

所以 $a=8$，$b=6$ 或 $a=-8$，$b=-6$.

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{8}+\frac{y}{6}=1$ 或 $\frac{x}{-8}+\frac{y}{-6}=1$，

即 $3x+4y-24=0$ 或 $3x+4y+24=0$.

点睛 求直线方程的方法通常有(1)直接法：根据已知条件灵活选用直线方程的形式，写出方程；(2)待定系数法：先根据已知条件设出直线方程，再根据已知条件构造关于待定系数的方程(组)求系数，最后代入系数求出直线方程.

【变式训练 1】已知直线 l 被两条直线 l_1：$4x+y+3=0$ 和 l_2：$3x-5y-5=0$ 截得的线段的中点为 $P(-1,2)$，求直线 l 的方程.

【解析】方法一　设直线 l 与 l_1 的交点为 $A(x_0,y_0)$，由已知条件，得直线 l 与 l_2 的交点为 $B(-2-x_0,4-y_0)$，并且满足 $\begin{cases}4x_0+y_0+3=0,\\3(-2-x_0)-5(4-y_0)-5=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}4x_0+y_0+3=0,\\3x_0-5y_0+31=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=-2,\\y_0=5,\end{cases}$

因此直线 l 的方程为 $\frac{y-2}{5-2}=\frac{x-(-1)}{-2-(-1)}$，

即 $3x+y+1=0$.

方法二　设直线 l 的方程为 $y-2=k(x+1)$，

即 $kx-y+k+2=0$.

由 $\begin{cases}kx-y+k+2=0,\\4x+y+3=0,\end{cases}$ 得 $x=\frac{-k-5}{k+4}$.

由 $\begin{cases}kx-y+k+2=0,\\3x-5y-5=0,\end{cases}$ 得 $x=\frac{-5k-15}{5k-3}$.

则 $\frac{-k-5}{k+4}+\frac{-5k-15}{5k-3}=-2$，解得 $k=-3$.

因此所求直线方程为 $y-2=-3(x+1)$，

即 $3x+y+1=0$.

要点 2　两条直线的位置关系

两条直线的位置关系有相交(特例垂直)、平行、重合三种，主要考查两条直线的平行和垂直. 通常借助直线的斜截式方程来判断两条直线的位置关系. 解题时要注意分析斜率是否存在，用一般式方程来判断，可以避免讨论斜率不存在的情况.

【例 2】已知两条直线 l_1：$ax-by+4=0$，l_2：$(a-1)x+y+b=0$，求分别满足下列条件的 a，b 的值：

(1)直线 l_1 过点$(-3,-1)$，并且直线 l_1 与直线 l_2 垂直；

(2)直线 l_1 与直线 l_2 平行，并且坐标原点到 l_1，l_2 的距离相等.

【解析】(1)∵$l_1\perp l_2$，∴$a(a-1)+(-b)\times 1=0$.

即 $a^2-a-b=0$，①

又点$(-3,-1)$在直线 l_1 上，

∴$-3a+b+4=0$. ②

由①②解得 $a=2$，$b=2$.

(2)∵$l_1/\!/l_2$ 且直线 l_2 的斜率为 $1-a$，

∴直线 l_1 的斜率也存在，$\frac{a}{b}=1-a$，即 $b=\frac{a}{1-a}$.

故直线 l_1 和直线 l_2 的方程可分别表示为

l_1：$(a-1)x+y+\frac{4(a-1)}{a}=0$，

l_2：$(a-1)x+y+\frac{a}{1-a}=0$.

∵原点到 l_1 与 l_2 的距离相等，

∴$4\left|\frac{a-1}{a}\right|=\left|\frac{a}{1-a}\right|$，解得 $a=2$ 或 $a=\frac{2}{3}$.

$\therefore\begin{cases}a=2,\\b=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\b=2.\end{cases}$

经检验，两组值均符合题意.

点睛 已知两条直线平行或垂直求参数的值：在解这类问题时，一定要"前思后想"."前思"就是在解题前考虑斜率不存在的可能性，看是否需要分情况讨论；"后想"就是在解题后，检验答案的正确性，看是否出现增解或漏解.

【变式训练2】 已知直线 $l_1:ax+2y+6=0$ 和直线 $l_2:x+(a-1)y+a^2-1=0$.

(1)试判断 l_1 与 l_2 是否平行；

(2)当 $l_1\perp l_2$ 时，求 a 的值.

【解析】(1)若直线 $l_1/\!/l_2$，

则 $\begin{cases}a(a-1)-2\times1=0,\\a(a^2-1)-6\times1\neq0.\end{cases}$

$\therefore a=-1.$

$\therefore$ 当 $a=-1$ 时，$l_1/\!/l_2$；否则 l_1 与 l_2 不平行.

(2)当直线 l_2 的斜率不存在时，$a=1$.

则 $l_2:x=0$，$l_1:x+2y+6=0$.

显然直线 l_1 与直线 l_2 不垂直.

当直线 l_2 斜率存在时，$a\neq1$.

则 $k_2=\frac{1}{1-a}$，$k_1=-\frac{a}{2}$.

$\because l_1\perp l_2$，

$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{1}{1-a}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)=-1.$

$\therefore a=\frac{2}{3}.$

要点3 对称问题的求法

(1)对称点坐标：由中点坐标公式可解决关于点的对称问题，已知点 $P(a,b)$ 可得点 P 关于 y 轴的对称点为 $P_1(-a,b)$，点 P 关于 x 轴的对称点为 $P_2(a,-b)$，点 P 关于原点的对称点为 $P_3(-a,-b)$.

(2)点关于直线对称：直线 l 外一点 $P_1(x_1,y_1)$ 关于直线 $l:Ax+By+C=0$ 的对称点 $P_2(x_2,y_2)$ 的坐标由方程组

$$\begin{cases}A\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+B\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+C=0,\\\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\frac{A}{B}\right)=-1(B\neq0)\end{cases}$$ 确定.

(3)直线关于直线对称：直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 关于直线 $l:Ax+By+C=0$ 对称的直线 l_2 的方程可转化成点关于直线对称求解.

【例3】 已知直线 $l:y=3x+3$，试求：

(1)点 $P(4,5)$ 关于直线 l 的对称点的坐标；

(2)直线 l 关于点 $A(3,2)$ 对称的直线方程.

【解析】(1)设点 P 关于直线 l 的对称点为 $P'(x',y')$，则 PP' 的中点 M 在直线 l 上，且直线 PP' 垂直于直线 l.

即 $\begin{cases}\frac{y'+5}{2}=3\times\frac{x'+4}{2}+3,\\\frac{y'-5}{x'-4}\times3=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x'=-2,\\y'=7.\end{cases}$

$\therefore$ 点 P' 的坐标为 $(-2,7)$.

(2)设直线 l 关于点 $A(3,2)$ 对称的直线为 l_3，则直线 l 上任一点 $P_1(x_1,y_1)$ 关于点 A 的对称点 $P_3(x_3,y_3)$ 一定在直线 l_3 上，反之也成立.

$\therefore\begin{cases}\frac{x_1+x_3}{2}=3,\\\frac{y_1+y_3}{2}=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=6-x_3,\\y_1=4-y_3,\end{cases}$

代入直线 l 的方程后，得 $3x_3-y_3-17=0$.

即直线 l_3 的方程为 $3x-y-17=0$.

点睛 解决对称问题应根据对称的形式合理套用对称关系模型构建方程求解.

【变式训练3】 求直线 $x-y-2=0$ 关于直线 $l:3x-y+3=0$ 对称的直线方程.

【解析】 由 $\begin{cases}x-y-2=0,\\3x-y+3=0\end{cases}$ 得交点 $P\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)$.

取直线 $x-y-2=0$ 上一点 $A(0,-2)$，设 A 点关于直线 $l:3x-y+3=0$ 的对称点为 $A'(x_0,y_0)$.

则根据 $k_{AA'}\cdot k_l=-1$，且线段 AA' 的中点在直线 $l:3x-y+3=0$ 上，有 $\begin{cases}\frac{y_0+2}{x_0-0}\times3=-1,\\3\times\frac{x_0}{2}-\frac{y_0-2}{2}+3=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=-3,\\y_0=-1.\end{cases}$

故所求对称直线过点 $\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)$ 和 $(-3,-1)$.

所以所求对称直线方程为 $y+\frac{9}{2}=\frac{-1-\left(-\frac{9}{2}\right)}{-3-\left(-\frac{5}{2}\right)}\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)$，即 $7x+y+22=0$.

要点4 圆的方程

求圆的方程主要是设出圆的标准方程、一般方程或圆系方程,利用待定系数法解题,其一般步骤为:(1)选择设出的圆的方程的形式;(2)由题意得关于 a,b,r(或 D,E,F)的方程(组);(3)解出 a,b,r(或 D,E,F)的值;(4)代入圆的方程.

【例4】某圆与直线 $l:4x-3y+6=0$ 相切于点 $A(3,6)$,且经过点 $B(5,2)$,求此圆的方程.

【解析】方法一 设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,则圆心为 $C(a,b)$,由 $|CA|=|CB|$,$CA\perp l$,

得 $\begin{cases}(a-3)^2+(b-6)^2=(a-5)^2+(b-2)^2=r^2,\\ \dfrac{b-6}{a-3}\times\dfrac{4}{3}=-1.\end{cases}$

解得 $a=5$,$b=\dfrac{9}{2}$,$r^2=\dfrac{25}{4}$.

∴圆的方程为 $(x-5)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

方法二 设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,圆心为 C,由 $CA\perp l$,$A(3,6)$、$B(5,2)$ 在圆上,

得 $\begin{cases}3^2+6^2+3D+6E+F=0,\\ 5^2+2^2+5D+2E+F=0,\\ \dfrac{-\frac{E}{2}-6}{-\frac{D}{2}-3}\times\dfrac{4}{3}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-10,\\ E=-9,\\ F=39.\end{cases}$

∴所求圆的方程为:$x^2+y^2-10x-9y+39=0$,

即 $(x-5)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

方法三 设圆心为 C,则 $CA\perp l$,又设 AC 与圆的另一交点为 P,则 CA 方程为 $y-6=-\dfrac{3}{4}(x-3)$,

即 $3x+4y-33=0$.

又 $k_{AB}=\dfrac{6-2}{3-5}=-2$,∴$k_{BP}=\dfrac{1}{2}$,

∴直线 BP 的方程为 $x-2y-1=0$.

解方程组 $\begin{cases}3x+4y-33=0,\\ x-2y-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=7,\\ y=3.\end{cases}$

∴$P(7,3)$. ∴圆心为 AP 中点 $\left(5,\dfrac{9}{2}\right)$,半径为 $|AC|=\dfrac{|AP|}{2}=\dfrac{5}{2}$. ∴所求圆的方程为 $(x-5)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

点睛 求圆的方程,关键是根据条件选择对应方法求解,如果是标准式多采用几何法求解方程,如果给出三点坐标多采用待定系数法求方程.

【变式训练4】根据条件求下列各圆的方程:

(1)经过 $A(6,5)$,$B(0,1)$ 两点,并且圆心在直线 $3x+10y+9=0$ 上;

(2)半径为 $\sqrt{10}$,圆心在直线 $y=2x$ 上,被直线 $x-y=0$ 截得的弦长为 $4\sqrt{2}$.

【解析】(1)由题意知线段 AB 的垂直平分线方程为 $3x+2y-15=0$,

∴由 $\begin{cases}3x+2y-15=0,\\ 3x+10y+9=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=7,\\ y=-3.\end{cases}$

∴圆心 $C(7,-3)$,半径 $r=|AC|=\sqrt{65}$.

∴所求圆的方程为 $(x-7)^2+(y+3)^2=65$.

(2)方法一 设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

则圆心为 (a,b),半径 $r=\sqrt{10}$,

圆心 (a,b) 到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$,

由半弦长,弦心距,半径组成的直角三角形得,

$d^2+\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2=r^2$,即 $\dfrac{(a-b)^2}{2}+8=10$,

∴$(a-b)^2=4$,

又∵$b=2a$,

∴$a=2$,$b=4$ 或 $a=-2$,$b=-4$,

故所求圆的方程是 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

或 $(x+2)^2+(y+4)^2=10$.

方法二 设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=10$,

∵圆心 $C(a,b)$ 在直线 $y=2x$ 上,

∴$b=2a$.

由圆被直线 $x-y=0$ 截得的弦长为 $4\sqrt{2}$.

将 $y=x$ 代入 $(x-a)^2+(y-b)^2=10$,

得 $2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2-10=0$.

设直线 $y=x$ 交圆 C 于点 $A(x_1,y_1)$,点 $B(x_2,y_2)$,

则 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=4\sqrt{2}$,

∴$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16$.

∵$x_1+x_2=a+b$,$x_1x_2=\dfrac{a^2+b^2-10}{2}$,

∴$(a+b)^2-2(a^2+b^2-10)=16$,即 $a-b=\pm2$.

又∵$b=2a$,∴$\begin{cases}a=2,\\ b=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\ b=-4.\end{cases}$

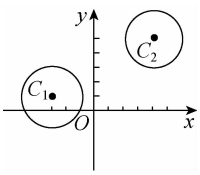
∴所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$ 或 $(x+2)^2+(y+4)^2=10$.

要点 5　直线与圆、圆与圆的位置关系

(1)直线与圆的位置关系是重点内容，判断直线与圆的位置关系以几何法为主，解题时应充分利用圆的几何性质简化解题过程.

(2)解决圆与圆的位置关系的关键是抓住几何特征，利用两圆圆心距与两圆半径的和、差的绝对值的大小关系来确定两圆的位置关系，充分利用几何图形的直观性来分析问题.

【例 5】如图所示，在平面直角坐标系中，已知圆 C_1：$(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 和圆 C_2：$(x-4)^2+(y-5)^2=4$.



(1)若直线 l 过点 $A(4,0)$，且被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l 的方程；

(2)设 P 为平面上的点，满足：存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2，它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交，且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等，试求所有满足条件的点 P 的坐标.

【解析】(1)由于直线 $x=4$ 与圆 C_1 不相交，所以直线 l 的斜率存在.设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$，圆 C_1 的圆心到直线 l 的距离为 d，因为直线 l 被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，所以 $d=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$.由点到直线的距离公式得 $d=\frac{|-3k-1-4k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，故 $k(24k+7)=0$，即 $k=0$ 或 $k=-\frac{7}{24}$，

所以直线 l 的方程为 $y=0$ 或 $7x+24y-28=0$.

(2)设点 $P(a,b)$ 满足条件，不妨设直线 l_1 的方程为 $y-b=k(x-a)$，$k\neq0$，则直线 l_2 的方程为 $y-b=-\frac{1}{k}(x-a)$.因为圆 C_1 和圆 C_2 的半径相等，且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等，所以圆 C_1 的圆心到直线 l_1 的距离和圆 C_2 的圆心到直线 l_2 的距离相等，即

$$\frac{|1-k(-3-a)-b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|5+\frac{1}{k}(4-a)-b\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}},$$

整理得 $|1+3k+ak-b|=|5k+4-a-bk|$，

从而 $1+3k+ak-b=5k+4-a-bk$ 或 $1+3k+ak-b=-5k-4+a+bk$，

即 $(a+b-2)k=b-a+3$ 或 $(a-b+8)k=a+b-5$，

因为 k 的取值范围有无穷多个，

所以 $\begin{cases}a+b-2=0,\\b-a+3=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-b+8=0,\\a+b-5=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{5}{2},\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{3}{2},\\b=\frac{13}{2}.\end{cases}$

故点 P 只可能是点 $P_1\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 或点 $P_2\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$.

经检验点 P_1 和 P_2 满足题目条件.

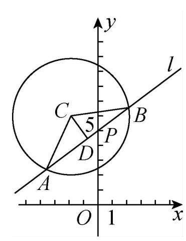
点睛　直线与圆的位置关系的判断

讨论直线与圆的位置关系时，一般可以从代数特征(方程组的解的个数)或几何特征(圆心到直线的距离与半径的关系)去考虑，其中用几何特征解决与圆有关的问题比较简捷实用.如直线与圆相交求弦长时，利用公式 $\left(\frac{l}{2}\right)^2+d^2=r^2$(其中，弦长为 l，弦心距为 d，半径为 r)比利用代数法求弦长要简单.

【变式训练 5】已知点 $P(0,5)$ 及圆 C：$x^2+y^2+4x-12y+24=0$.若直线 l 过点 P，且被圆 C 截得的弦长为 $4\sqrt{3}$，求 l 的方程.

【解析】如图所示，$|AB|=4\sqrt{3}$，设 D 是线段 AB 的中点，则 $CD\perp AB$，

$\therefore|AD|=2\sqrt{3}$，$|AC|=4$.



在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，可得 $|CD|=2$.

当所求直线 l 的斜率存在时，设斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y-5=kx$，即 $kx-y+5=0$.

由点 C 到直线 AB 的距离为

$\frac{|-2k-6+5|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，得 $k=\frac{3}{4}$，

此时直线 l 的方程为 $3x-4y+20=0$.

当直线 l 的斜率不存在时，也满足题意，此时方程为 $x=0$.

$\therefore$所求直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x-4y+20=0$.

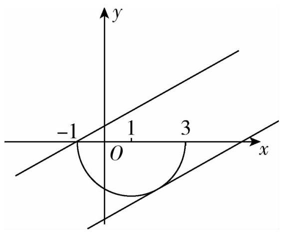
拓展提升

1. 若函数 $y=-\sqrt{4-(x-1)^2}$ 的图象与直线 $x-2y+m=0$ 有公共点，则实数 m 的取值范围为 （ B ）

A. $[-2\sqrt{5}-1,-2\sqrt{5}+1]$ B. $[-2\sqrt{5}-1,1]$

C. $[-2\sqrt{5}+1,-1]$ D. $[-3,1]$

【解析】函数 $y=-\sqrt{4-(x-1)^2}$ 可化简为：$(x-1)^2+y^2=4(y\leqslant 0)$，表示的是以 $(1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆的下半部分，与直线 $x-2y+m=0$ 有公共点，根据题意画出图象：



一个临界是和圆相切，即圆心到直线的距离等于半径，$\dfrac{|1+m|}{\sqrt{5}}=2\Rightarrow m=-2\sqrt{5}-1$ 正值舍去；

另一个临界是过点 $(-1,0)$ 代入得到 $m=1$. 故答案为 B.

2. 已知直线 $x-y+m=0$ 与圆 O：$x^2+y^2=1$ 相交于 A，B 两点，若 $\triangle OAB$ 为正三角形，则实数 m 的值为 （ D ）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】由题意得，圆 O：$x^2+y^2=1$ 的圆心坐标为 $(0,0)$，半径 $r=1$.

因为 $\triangle OAB$ 为正三角形，则圆心 O 到直线 $x-y+m=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $m=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故选 D.

3. 已知直线 l_1：$kx+y=0(k\in\mathbf{R})$ 与直线 l_2：$x-ky+2k-2=0$ 相交于点 A，点 B 是圆 $(x+2)^2+(y+3)^2=2$ 上的动点，则 $|AB|$ 的最大值为 （ C ）

A. $3\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$

C. $5+2\sqrt{2}$ D. $3+2\sqrt{2}$

【解析】由 $\begin{cases}kx+y=0,\\x-ky+2k-2=0,\end{cases}$ 消去参数 k 得 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，

所以 A 在以 $C(1,1)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆上，

又点 B 是圆 $(x+2)^2+(y+3)^2=2$ 上的动点，此圆圆心为 $D(-2,-3)$，半径为 $\sqrt{2}$，

$|CD|=\sqrt{(1+2)^2+(1+3)^2}=5$，

$\therefore |AB|$ 的最大值为 $|CD|+\sqrt{2}+\sqrt{2}=5+2\sqrt{2}$. 故选 C.

4. 已知直线 l 与圆 $x^2+y^2-4y=0$ 相交于 A，B 两点，且线段 AB 的中点 P 的坐标为 $(-1,1)$，则直线 l 的方程为 ___$x+y=0$___.

【解析】因为圆 $x^2+y^2-4y=0$ 的圆心坐标为 $C(0,2)$，又点 P 坐标为 $(-1,1)$，

所以直线 CP 的斜率为 $k_{CP}=\dfrac{2-1}{0+1}=1$；

又因为 AB 是圆的一条弦，P 为 AB 的中点，

所以 $AB\perp CP$，故 $k_{AB}=-1$，即直线 l 的斜率为 -1，

因此，直线 l 的方程为 $y-1=-(x+1)$，即 $x+y=0$.

故答案为 $x+y=0$.

5. 在平面直角坐标系中，已知圆 C：$(x+1)^2+y^2=2$，点 $A(2,0)$，若圆 C 上存在点 M，满足 $MA^2+MO^2\leqslant 10$，则点 M 的纵坐标的取值范围是 ___$\left[-\dfrac{\sqrt{7}}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right]$___.

【解析】设 $M(x,y)$，因为 $MA^2+MO^2\leqslant 10$，所以 $(x-2)^2+y^2+x^2+y^2\leqslant 10$，化简得 $x^2+y^2-2x-3\leqslant 0$，则圆 C：$x^2+y^2+2x-1=0$ 与圆 C'：$x^2+y^2-2x-3=0$ 有公共点，将两圆方程相减可得两圆公共弦所在直线方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$，代入 $x^2+y^2-2x-3\leqslant 0$ 可得 $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，所以点 M 的纵坐标的取值范围是 $\left[-\dfrac{\sqrt{7}}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right]$.

6. 著名数学家华罗庚曾说过："数形结合百般好，隔离分家万事休."事实上，很多代数问题可以转化为几何问题加以解决，如：$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 可以转化为平面上点 $M(x,y)$ 与点 $N(a,b)$ 的距离. 结合上述观点，可得 $f(x)=\sqrt{x^2+4x+20}+\sqrt{x^2+2x+10}$ 的最小值为 ___$5\sqrt{2}$___.

【解析】$\because f(x)=\sqrt{x^2+4x+20}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{(x+2)^2+(0-4)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(0-3)^2}$，$\therefore f(x)$ 的几何意义为点 $M(x,0)$ 到两定点 $A(-2,4)$ 与 $B(-1,3)$ 的距

离之和，设点$A(-2,4)$关于x轴的对称点为A'，则A'为$(-2,-4)$．要求$f(x)$的最小值，可转化为$|MA|+|MB|$的最小值，利用对称思想可知$|MA|+|MB|\geqslant|A'B|=\sqrt{(-1+2)^2+(3+4)^2}=5\sqrt{2}$，即$f(x)=\sqrt{x^2+4x+20}+\sqrt{x^2+2x+10}$的最小值为$5\sqrt{2}$．

7．已知直线l经过两条直线$2x-y-3=0$和$4x-3y-5=0$的交点，且与直线$x+y-2=0$垂直．

(1)求直线l的方程；

(2)若圆C过点$(1,0)$，且圆心在x轴的正半轴上，直线l被该圆所截得的弦长为$2\sqrt{2}$，求圆C的标准方程．

【解析】(1)由已知得$\begin{cases}2x-y-3=0,\\4x-3y-5=0,\end{cases}$解得两直线交点为$(2,1)$，

因为l与直线$x+y-2=0$垂直，所以$k_1=1$．

因为l过点$(2,1)$，所以l的方程为$y-1=x-2$，即$y=x-1$．

(2)设圆的标准方程为$(x-a)^2+y^2=r^2$，则

$\begin{cases}a>0,\\(1-a)^2=r^2,\\\left(\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}\right)^2+2=r^2,\end{cases}$ 解得$a=3$，$r=2$．

所以圆的标准方程为$(x-3)^2+y^2=4$．

温馨提示：请自主完成课后作业(二十三)

课后作业·单独成册

第三章 圆锥曲线的方程

一、课标导向

课标要求

1. 了解圆锥曲线的实际背景,感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

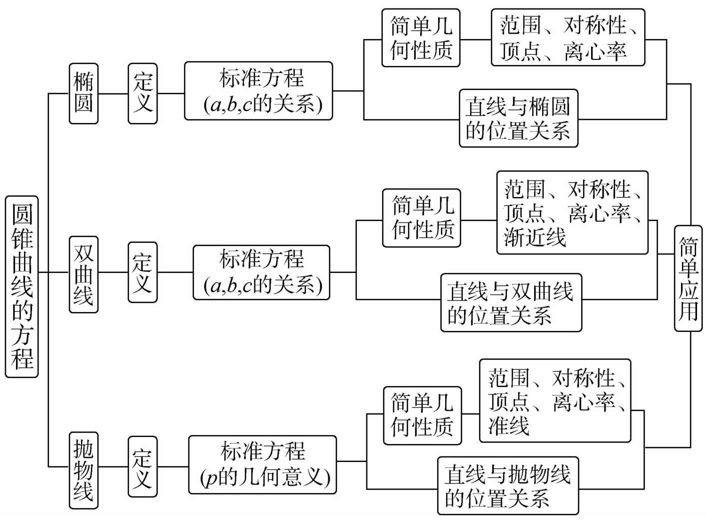
2. 经历从具体情境中抽象出椭圆的过程,掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质.

3. 了解抛物线与双曲线的定义、几何图形和标准方程,以及它们的简单几何性质.

4. 通过圆锥曲线与方程的学习,进一步体会数形结合的思想.

5. 了解椭圆、抛物线的简单应用.

知识网络



二、精讲精练

3.1 椭圆

第 1 课时 椭圆及其标准方程

学习目标	核心素养
1.理解椭圆的定义及椭圆的标准方程.(重点) 2.掌握用定义法和待定系数法求椭圆的标准方程.(重点) 3.理解椭圆的标准方程的推导过程,并能运用标准方程解决相关问题.(难点)	1.通过椭圆的标准方程及焦点三角形有关问题的学习,培养数学运算素养. 2.借助轨迹方程的学习,培养逻辑推理和直观想象素养.

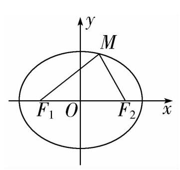
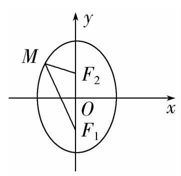
自主预习

知新预学

1.椭圆的定义

平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆.这两个定点叫做椭圆的焦点,两个焦点间的距离叫做椭圆的焦距.

2.椭圆的标准方程

焦点位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
图形		
焦点坐标	$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$,$F_2(0,c)$
a,b,c 的关系	$c^2=a^2-b^2$	

小试牛刀

1.设 P 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上的点,若 F_1,F_2 是椭圆的两个焦点,则$|PF_1|+|PF_2|=$ (D)

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 10

【解析】由椭圆方程知 $a^2=25$,则 $a=5$,$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$.

2.已知椭圆的两个焦点坐标分别为 $F_1(0,-8)$,$F_2(0,8)$,且椭圆上一点到两个焦点的距离之和为 20,则此椭圆的标准方程为 (C)

A. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$　　B. $\frac{y^2}{400}+\frac{x^2}{336}=1$

C. $\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{36}=1$　　D. $\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{12}=1$

【解析】由题意知 $c=8$,$2a=20$,所以 $a=10$,

所以 $b^2=a^2-c^2=36$,故椭圆的方程为$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{36}=1$.

3.已知椭圆的焦点为$(-1,0)$和$(1,0)$,点 $P(2,0)$在椭圆上,则椭圆的方程为 (A)

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

C. $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$　　D. $\frac{y^2}{4}+x^2=1$

【解析】由题意知 $c=1$,椭圆的焦点在 x 轴上,

设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,又点 $P(2,0)$在椭圆上,

$\therefore \frac{4}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1$,$\therefore a^2=4$,$b^2=a^2-c^2=3$,

$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

互动课堂

合作探究

探究 1　已知焦点位置,求椭圆的标准方程

【例 1】求适合下列条件的椭圆的标准方程:

(1)焦点坐标为$(-3,0)$,$(3,0)$,并且经过点$(5,0)$;

(2)焦点在 y 轴上,与 y 轴的一个交点为 $P(0,-10)$,P 到

离它较近的一个焦点的距离为2.

【解析】(1)∵椭圆的焦点在 x 轴上，

∴设它的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

∴$2a=\sqrt{(5+3)^2+0}+\sqrt{(5-3)^2+0}=10$.

∴$a=5$.

又∵$c=3$,

∴$b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16$.

∴所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)∵椭圆的焦点在 y 轴上，

∴可设它的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

∵$P(0,-10)$在椭圆上，

∴$a=10$.

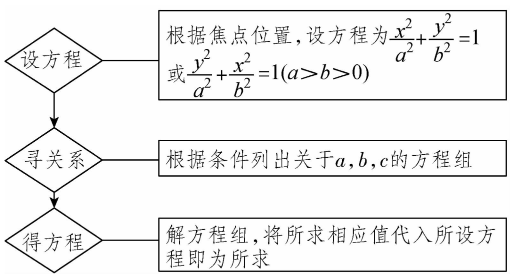
又∵P 到离它较近的一焦点的距离等于2，

∴$-c-(-10)=2$，解得 $c=8$.

∴$b^2=a^2-c^2=36$.

∴所求椭圆的标准方程是$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{36}=1$.

点睛 求椭圆的标准方程的一般步骤：



【变式训练1】求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1)$a=5$，$c=2$，焦点在 y 轴上；

(2)经过定点$(2,-3)$且与椭圆$9x^2+4y^2=36$有共同的焦点.

【解析】(1)∵$a=5$，$c=2$，∴$b^2=a^2-c^2=25-4=21$.

又∵椭圆的焦点在 y 轴上，

∴椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{21}=1$.

(2)由$9x^2+4y^2=36$，得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

∴椭圆的焦点坐标为$(0,\pm\sqrt{5})$.

设椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$,

∴$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$. 又$a^2-b^2=5$. ∴$a^2=15$，$b^2=10$.

∴所求椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{15}+\frac{x^2}{10}=1$.

探究2 焦点位置不确定，求椭圆的标准方程

【例2】求经过两点$(2,-\sqrt{2})$，$\left(-1,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$的椭圆的标准方程.

【解析】方法一 若焦点在 x 轴上，设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由已知条件得$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1,\\ \frac{1}{a^2}+\frac{14}{4b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=4.\end{cases}$

所以所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

若焦点在 y 轴上，设椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由已知条件得$\begin{cases}\frac{4}{b^2}+\frac{2}{a^2}=1,\\ \frac{1}{b^2}+\frac{14}{4a^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}b^2=8,\\ a^2=4.\end{cases}$

即$a^2=4$，$b^2=8$，则$a^2<b^2$，与题设中$a>b>0$矛盾，舍去.

综上，所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

方法二 设椭圆的一般方程为$Ax^2+By^2=1(A>0,B>0,A\neq B)$. 将两点$(2,-\sqrt{2})$，$\left(-1,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$代入，

得$\begin{cases}4A+2B=1,\\ A+\frac{14}{4}B=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=\frac{1}{8},\\ B=\frac{1}{4},\end{cases}$

所以所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

点睛 在求椭圆的标准方程时，若椭圆焦点的位置不确定，可分焦点在 x 轴上和焦点在 y 轴上两种情况进行讨论，也可利用椭圆的一般方程$Ax^2+By^2=1$(其中$A>0,B>0,A\neq B$)，直接求A,B.

【变式训练2】若椭圆的焦距为2，且过点$P(-\sqrt{5},0)$，求椭圆的标准方程.

【解析】①若椭圆的焦点在 x 轴上，

设其方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

∵$c=1$，

∴$\begin{cases}\frac{5}{a^2}=1,\\ a^2-b^2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=5,\\ b^2=4.\end{cases}$

∴椭圆方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

②若椭圆的焦点在 y 轴上，

设其方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则有$\begin{cases}\frac{5}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=6,\\ b^2=5.\end{cases}$

∴椭圆方程为$\frac{y^2}{6}+\frac{x^2}{5}=1$.

综合①②可得,椭圆的标准方程为

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$或$\frac{y^2}{6}+\frac{x^2}{5}=1$.

探究3 椭圆定义的应用

【例3】已知P为椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$上一点,$F_1$,$F_2$是椭圆的焦点,$\angle F_1PF_2=60°$,求$\triangle F_1PF_2$的面积.

【解析】在$\triangle PF_1F_2$中,

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos 60°$,

即$36=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|$.①

由椭圆的定义得$|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{3}$,

即$48=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|$.②

由①②得$|PF_1|\cdot|PF_2|=4$,

所以$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$.

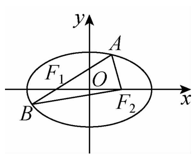
点睛 椭圆定义的应用技巧

(1)椭圆的定义具有双向作用,即若$|MF_1|+|MF_2|=2a$ $(2a>|F_1F_2|)$,则点M的轨迹是椭圆;反之,椭圆上任意一点M到两个焦点的距离之和必为$2a$.

(2)椭圆上一点P与椭圆的两个焦点F_1,F_2构成的$\triangle PF_1F_2$称为焦点三角形.解关于椭圆的焦点三角形的问题,通常要利用椭圆的定义,再结合正弦定理、余弦定理等知识求解.

【变式训练3】已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$F_1$,$F_2$是它的焦点.过$F_1$的直线$AB$与椭圆交于$A$,$B$两点,求$\triangle ABF_2$的周长.

【解析】如图,∵$|AF_1|+|AF_2|=2a$,$|BF_1|+|BF_2|=2a$,



又∵$\triangle ABF_2$的周长$=|AB|+|BF_2|+|AF_2|=|AF_1|+|BF_1|+|AF_2|+|BF_2|=4a$,

∴$\triangle ABF_2$的周长为$4a$.

随堂小练

1.已知P是椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$上一点,点$F_1$,$F_2$分别是椭圆的左、右焦点,直线$PF_1$交椭圆于另一点$A$,则$\triangle PAF_2$的周长为 (D)

A. 10　　B. 16

C. 20　　D. 40

【解析】设$\triangle PAF_2$的周长为l,则$l=|PA|+|PF_2|+|AF_2|=(|PF_1|+|PF_2|)+(|AF_1|+|AF_2|)=2\times10+2\times10=40$.

2."$m>n>0$"是"方程$mx^2+ny^2=1$表示焦点在y轴上的椭圆"的 (C)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

【解析】$m>n>0\Rightarrow\frac{1}{n}>\frac{1}{m}>0\Rightarrow$方程$mx^2+ny^2=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆;反之,若方程$mx^2+ny^2=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆,则$m>n>0$.

3.已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上一点P的横坐标为$-\sqrt{3}$,则点P的坐标为 (B)

A. $\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$

B. $\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$或$\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$或$\left(-\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$

【解析】依题意知点P的横坐标为$-\sqrt{3}$,代入椭圆方程得$\frac{(-\sqrt{3})^2}{4}+y^2=1$,$y=\pm\frac{1}{2}$,从而点$P$的坐标为$\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$或$\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$.

4.已知P为椭圆C上一点,F_1,F_2为椭圆的焦点,且$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$,若$|PF_1|$与$|PF_2|$的等差中项为$|F_1F_2|$,则椭圆C的标准方程为 (B)

A. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$

B. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$

D. $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{45}=1$或$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{48}=1$

【解析】由已知$2c=|F_1F_2|=2\sqrt{3}$,∴$c=\sqrt{3}$.

∵$2a=|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|=4\sqrt{3}$,

∴$a=2\sqrt{3}$.∴$b^2=a^2-c^2=9$.

∴椭圆C的标准方程是$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$.

5.已知$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{m^2}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆,则$m$的取值范围为<u>$(-4,0)\cup(0,4)$</u>.

【解析】由题意知$0<m^2<16$,即$-4<m<0$或$0<m<4$.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十四)

课后作业·单独成册

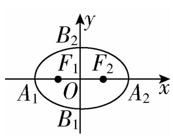
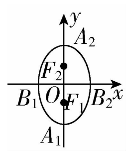
第 2 课时　椭圆的简单几何性质

学习目标	核心素养
1. 根据椭圆的方程研究其简单几何性质，并能正确地画出图形.（重点） 2. 能根据所给条件求出椭圆的方程.（重点） 3. 进一步掌握椭圆的方程及其性质的应用，会判断直线与椭圆的位置关系.（重点） 4. 能运用直线与椭圆的位置关系解决相关的弦长、中点弦问题.（难点）	1. 通过椭圆的性质和弦长、中点弦问题及椭圆综合问题的学习，培养数学运算素养. 2. 借助离心率问题的求解和直线与椭圆位置关系的判断，提升直观想象和逻辑推理素养.

自主预习

知新预学

1. 椭圆的简单几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
图形		
范围	$-a\leqslant x\leqslant a$ 且 $-b\leqslant y\leqslant b$	$-b\leqslant x\leqslant b$ 且 $-a\leqslant y\leqslant a$
焦点	$F_1(-c,0),F_2(c,0)$	$F_1(0,-c),F_2(0,c)$
焦距	$2c$	$2c$
顶点	$A_1(-a,0),A_2(a,0)$，$B_1(0,-b),B_2(0,b)$	$A_1(0,-a),A_2(0,a)$ $B_1(-b,0),B_2(b,0)$
轴长	短轴长为 $2b$ ，长轴长为 $2a$	
对称性	对称轴为 x 轴和 y 轴，对称中心为 $(0,0)$	
离心率	$e=\frac{c}{a}$ $(0<e<1)$	

2. 椭圆的离心率与椭圆的扁平程度间的关系

(1)椭圆的离心率越接近 1，则椭圆越扁平；

(2)椭圆的离心率越接近 0，则椭圆越接近圆.

3. 点与椭圆的位置关系

点 $P(x_0,y_0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的位置关系：

点 P 在椭圆上 $\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$；

点 P 在椭圆内部 $\Leftrightarrow$ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$ ；

点 P 在椭圆外部 $\Leftrightarrow$ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

4. 直线与椭圆的位置关系

联立直线 $y=kx+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的方程，得 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y 得到一个关于 x 的一元二次方程.

位置关系	解的个数	Δ 的取值
相交	两解	Δ $>$ 0
相切	一解	Δ $=$ 0
相离	无解	Δ $<$ 0

小试牛刀

1. 椭圆 $6x^2+y^2=6$ 的长轴的端点坐标是　（ D ）

A. $(-1,0),(1,0)$　B. $(-6,0),(6,0)$

C. $(-\sqrt{6},0),(\sqrt{6},0)$　D. $(0,-\sqrt{6}),(0,\sqrt{6})$

【解析】椭圆方程可化为 $x^2+\frac{y^2}{6}=1$，则长轴的端点坐标为 $(0,\pm\sqrt{6})$.

2. 椭圆 $25x^2+9y^2=225$ 的长轴长、短轴长、离心率依次是　（ B ）

A. 5，3，0.8　B. 10，6，0.8

C. 5，3，0.6　D. 10，6，0.6

【解析】椭圆方程可化为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$，则 $a=5,b=3,c=\sqrt{25-9}=4,e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0.8$，故选 B.

3. 已知椭圆的长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍，则该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】已知椭圆的长轴长是短轴长的$\sqrt{2}$倍，

即 $2a=2\sqrt{2}b$，$a=\sqrt{2}b$，

故 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 椭圆的中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，两顶点分别是$(4,0)$，$(0,2)$，则此椭圆的方程是 $\underline{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1}$.

【解析】由已知 $a=4$，$b=2$，椭圆的焦点在 x 轴上，所以椭圆方程是$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

互动课堂

合作探究

探究 1 由椭圆的标准方程研究简单几何性质

【例 1】求椭圆 $x^2+9y^2=81$ 的长轴长、短轴长、离心率、焦点和顶点坐标.

【解析】把已知方程化成标准方程为$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$，

所以 $a=9$，$b=3$，$c=\sqrt{81-9}=6\sqrt{2}$.

所以椭圆的长轴长 $2a=18$，短轴长 $2b=6$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，两个焦点的坐标分别为 $F_1(-6\sqrt{2},0)$，$F_2(6\sqrt{2},0)$，四个顶点的坐标分别为 $A_1(-9,0)$，$A_2(9,0)$，$B_1(0,-3)$，$B_2(0,3)$.

点睛 已知椭圆的方程讨论其性质时，应先把椭圆的方程化成标准形式，找准 a 与 b，才能正确地写出其相关性质. 在求顶点坐标和焦点坐标时，应注意焦点所在的坐标轴.

【变式训练 1】已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$，设椭圆 C_2 与椭圆 C_1 的长轴长、短轴长分别相等，且椭圆 C_2 的焦点在 y 轴上.

(1)求椭圆 C_1 的长半轴长、短半轴长、焦点坐标及离心率；

(2)写出椭圆 C_2 的方程，并研究其性质.

【解析】(1)由椭圆 C_1：$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 可得其长半轴长为 10，短半轴长为 8，焦点坐标$(6,0)$，$(-6,0)$，离心率 $e=\frac{3}{5}$.

(2)椭圆 C_2：$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$.

性质：①范围：$-8\leqslant x\leqslant 8$，$-10\leqslant y\leqslant 10$；

②对称性：关于 x 轴、y 轴、原点对称；

③顶点：长轴端点$(0,10)$，$(0,-10)$，短轴端点$(-8,0)$，$(8,0)$；

④焦点：$(0,6)$，$(0,-6)$；

⑤离心率：$e=\frac{3}{5}$.

探究 2 由椭圆的简单几何性质求标准方程

【例 2】求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1)经过点$(3,0)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

(2)焦距为 6，在 x 轴上的一个焦点与短轴两个端点的连线互相垂直.

【解析】(1)当椭圆的焦点在 x 轴上时，

因为 $a=3$，$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $c=\sqrt{6}$.

从而 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$；

当椭圆的焦点在 y 轴上时，因为 $b=3$，$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a^2=27$.

所以椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{27}+\frac{x^2}{9}=1$.

综上可知，所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ 或 $\frac{y^2}{27}+\frac{x^2}{9}=1$.

(2)设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由已知，得 $c=3$，$b=3$，所以 $a^2=b^2+c^2=18$.

故所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

点睛 (1)利用椭圆的几何性质求标准方程，通常采用待定系数法.

(2)根据已知条件求椭圆的标准方程的思路是“选标准，定参数”，一般步骤是：①确定焦点所在的坐标轴；②求出 a^2，b^2 的值；③写出标准方程.

【变式训练 2】求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1)长轴长是短轴长的 2 倍，且经过点 $A(2,0)$；

(2)短轴的一个端点到一个焦点的距离为 5，焦点到椭圆中心的距离为 3.

【解析】(1)若椭圆的焦点在 x 轴上，

设方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

∵椭圆过点 $A(2,0)$，∴$\frac{4}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1$，$a=2$.

∵$2a=2\times 2b$，∴$b=1$. ∴方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

若椭圆的焦点在 y 轴上.

设椭圆的方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

∵椭圆过点 $A(2,0)$，∴$\frac{0^2}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$.

∴$b=2$，$2a=2\cdot 2b$.

∴$a=4$.

∴方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$.

综上所述，椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$或$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$.

(2)由题意知$a=5,c=3,b^2=25-9=16$，焦点所在坐标轴可为x轴，也可为y轴，

故椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$或$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

探究3 求椭圆的离心率

【例3】设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$P$是$C$上的点，$PF_2\perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30°$，则椭圆$C$的离心率为（ D ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】方法一　由题意可设$|PF_2|=m$，结合条件可知$|PF_1|=2m$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}m$，故离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{\sqrt{3}m}{2m+m}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

方法二　由$PF_2\perp F_1F_2$可知P点的横坐标为c，将$x=c$代入椭圆方程可解得$y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以$|PF_2|=\frac{b^2}{a}$. 又由$\angle PF_1F_2=30°$可得$|F_1F_2|=\sqrt{3}|PF_2|$，故$2c=\sqrt{3}\cdot\frac{b^2}{a}$，变形可得$\sqrt{3}(a^2-c^2)=2ac$，等式两边同除以$a^2$，得$\sqrt{3}(1-e^2)=2e$，解得$e=\frac{\sqrt{3}}{3}$或$e=-\sqrt{3}$(舍去).

点睛 椭圆的离心率的求法

求椭圆的离心率，关键是寻找a与c的关系，一般地：

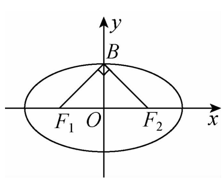
(1)若已知a,c，则直接代入$e=\frac{c}{a}$求解；

(2)若已知a,b，则由$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$求解；

(3)若已知a,b,c的关系，则可转化为a,c的齐次式，再转化为含e的方程求解即可.

【变式训练3】已知椭圆的两个焦点F_1,F_2与短轴的端点B构成等腰直角三角形，求椭圆的离心率.

【解析】如图，$|F_1F_2|=2c$，



∵$|BF_1|+|BF_2|=2a$，且$\triangle BF_1F_2$为等腰直角三角形.

∴$|BF_1|=|BF_2|=a=\sqrt{2}c$.

∴离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

探究4 直线与椭圆的位置关系及应用

【例4】过椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$内一点$M(2,1)$作一条弦，使弦被点$M$平分.

(1)求此弦所在的直线方程；

(2)求此弦长.

【解析】(1)方法一　设所求直线方程为$y-1=k(x-2)$. 代入椭圆方程并整理，得

$(4k^2+1)x^2-8(2k^2-k)x+4(2k-1)^2-16=0$.

又设直线与椭圆的交点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则x_1,x_2是方程的两个根，

所以$x_1+x_2=\frac{8(2k^2-k)}{4k^2+1}$.

又M为AB的中点，所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4(2k^2-k)}{4k^2+1}=2$，

解得$k=-\frac{1}{2}$.

故所求直线的方程为$x+2y-4=0$.

方法二　设直线与椭圆的交点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

又$M(2,1)$为AB的中点，所以$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$.

又A,B两点在椭圆上，

则$x_1^2+4y_1^2=16$，$x_2^2+4y_2^2=16$，

两式相减得$(x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)=0$.

于是$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.

所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{1}{2}$，

即$k_{AB}=-\frac{1}{2}$.

又直线AB过点$M(2,1)$，

故所求直线的方程为$x+2y-4=0$.

(2)设弦的两端点分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}x+2y-4=0,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$x^2-4x=0$，

所以$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=0$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{4^2-4\times 0}=2\sqrt{5}$.

点睛 (1)直线与椭圆相交，弦长的求法

①直接利用两点间距离公式：当弦的两端点的坐标易求时，可直接求出交点坐标，再用两点间距离公式求弦长.

②弦长公式：当弦的两端点的坐标不易求时，可用弦长公式. 设直线与椭圆交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，k为直线AB的斜率，则有

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$.

提醒：如果直线方程涉及斜率，要注意斜率不存在的情况.

(2)解决椭圆中点弦问题的两种方法

①根与系数的关系法：联立直线方程和椭圆方程构成方程组，消去一个未知数，利用一元二次方程根与系数的关系以及中点坐标公式解决.

②点差法：利用交点在曲线上，坐标满足方程，将交点坐标分别代入椭圆方程，然后作差，构造出中点坐标和斜率的关系.

具体如下：已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上的两个不同的点，$M(x_0,y_0)$ 是线段 AB 的中点，

则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减得 $\frac{1}{a^2}(x_1^2-x_2^2)+\frac{1}{b^2}(y_1^2-y_2^2)=0$，

变形得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$，即 $k_{AB}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

【变式训练 4】已知动点 P 与平面上两个定点 $A(-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0)$ 连线的斜率的积为定值 $-\frac{1}{2}$.

(1)试求动点 P 的轨迹方程 C；

(2)设直线 $l:y=kx+1$ 与曲线 C 交于 M,N 两点，当 $|MN|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时，求直线 l 的方程.

【解析】(1)设动点 P 的坐标是 (x,y)，

由题意得，$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{y}{x+\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{x-\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$，

化简整理得 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

$\therefore P$ 点的轨迹方程 C 是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1(x\neq\pm\sqrt{2})$.

(2)设直线 l 与曲线 C 的交点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kx=0$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{-4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=0$.

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

整理得 $k^4+k^2-2=0$，

解得 $k^2=1$ 或 $k^2=-2$(舍).

$\therefore k=\pm1$，经检验符合题意.

$\therefore$ 直线 l 的方程是 $y=\pm x+1$，即 $x-y+1=0$ 或 $x+y-1=0$.

随堂小练

1. 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$，$C_2:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$，则 (D)

A. C_1 与 C_2 的顶点相同　B. C_1 与 C_2 的长轴长相等

C. C_1 与 C_2 的短轴长相等　D. C_1 与 C_2 的焦距相等

【解析】由两个椭圆的标准方程可知：C_1 的顶点坐标为 $(\pm2\sqrt{3},0)$，$(0,\pm2)$，长轴长为 $4\sqrt{3}$，短轴长为 4，焦距为 $4\sqrt{2}$；C_2 的顶点坐标为 $(\pm4,0)$，$(0,\pm2\sqrt{2})$，长轴长为 8，短轴长为 $4\sqrt{2}$，焦距为 $4\sqrt{2}$. 故选 D.

2. 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的点 P 到椭圆左焦点的最大距离和最小距离分别是 (D)

A. 8,2　B. 5,4　C. 5,1　D. 9,1

【解析】因为 $a=5$，$c=4$，所以最大距离为 $a+c=9$，最小距离为 $a-c=1$.

3. 已知椭圆 C 的左、右焦点坐标分别是 $(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$，离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，则椭圆 C 的方程为 (A)

A. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$　B. $x^2+\frac{y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　D. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$

【解析】$\because \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，且 $c=\sqrt{2}$，$\therefore a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$.

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

4. 过椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点的最长弦和最短弦的长分别为 <u>4,3</u>.

【解析】过椭圆焦点的最长弦为长轴，其长度为 $2a=4$；最短弦为垂直于长轴的弦，因为 $c=1$，将 $x=1$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $\frac{1^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，解得 $y^2=\frac{9}{4}$，即 $y=\pm\frac{3}{2}$，所以最短弦的长为 $2\times\frac{3}{2}=3$.

5. 若椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$ 的左焦点为 F，右顶点为 A，上顶点为 B. 若 $\angle ABF=90°$，则椭圆的离心率为 <u>$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$</u>.

【解析】由已知 $|AB|^2+|BF|^2=|AF|^2$，

$\therefore(a^2+b^2)+a^2=(a+c)^2$. $\therefore a^2+b^2=2ac+c^2$.

又 $b^2=a^2-c^2$，$\therefore c^2+ac-a^2=0$，即 $e^2+e-1=0$.

$\therefore e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(e=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\text{舍}\right)$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十五)

课后作业 · 单独成册

3.2 双曲线

第 1 课时 双曲线及其标准方程

学习目标	核心素养
1. 理解双曲线的定义、几何图形和标准方程的推导过程.(重点) 2. 掌握双曲线的标准方程及其求法.(重点) 3. 会利用双曲线的定义和标准方程解决简单的问题.(难点)	1. 通过双曲线概念的学习，培养数学抽象素养. 2. 通过双曲线标准方程的求解及与双曲线有关的轨迹问题的学习，提升数学运算、逻辑推理和数学抽象素养.

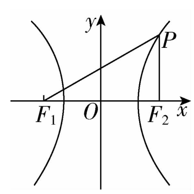
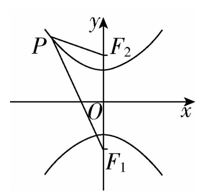
自主预习

知新预学

1. 双曲线的定义

平面内与两个定点 F_1,F_2 的__距离的差__的绝对值等于非零常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线. 这两个__定点__叫做双曲线的焦点，两个焦点间的距离叫做双曲线的__焦距__.

2. 双曲线的标准方程

焦点位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
图形		
焦点坐标	$F_1(-c,0),F_2(c,0)$	__$F_1(0,-c),F_2(0,c)$__
a,b,c 的关系	$c^2=$__a^2+b^2__	

小试牛刀

1. 动点 P 到点 $M(1,0)$ 的距离与到点 $N(3,0)$ 的距离的差为 2，则点 P 的轨迹是 (D)

A. 双曲线　　B. 双曲线的一支

C. 两条射线　　D. 一条射线

【解析】由已知 $|PM|-|PN|=2=|MN|$，得点 P 的轨迹是一条以 N 为端点的射线 NP.

2. 双曲线 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{2}=1$ 的焦距为 (D)

A. $3\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

【解析】$c^2=10+2=12$，所以 $c=2\sqrt{3}$，从而焦距为 $4\sqrt{3}$.

3. 已知双曲线的 $a=5,c=7$，则该双曲线的标准方程为 (C)

A. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$　　B. $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$

C. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ 或 $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$　　D. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=0$ 或 $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=0$

【解析】$a^2=25,b^2=c^2-a^2=7^2-5^2=24$，故选 C.

4. 双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的焦点坐标是 (B)

A. $(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0)$　　B. $(-2,0),(2,0)$

C. $(0,-\sqrt{2}),(0,\sqrt{2})$　　D. $(0,-2),(0,2)$

【解析】由双曲线的标准方程可知，$a^2=3,b^2=1$，则 $c^2=a^2+b^2=3+1=4$，故 $c=2$.

又焦点在 x 轴上，所以焦点坐标为 $(-2,0),(2,0)$.

互动课堂

合作探究

探究 1　双曲线标准方程的辨识

【例 1】已知方程 $\frac{x^2}{k-5}-\frac{y^2}{|k|-2}=1$ 对应的图形是双曲线，则实数 k 的取值范围是 (B)

A. $k>5$　　B. $k>5$ 或 $-2<k<2$

C. $k>2$ 或 $k<-2$　　D. $-2<k<2$

【解析】因为方程对应的图形是双曲线，

所以 $(k-5)(|k|-2)>0$.

即 $\begin{cases}k-5>0,\\|k|-2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k-5<0,\\|k|-2<0.\end{cases}$

解得 $k>5$ 或 $-2<k<2$.

点睛 双曲线方程的辨识方法

将双曲线的方程化为标准方程的形式，假如双曲线的方程为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$，则当$mn<0$时，方程表示双曲线.若$\begin{cases}m>0,\\n<0,\end{cases}$则方程表示焦点在$x$轴上的双曲线；若$\begin{cases}m<0,\\n>0,\end{cases}$则方程表示焦点在$y$轴上的双曲线.

【变式训练 1】(1)已知双曲线$\frac{x^2}{a-3}+\frac{y^2}{2-a}=1$，焦点在$y$轴上，若焦距为4，则$a=$ (D)

A. $\frac{3}{2}$　　B. 5

C. 7　　D. $\frac{1}{2}$

(2)在方程$mx^2-my^2=n$中，若$mn<0$，则方程所表示的曲线是 (C)

A. 焦点在x轴上的椭圆

B. 焦点在x轴上的双曲线

C. 焦点在y轴上的双曲线

D. 焦点在y轴上的椭圆

【解析】(1)根据题意可知，双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{2-a}-\frac{x^2}{3-a}=1$.由其焦距为4，得$c=2$，

则有$c^2=2-a+3-a=4$，解得$a=\frac{1}{2}$.

(2)方程$mx^2-my^2=n$可化为$\frac{y^2}{-\frac{n}{m}}-\frac{x^2}{-\frac{n}{m}}=1$.

$\because mn<0$，$\therefore -\frac{n}{m}>0$.

$\therefore$方程所表示的曲线是焦点在y轴上的双曲线.

探究 2 求双曲线的标准方程

【例 2】根据下列条件，求双曲线的标准方程：

(1)$c=\sqrt{6}$，经过点$(-5,2)$，焦点在x轴上；

(2)经过点$P\left(3,\frac{15}{4}\right)$，$Q\left(-\frac{16}{3},5\right)$，焦点在坐标轴上.

【解析】(1)$\because$焦点在x轴上，$c=\sqrt{6}$，

$\therefore$设所求双曲线方程为$\frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{6-\lambda}=1$(其中$0<\lambda<6$).

$\because$双曲线经过点$(-5,2)$，

$\therefore \frac{25}{\lambda}-\frac{4}{6-\lambda}=1$.

$\therefore \lambda=5$或$\lambda=30$(舍去).

$\therefore$所求双曲线方程为$\frac{x^2}{5}-y^2=1$.

(2)设双曲线的标准方程为$mx^2+ny^2=1(mn<0)$，

$\because$双曲线过点$P\left(3,\frac{15}{4}\right)$，$Q\left(-\frac{16}{3},5\right)$，

$\therefore \begin{cases}9m+\frac{225}{16}n=1,\\\frac{256}{9}m+25n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-\frac{1}{16},\\n=\frac{1}{9}.\end{cases}$

$\therefore$所求双曲线方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$.

点睛 (1)双曲线标准方程的两种求法

①定义法：根据双曲线的定义得到相应的a,b,c，再写出双曲线的标准方程.

②待定系数法：先设出双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$($a,b$均为正数)或$mx^2+ny^2=1(mn<0)$，然后根据条件求出待定系数代入方程即可.

(2)求双曲线标准方程的两个关注点

①定位，是指确定与坐标系的相对位置，在标准方程的前提下，确定焦点位于哪条坐标轴上，以此判断方程的形式.

②定量，是指确定a^2,b^2的具体数值，常根据条件列方程求解.

【变式训练 2】求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1)$a=4$，经过点$A\left(1,-\frac{4\sqrt{10}}{3}\right)$；

(2)经过点$(3,0)$，$(-6,-3)$.

【解析】(1)当焦点在x轴上时，

设所求标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，

把A点的坐标代入，得$b^2=-\frac{16}{15}\times\frac{160}{9}<0$，不符合题意；

当焦点在y轴上时，

设所求标准方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{b^2}=1(b>0)$，

把A点的坐标代入，得$b^2=9$，

$\therefore$所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

(2)设双曲线的方程为$mx^2+ny^2=1(mn<0)$，

$\because$双曲线经过点$(3,0)$，$(-6,-3)$，

$\therefore \begin{cases}9m+0=1,\\36m+9n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{1}{9},\\n=-\frac{1}{3},\end{cases}$

$\therefore$所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$.

探究 3 双曲线的定义及标准方程的应用

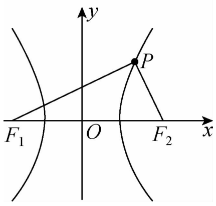
【例 3】设P为双曲线$x^2-\frac{y^2}{12}=1$上的一点，F_1,F_2是该双曲线的两个焦点，若$|PF_1|:|PF_2|=3:2$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为 (B)

A. $6\sqrt{3}$　　B. 12　　C. $12\sqrt{3}$　　D. 24

【解析】如图所示，$\because |PF_1|-|PF_2|=2a=2$，且$|PF_1|:$

$|PF_2|=3:2$,

$\therefore |PF_1|=6, |PF_2|=4$.



又$\because |F_1F_2|=2c=2\sqrt{13}$,

$\therefore |PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$, $\therefore \angle F_1PF_2=90°$,

$\therefore S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\times6\times4=12$.

点睛 在解决与焦点三角形有关的问题时,首先要注意定义中条件$||PF_1|-|PF_2||=2a$的应用,其次要利用余弦定理、勾股定理等知识进行运算.在运算过程中要注意整体思想和一些变形技巧的应用.

【变式训练3】 已知F_1,F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点.若$P$是双曲线左支上的点,且$|PF_1|\cdot|PF_2|=32$.求$\triangle F_1PF_2$的面积.

【解析】 因为P是双曲线左支上的点,

所以$|PF_2|-|PF_1|=6$,

两边平方得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=36$,

所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=36+2|PF_1|\cdot|PF_2|=36+2\times32=100$.

在$\triangle F_1PF_2$中,由余弦定理,

得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{100-100}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=0$,所以$\angle F_1PF_2=90°$,

所以$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\times32=16$.

随堂小练

1. 双曲线$\frac{x^2}{m^2+12}-\frac{y^2}{4-m^2}=1$的焦距是 (C)

A. 4　　B. $2\sqrt{2}$

C. 8　　D. 与m有关

【解析】 $c^2=m^2+12+4-m^2=16$, $\therefore c=4, 2c=8$.

2. 已知方程$\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$表示双曲线,且该双曲线两个焦点间的距离为4,则$n$的取值范围是 (A)

A. $(-1,3)$　　B. $(-1,\sqrt{3})$

C. $(0,3)$　　D. $(0,\sqrt{3})$

【解析】 由题意得$(m^2+n)(3m^2-n)>0$,解得$-m^2<n<3m^2$,又由该双曲线两焦点间的距离为4,得$m^2+n+3m^2-n=4$,即$m^2=1$,所以$-1<n<3$.

3. 已知点$F_1(-\sqrt{2},0)$,$F_2(\sqrt{2},0)$,动点P满足$|PF_2|-|PF_1|=2$.则当点P的纵坐标是$\frac{1}{2}$时,点P到坐标原点的距离是 (A)

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【解析】 因为动点P满足$|PF_2|-|PF_1|=2$,为定值,且$2<2\sqrt{2}$,所以P点的轨迹为双曲线的一支.因为$2a=2$,所以$a=1$.又因为$c=\sqrt{2}$,所以$b^2=c^2-a^2=1$.所以P点轨迹为$x^2-y^2=1$的一支.当$y=\frac{1}{2}$时,$x^2=1+y^2=\frac{5}{4}$,则P点到原点的距离为$|PO|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. 若点$F(0,5)$是双曲线$\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{9}=1$的一个焦点,则$m=$__16__.

【解析】 由焦点$F(0,5)$可知双曲线$\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{9}=1$的焦点落在$y$轴上,$\therefore m>0$,且$m+9=5^2$,解得$m=16$.

5. 已知双曲线的两个焦点分别为$F_1(-3,0)$和$F_2(3,0)$,且点$P\left(\frac{5}{2},1\right)$在双曲线的右支上,则该双曲线的方程是__$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$__.

【解析】 方法一　利用双曲线定义.

$2a=|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{\frac{121}{4}+1}-\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{5\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$,

$\therefore a=\sqrt{5}, b^2=c^2-a^2=4$.

故所求方程为$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$.

方法二　待定系数法.

设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9-a^2}=1$,

则有$\frac{25}{4a^2}-\frac{1}{9-a^2}=1$, $\therefore 4a^4-65a^2+225=0$.

$\therefore a^2=5$或$a^2=\frac{45}{4}>9$(舍去).

$\therefore$双曲线方程为$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十六)

课后作业·单独成册

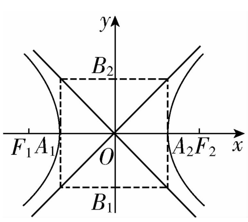
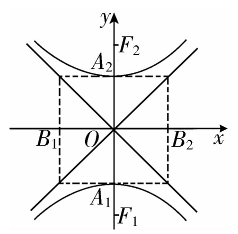
第2课时 双曲线的简单几何性质

学习目标	核心素养
1. 掌握双曲线的简单几何性质.(重点) 2. 理解双曲线的渐近线及离心率的意义.(难点)	1. 通过学习双曲线的简单几何性质,培养直观想象和数学运算素养. 2. 借助双曲线简单几何性质的应用及直线与双曲线位置关系的应用,提升直观想象、数学运算和逻辑推理素养.

自主预习

知新预学

双曲线的简单几何性质

标准方程		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
图形			
性质	焦点	$F_1(-c,0),F_2(c,0)$	$F_1(0,-c),F_2(0,c)$
	焦距	$2c$	$2c$
	范围	$x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a,y\in\mathbf{R}$	$y\geqslant a$ 或 $y\leqslant -a,x\in\mathbf{R}$
	顶点	$A_1(-a,0),A_2(a,0)$	$A_1(0,-a),A_2(0,a)$
	轴长	实轴长为 $2a$,虚轴长为 $2b$	
	对称性	对称轴为 x 轴和 y 轴,对称中心为(0,0)	
	离心率	$e=\frac{c}{a}\ (e>1)$	
	渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$

小试牛刀

1. 双曲线 $\frac{x^2}{16}-y^2=1$ 的顶点坐标是 (B)

A. (4,0),(0,1) B. (−4,0),(4,0)

C. (0,1),(0,−1) D. (−4,0),(0,−1)

【解析】由题意知,双曲线的焦点在 x 轴上,且 $a=4$,因此双曲线的顶点坐标是(−4,0),(4,0).

2. 在平面直角坐标系中,实半轴长为1,虚半轴长为2的双曲线的标准方程是 (D)

A. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ B. $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 或 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$ D. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 或 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

【解析】由题意,知 $a=1,b=2$. 焦点在 x 轴上时,双曲线的标准方程是 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$;焦点在 y 轴上时,双曲线的标准方程为 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$. 故选 D.

3. 若双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$,则双曲线的焦点坐标是 $(-\sqrt{7},0),(\sqrt{7},0)$.

【解析】由双曲线方程得出其渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{m}}{2}x$,

$\therefore m=3$,求得双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$,从而得到焦点坐标为 $(-\sqrt{7},0),(\sqrt{7},0)$.

4. 已知点(2,3)在双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上,C 的焦距为4,则它的离心率为 2.

【解析】由题意知 $\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,c^2=a^2+b^2=4$,得 $a=1,b=\sqrt{3}$,$\therefore e=2$.

互动课堂

合作探究

探究1 由双曲线的标准方程研究简单几何性质

【例1】求双曲线 $9y^2-4x^2=-36$ 的顶点坐标、焦点坐标、实轴长、虚轴长、离心率和渐近线方程.

【解析】将 $9y^2-4x^2=-36$ 变形为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$,

$\therefore a=3,b=2,c=\sqrt{13}$.

∴顶点坐标为(−3,0),(3,0),

焦点坐标为 $(-\sqrt{13},0),(\sqrt{13},0)$,

实轴长是 $2a=6$,虚轴长是 $2b=4$,

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$,

渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{2}{3}x$.

点睛 已知双曲线的方程求其几何性质时,若不是标准方程则首先化为标准方程,确定方程中 a,b 的对应值,利用 $c^2=a^2+b^2$ 得到 c,然后确定双曲线的焦点位置,从而写出双曲线的几何性质.

【变式训练 1】 已知双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 与 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$,下列说法正确的是 (C)

A. 两个双曲线有公共顶点

B. 两个双曲线有公共焦点

C. 两个双曲线有公共渐近线

D. 两个双曲线的离心率相等

【解析】 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点和顶点都在 x 轴上,而双曲线 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ 的焦点和顶点都在 y 轴上,因此可排除选项 A 和 B;双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的离心率 $e_1=\sqrt{\frac{9+16}{9}}=\frac{5}{3}$,而双曲线 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ 的离心率 $e_2=\sqrt{\frac{16+9}{16}}=\frac{5}{4}$,因此可排除选项 D;易得 C 正确.

探究 2 由双曲线的简单几何性质求标准方程

【例 2】 求适合下列条件的双曲线的标准方程:

(1)焦点在 x 轴上,虚轴长为 8,离心率为 $\frac{5}{3}$;

(2)与双曲线 $x^2-2y^2=2$ 有公共渐近线,且经过点 $M(2,-2)$.

【解析】 (1)设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,由题意知 $2b=8$,$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$,从而 $b=4$,$c=\frac{5}{3}a$,代入 $c^2=a^2+b^2$,得 $a^2=9$,故双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)∵所求双曲线与双曲线 $x^2-2y^2=2$ 有公共渐近线,

∴设所求双曲线方程为 $x^2-2y^2=\lambda$.

又双曲线过点 $M(2,-2)$,

∴$2^2-2\cdot(-2)^2=\lambda$,即 $\lambda=-4$.

∴所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$.

点睛 (1)用待定系数法求双曲线标准方程的一般步骤

①根据焦点所在的位置设双曲线的标准方程;

②由已知条件求出待定系数 a,b;

③将求得的系数 a,b 代入所设方程,即得所求双曲线的标准方程.

(2)如果已知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,那么此双曲线方程可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$.

【变式训练 2】 根据下列条件,求双曲线的标准方程:

(1)已知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,焦距为 10;

(2)已知双曲线与椭圆 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$ 共焦点,与双曲线 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ 共渐近线.

【解析】 (1)当焦点在 x 轴上时,设所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

由渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,得 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,

又 $2c=10$,$c^2=a^2+b^2$,∴$a^2=20$,$b^2=5$,

∴双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$;

当焦点在 y 轴上时,同理可得双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1$,

∴所求双曲线的标准方程为

$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ 或 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1$.

(2)∵椭圆 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$ 的焦点为 $(0,\pm5)$.

又双曲线 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{4}{3}x$,

∴设所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

则 $\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{4}{3},\\ a^2+b^2=25,\end{cases}$ 解得 $b^2=9$,$a^2=16$.

∴所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

探究 3 求双曲线的离心率

【例 3】 过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点作一条与其渐近线平行的直线,交 C 于点 P.若点 P 的横坐标为 $2a$,则 C 的离心率为 $\underline{\quad 2+\sqrt{3}\quad}$.

【解析】 不妨设与渐近线平行的直线 l 的斜率为 $\frac{b}{a}$,又直线 l 过右焦点 $F(c,0)$,所以直线 l 的方程为 $y=\frac{b}{a}(x-c)$.因为点 P 的横坐标为 $2a$,代入双曲线方程得 $\frac{4a^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,化简得 $y=\sqrt{3}b$ 或 $y=-\sqrt{3}b$,当 $y=\sqrt{3}b$ 时,由 $\sqrt{3}b=\frac{b}{a}(2a-c)$ 得离

心率 $e=\frac{c}{a}=2-\sqrt{3}$（舍去），当 $y=-\sqrt{3}b$ 时，由 $-\sqrt{3}b=\frac{b}{a}(2a-c)$ 得离心率 $e=\frac{c}{a}=2+\sqrt{3}$.

点睛 求双曲线离心率的两种方法

(1)直接法：若已知 a,c，可直接利用 $e=\frac{c}{a}$ 求解；若已知 a,b，可利用 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 求解.

(2)方程法：若无法求出 a,b,c 的具体值，但根据条件可确定 a,b,c 之间的关系，可通过 $b^2=c^2-a^2$，将关系式转化为关于 a,c 的齐次方程，借助 $e=\frac{c}{a}$，转化为关于 e 的方程求解.

【变式训练 3】(1)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，若 $\frac{b}{a}=2$，求双曲线的离心率；

(2)设点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右支上，双曲线的两个焦点为 F_1,F_2，$|PF_1|=4|PF_2|$，求双曲线的离心率的取值范围.

【解析】(1)∵$c=\sqrt{a^2+b^2}$，

∴$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(2)由双曲线定义得：$|PF_1|-|PF_2|=2a$，

与已知 $|PF_1|=4|PF_2|$ 联立解得：

$|PF_1|=\frac{8}{3}a$，$|PF_2|=\frac{2}{3}a$.

由 $|PF_1|+|PF_2|\geqslant|F_1F_2|$ 得：

$\frac{8}{3}a+\frac{2}{3}a\geqslant 2c$，解得 $1<e\leqslant\frac{5}{3}$.

所以离心率的取值范围为 $\left(1,\frac{5}{3}\right]$.

探究 4 直线与双曲线的位置关系及应用

【例 4】 已知直线 $l:y=kx+2$，双曲线 $C:x^2-4y^2=4$. 当 k 为何值时：

(1)l 与 C 无公共点？

(2)l 与 C 有唯一公共点？

(3)l 与 C 有两个不同的公共点？

【解析】将 $y=kx+2$ 代入双曲线 C 的方程并整理，得 $(1-4k^2)x^2-16kx-20=0$. ①

当 $1-4k^2\neq0$ 时，$\Delta=(-16k)^2-4(1-4k^2)\cdot(-20)=16(5-4k^2)$.

(1)当 $\begin{cases}1-4k^2\neq0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 即 $k<-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，l 与 C 无公共点.

(2)当 $1-4k^2=0$，即 $k=\pm\frac{1}{2}$ 时，方程①只有一解；

当 $1-4k^2\neq0$ 且 $\Delta=0$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，方程①有两个相同的解. 故当 $k=\pm\frac{1}{2}$ 或 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，l 与 C 有唯一公共点.

(3)当 $\begin{cases}1-4k^2\neq0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $-\frac{\sqrt{5}}{2}<k<\frac{\sqrt{5}}{2}$ 且 $k\neq\pm\frac{1}{2}$ 时，方程①有两个不同的解，此时 l 与 C 有两个不同的公共点.

点睛 将直线方程与双曲线方程联立消元后，用判别式可以判断直线与双曲线的位置关系：当 $\Delta>0$ 时，直线与双曲线相交；当 $\Delta=0$ 时，直线与双曲线相切；当 $\Delta<0$ 时，直线与双曲线相离.(联立直线与双曲线的方程消元后，应注意讨论二次项系数是否为零的情况)

【变式训练 4】已知双曲线的一个焦点为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，且渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，过点 $A(2,1)$ 的直线 l 与该双曲线交于 P_1,P_2 两点.

(1)求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程；

(2)过点 $B(1,1)$，能否作直线 l'，使 l' 与已知双曲线交于 Q_1,Q_2 两点，且 B 是线段 Q_1Q_2 的中点？请说明理由.

【解析】(1)设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

∵$c=\sqrt{3}$，$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，∴$\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{3-a^2}{a^2}=2$，

∴$a^2=1$，$b^2=2$.

故双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，线段 P_1P_2 的中点为 $P(x,y)$，

则 $x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1$，①

$x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1$. ②

①－②得 $2(x_1+x_2)(x_1-x_2)=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$，

当 $x_1\neq x_2$，$y\neq0$ 时，$\frac{2x}{y}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. ③

又∵P_1,P_2,P,A 四点共线，

∴$\frac{y-1}{x-2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. ④

由③④得 $\frac{2x}{y}=\frac{y-1}{x-2}$，即 $2x^2-y^2-4x+y=0$，

故中点 P 的轨迹方程为 $2x^2-y^2-4x+y=0$.

(2)假设存在直线 l'，同(1)可得 l' 的斜率为 2，

∴l' 的方程为 $y=2x-1$.

∵$\begin{cases}y=2x-1,\\ x^2-\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 无解，与假设矛盾，

∴满足条件的直线 l' 不存在.

随堂小练

1. 若 $a>1$，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是 （ C ）

A. $(\sqrt{2},+\infty)$　　B. $(\sqrt{2},2)$

C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(1,2)$

【解析】由题意得双曲线的离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$.

即 $e^2=\frac{a^2+1}{a^2}=1+\frac{1}{a^2}$.

$\because a>1$，$\therefore 0<\frac{1}{a^2}<1$，

$\therefore 1<1+\frac{1}{a^2}<2$，$\therefore 1<e<\sqrt{2}$.

2. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点为 $F(2,0)$，且双曲线的渐近线与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 相切，则双曲线的方程为 （ D ）

A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{13}=1$　　B. $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{9}=1$

C. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　D. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

【解析】由双曲线的渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 相切可知 $\frac{\left|\left(\pm\frac{b}{a}\right)\times 2\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=\sqrt{3}$，化简得 $b^2=3a^2$.

又 $\begin{cases}c=2,\\a^2+b^2=c^2,\\b^2=3a^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=1,\\b^2=3.\end{cases}$

故所求双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

3. 设双曲线的一个焦点为 F，虚轴的一个端点为 B，如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直，那么此双曲线的离心率为 （ D ）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，不妨设一个焦点为 $F(c,0)$，虚轴端点为 $B(0,b)$，则 $k_{FB}=-\frac{b}{c}$. 又渐近线的斜率为 $\pm\frac{b}{a}$，所以由直线垂直关系得 $-\frac{b}{c}\cdot\frac{b}{a}=-1$ $\left(-\frac{b}{a}\text{显然不符合}\right)$，即 $b^2=ac$，又 $c^2-a^2=b^2$，故 $c^2-a^2=ac$，两边同除以 a^2，得方程 $e^2-e-1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（舍负值）.

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 和椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 有相同的焦点，且双曲线的离心率是椭圆的离心率的 2 倍，则双曲线的方程为 <u>$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$</u> .

【解析】由题意知，椭圆的焦点坐标是 $(\pm\sqrt{7},0)$，离心率是 $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 故在双曲线中 $c=\sqrt{7}$，$e=\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{c}{a}$，故 $a=2$，$b^2=c^2-a^2=3$，故所求双曲线的方程是 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

温馨提示：请自主完成课后作业（二十七）

课后作业 · 单独成册

3.3 抛物线

第 1 课时 抛物线及其标准方程

学习目标	核心素养
1. 掌握抛物线的定义及焦点、准线的概念.(重点) 2. 掌握抛物线的标准方程及其推导过程.(易错点) 3. 明确 p 的几何意义,会求抛物线的标准方程.(难点)	1. 通过抛物线的定义的学习,培养数学抽象素养. 2. 通过抛物线的标准方程的应用,培养直观想象和数学建模素养.

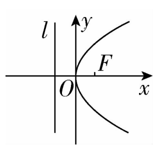
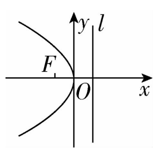
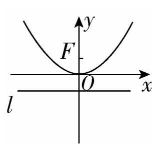
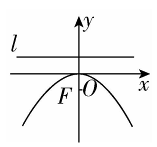
自主预习

知新预学

1. 抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l(l 不经过点 F)的距离相等的点的轨迹叫做__抛物线__. 点 F 叫做抛物线的__焦点__,直线 l 叫做抛物线的__准线__.

2. 抛物线的标准方程

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
	$y^2=2px(p>0)$	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$
	$y^2=-2px(p>0)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$x=\frac{p}{2}$
	$x^2=2py(p>0)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$y=-\frac{p}{2}$
	$x^2=-2py(p>0)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$	$y=\frac{p}{2}$

小试牛刀

1. 抛物线 $y^2=-8x$ 的焦点坐标是 (B)

A. $(2,0)$ B. $(-2,0)$

C. $(4,0)$ D. $(-4,0)$

【解析】抛物线 $y^2=-8x$ 的焦点在 x 轴的负半轴上,且 $\frac{p}{2}=2$,因此焦点坐标是 $(-2,0)$.

2. 抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到准线的距离是 (C)

A. 1 B. 2

C. 4 D. 8

【解析】由 $y^2=8x$ 得 $p=4$,即焦点到准线的距离为 4.

3. 抛物线 $x=4y^2$ 的准线方程是 (C)

A. $y=\frac{1}{2}$ B. $y=-1$

C. $x=-\frac{1}{16}$ D. $x=\frac{1}{8}$

【解析】由 $x=4y^2$ 得 $y^2=\frac{1}{4}x$,故准线方程为 $x=-\frac{1}{16}$.

4. 已知抛物线的顶点为坐标原点,焦点在 y 轴上,抛物线上的点 $M(m,-2)$ 到焦点的距离为 4,则 $m=$__±4__.

【解析】由已知可设抛物线方程为 $x^2=-2py$. 由抛物线定义有 $2+\frac{p}{2}=4$,$\therefore p=4$,$\therefore x^2=-8y$. 将 $(m,-2)$ 代入上式,得 $m^2=16$. $\therefore m=\pm4$.

互动课堂

合作探究

探究 1 求抛物线的标准方程

【例 1】求适合下列条件的抛物线的标准方程:

(1)经过点 $(-3,2)$;

(2)焦点在直线 $x-2y-4=0$ 上.

【解析】(1)当抛物线的焦点在 x 轴上时,

可设抛物线方程为 $y^2=-2px(p>0)$,

把 $(-3,2)$ 代入得 $2^2=-2p\times(-3)$,$\therefore p=\frac{2}{3}$.

$\therefore$ 所求抛物线方程为 $y^2=-\frac{4}{3}x$.

当抛物线的焦点在 y 轴上时，

可设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$，

把 $(-3,2)$ 代入得 $(-3)^2=2p\times2$，

$\therefore p=\frac{9}{4}$.

$\therefore$ 所求抛物线方程为 $x^2=\frac{9}{2}y$.

综上，所求抛物线的标准方程为 $y^2=-\frac{4}{3}x$ 或 $x^2=\frac{9}{2}y$.

(2)直线 $x-2y-4=0$ 与 x 轴的交点为 $(4,0)$，与 y 轴的交点为 $(0,-2)$，故抛物线焦点为 $(4,0)$ 或 $(0,-2)$，

当焦点为 $(4,0)$ 时，设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，

$\because \frac{p}{2}=4$，$\therefore p=8$，$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=16x$，

当焦点为 $(0,-2)$ 时，设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$，

$\because -\frac{p}{2}=-2$，$\therefore p=4$，$\therefore$ 抛物线方程为 $x^2=-8y$.

综上，所求抛物线方程为 $y^2=16x$ 或 $x^2=-8y$.

点睛 求抛物线的标准方程的方法：(1)当焦点位置确定时，可利用待定系数法，设出抛物线的标准方程，由已知条件建立关于参数 p 的方程，求出 p 的值，进而写出抛物线的标准方程；(2)当焦点位置不确定时，可设抛物线的方程为 $y^2=mx$ 或 $x^2=ny$，利用已知条件求出 m,n 的值.

【变式训练 1】(1)若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点坐标为 $(1,0)$，则 $p=$__2__，准线方程为__$x=-1$__.

(2)已知抛物线的焦点 F 在 x 轴上，直线 $y=-3$ 与抛物线交于点 A，$|AF|=5$，求抛物线的标准方程.

【解析】(1)$\because$ 抛物线的焦点坐标为 $(1,0)$，$\therefore \frac{p}{2}=1$，$p=2$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}=-1$.

(2)设抛物线的标准方程为 $y^2=2ax(a\neq0)$，$A(m,-3)$.

由抛物线的定义得 $|AF|=\left|m+\frac{a}{2}\right|=5$，

又 $(-3)^2=2am$，$\therefore a=\pm1$ 或 $a=\pm9$.

$\therefore$ 所求抛物线的标准方程为 $y^2=\pm2x$ 或 $y^2=\pm18x$.

探究 2 已知抛物线方程求焦点坐标和准线方程

【例 2】 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1)$y^2=-4x$；(2)$2y^2-x=0$.

【解析】(1)$\because y^2=-4x$，$\therefore$ 抛物线的焦点在 x 轴的负半轴上，

又 $2p=4$，$\therefore p=2$.

$\therefore$ 焦点坐标为 $(-1,0)$，准线方程为 $x=1$.

(2)由 $2y^2-x=0$，得 $y^2=\frac{1}{2}x$.

$\therefore$ 抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上，

又 $2p=\frac{1}{2}$，$\therefore p=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 焦点坐标为 $\left(\frac{1}{8},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{1}{8}$.

点睛 此类问题是抛物线标准方程的应用，一是要理解抛物线标准方程的结构形式，二是要理解 p 的几何意义，三是要注意焦点坐标与准线方程之间的关系. 步骤：(1)化为标准方程；(2)明确开口方向；(3)求 p 的值；(4)写焦点坐标和准线方程.

【变式训练 2】求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1)$y=-\frac{1}{8}x^2$；(2)$x^2=ay(a\neq0)$.

【解析】(1)将抛物线方程 $y=-\frac{1}{8}x^2$ 变形为 $x^2=-8y$，所以抛物线的焦点在 y 轴的负半轴上，又 $2p=8$，所以 $p=4$.

所以焦点坐标为 $(0,-2)$，准线方程为 $y=2$.

(2)当 $a>0$ 时，抛物线的焦点在 y 轴的正半轴上，又 $2p=a$，所以 $p=\frac{a}{2}$，所以焦点坐标为 $\left(0,\frac{a}{4}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{a}{4}$；

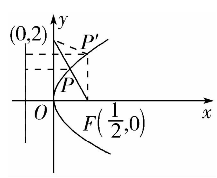
当 $a<0$ 时，抛物线的焦点在 y 轴的负半轴上，又 $2p=a$，所以焦点坐标为 $\left(0,\frac{a}{4}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{a}{4}$.

综上，抛物线的焦点坐标为 $\left(0,\frac{a}{4}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{a}{4}$.

探究 3 抛物线定义的应用

【例 3】 已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点，求点 P 到点 $(0,2)$ 的距离与到该抛物线准线的距离之和的最小值.

【解析】由抛物线的定义可知，抛物线上的点到准线的距离等于到焦点的距离. 由图可知，点 P，点 $(0,2)$ 和抛物线的焦点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 三点共线时距离之和最小. 所以最小距离 $d=\sqrt{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+(2-0)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

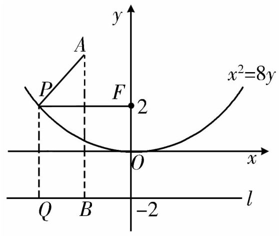


点睛 解此类最值、定值问题时，首先要注意抛物线定义的转化应用，其次要注意平面几何知识的应用，例如两点之间线段最短，三角形中三边之间的不等关系，点与直线的连线中垂线段最短等.

【变式训练 3】已知抛物线的方程为 $x^2=8y$，F 是焦点，点 $A(-2,4)$，在此抛物线上求一点 P，使 $|PF|+|PA|$ 的值最小.

【解析】∵$A(-2,4)$，而$(-2)^2<8\times4$，

∴点 A 在抛物线 $x^2=8y$ 的内部.如图所示.



设抛物线的准线为 l，过点 P 作 $PQ\perp l$ 于点 Q，过点 A 作 $AB\perp l$ 于点 B.

由抛物线的定义可知，$|PF|+|PA|=|PQ|+|PA|\geqslant|AQ|\geqslant|AB|$，当且仅当 A,P,Q 三点共线时，$|PF|+|PA|$ 取得最小值，即为 $|AB|$.此时 P 点的横坐标为 $x_P=-2$，代入 $x^2=8y$，得 $y_P=\frac{1}{2}$.

∴使 $|PF|+|PA|$ 的值最小的抛物线上的点 P 的坐标为 $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.

随堂小练

1. 焦点是 $F(0,5)$ 的抛物线的标准方程是 (B)

A. $y^2=20x$　　B. $x^2=20y$

C. $y^2=\frac{1}{20}x$　　D. $x^2=\frac{1}{20}y$

【解析】由 $5=\frac{p}{2}$ 得 $p=10$，又焦点在 y 轴正半轴上，故方程形式为 $x^2=2py$，即 $x^2=20y$.

2. 过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线于 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 两点，若 $y_1+y_2=6$，则 $|P_1P_2|=$ (C)

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10

【解析】由抛物线的定义知 $|P_1P_2|=y_1+y_2+p=6+2=8$.

3. 设抛物线的顶点在原点，准线方程为 $x=-2$，则抛物线的标准方程是 (C)

A. $y^2=-8x$　　B. $y^2=-4x$

C. $y^2=8x$　　D. $y^2=4x$

【解析】显然由准线方程 $x=-2$，可知抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，$p=4$，所以抛物线的标准方程为 $y^2=2px=8x$.

4. 已知圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线相切，则 $p=$__2__.

【解析】由 $x^2+y^2-6x-7=0$，得 $(x-3)^2+y^2=16$，∴准线方程为 $x=-\frac{p}{2}=-1$，即 $p=2$.

5. 以双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的右顶点为焦点的抛物线的标准方程为__$y^2=16x$__.

【解析】由双曲线方程 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，

可知其焦点在 x 轴上，由 $a^2=16$，得 $a=4$，

∴该双曲线右顶点的坐标是 $(4,0)$.

∴抛物线的焦点为 $F(4,0)$.设抛物线的标准方程为 $y^2=2px(p>0)$，则由 $\frac{p}{2}=4$，得 $p=8$，

故所求抛物线的标准方程为 $y^2=16x$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十八)

课后作业·单独成册

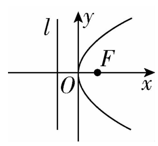
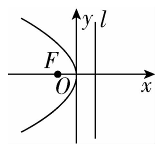
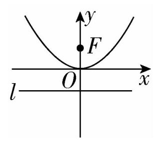
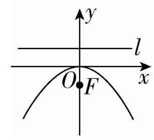
第2课时　抛物线的简单几何性质

学习目标	核心素养
1. 掌握抛物线的简单几何性质.(重点) 2. 掌握直线与抛物线的位置关系的判断.(重点) 3. 能利用方程及数形结合思想解决焦点弦、弦中点等问题.(难点)	1. 通过抛物线简单几何性质的应用,培养数学运算素养. 2. 通过直线与抛物线的位置关系、焦点弦及弦中点等综合问题的学习,提升逻辑推理、直观想象和数学运算素养.

自主预习

知新预学

1. 抛物线的几何性质

标准方程		$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
图形					
性质	焦点	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
	准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
	范围	$x\geqslant 0,y\in\mathbf{R}$	$x\leqslant 0,y\in\mathbf{R}$	$y\geqslant 0,x\in\mathbf{R}$	$y\leqslant 0,x\in\mathbf{R}$
	对称轴	x 轴		y 轴	
	顶点	$(0,0)$			
	离心率	$e=1$			

2. 焦点弦

直线过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F,与抛物线交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$两点,由抛物线的定义知,$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$,$|BF|=x_2+\frac{p}{2}$,故$|AB|=$ x_1+x_2+p .

3. 直线与抛物线的位置关系

直线 $y=kx+b$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$的交点个数即关于 x 的方程组$\begin{cases}y=kx+b,\\y^2=2px\end{cases}$解的个数,即二次方程 $k^2x^2+2(kb-p)x+b^2=0$ 解的个数.

当 $k\neq 0$ 时,若 $\Delta>0$,则直线与抛物线有 两 个不同的公共点;若 $\Delta=0$,则直线与抛物线有 一 个公共点;若 $\Delta<0$,则直线与抛物线 没有 公共点.

当 $k=0$ 时,直线与抛物线的对称轴 平行或重合 ,此时直线与抛物线有 一 个公共点.

小试牛刀

1. 四种标准方程对应的抛物线有相同的　　(A)

A. 顶点　　B. 焦点

C. 准线　　D. 对称轴

2. 抛物线 $y=4x^2$ 上的一点 M 到焦点的距离为1,则点 M 到 x 轴的距离是　　(D)

A. $\frac{17}{16}$　　B. $\frac{7}{8}$

C. 1　　D. $\frac{15}{16}$

【解析】抛物线方程可化为 $x^2=\frac{1}{4}y$，其准线方程为 $y=-\frac{1}{16}$，点 M 到焦点的距离等于点 M 到准线的距离. ∴点 M 到 x 轴的距离是 $\frac{15}{16}$.

3. 顶点在原点，对称轴为 y 轴，顶点到准线的距离为 4 的抛物线的方程是 (D)

A. $x^2=16y$　　B. $x^2=8y$

C. $x^2=\pm8y$　　D. $x^2=\pm16y$

【解析】顶点在原点，对称轴为 y 轴的抛物线方程有两个：$x^2=-2py$，$x^2=2py$，$p>0$. 由顶点到准线的距离为 4 知 $p=8$，故所求抛物线方程为 $x^2=16y$ 或 $x^2=-16y$.

4. 已知过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A，B 两点，$|AF|=2$，则 $|BF|=$ __2__.

【解析】$F(1,0)$，由抛物线定义得 A 点横坐标为 1. ∴$AF\perp x$ 轴，∴$|BF|=|AF|=2$.

互动课堂

合作探究

探究 1 抛物线的方程及几何性质

【例 1】求顶点在原点，以 x 轴为对称轴，过焦点且垂直于 x 轴的弦 AB 的长为 8 的抛物线的方程，并指出它的焦点坐标和准线方程.

【解析】当焦点在 x 轴的正半轴上时，

设方程为 $y^2=2px(p>0)$.

当 $x=\frac{p}{2}$ 时，$y=\pm p$，

由 $|AB|=2p=8$，得 $p=4$.

故抛物线方程为 $y^2=8x$，

焦点坐标为 $(2,0)$，准线方程为 $x=-2$.

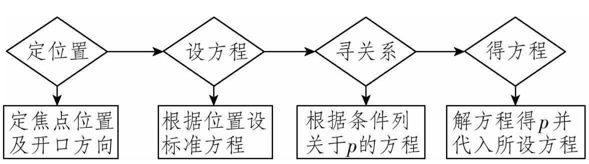
当焦点在 x 轴的负半轴上时，

设方程 $y^2=-2px(p>0)$.

由对称性知抛物线方程为 $y^2=-8x$，

焦点坐标为 $(-2,0)$，准线方程为 $x=2$.

点睛 用待定系数法求抛物线的标准方程，其主要步骤为：



【变式训练 1】已知抛物线的焦点 F 在 x 轴上，直线 l 过 F 且垂直于 x 轴，l 与抛物线交于 A，B 两点，O 为坐标原点，若 $\triangle OAB$ 的面积等于 4，求抛物线的标准方程.

【解析】由题意可设抛物线方程为 $y^2=2px(p\neq0)$，焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线 l：$x=\frac{p}{2}$，

∴A，B 两点坐标为 $\left(\frac{p}{2},p\right)$，$\left(\frac{p}{2},-p\right)$.

∴$|AB|=2|p|$.

∵$\triangle OAB$ 的面积为 4，

∴$\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{p}{2}\right|\cdot2|p|=4$.

∴$p=\pm2\sqrt{2}$.

∴抛物线方程为 $y^2=\pm4\sqrt{2}x$.

探究 2 抛物线几何性质的应用

【例 2】已知 A，B 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上两点，O 为坐标原点，若 $|OA|=|OB|$，且 $\triangle AOB$ 的垂心恰好是此抛物线的焦点，求直线 AB 的方程.

【解析】∵$|OA|=|OB|$，

∴设 $A(x_0,y_0)$，$B(x_0,-y_0)$.

∵$\triangle AOB$ 的垂心恰是此抛物线的焦点 F，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

∴$k_{FA}\cdot k_{OB}=-1$，

即 $\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{-y_0}{x_0}\right)=-1$，

∴$y_0^2=x_0\left(x_0-\frac{p}{2}\right)=2px_0(x_0>0,p>0)$.

∴$x_0=\frac{5}{2}p$. ∴直线 AB 的方程为 $x=\frac{5}{2}p$.

点睛 抛物线的几何性质在解与抛物线有关的问题时具有广泛的应用，但是在解题的过程中又容易忽视这些隐含条件. 本题的关键是根据抛物线的对称性可知直线 AB 垂直于 x 轴，故求直线 AB 的方程时求出点 A 的横坐标即可.

【变式训练 2】已知 A，B 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上两点，O 为坐标原点，若 $OA\perp OB$，且 OA 所在直线的方程为 $y=2x$，$|AB|=5\sqrt{3}$，求抛物线的方程.

【解析】∵$OA\perp OB$，

∴$\triangle AOB$ 为直角三角形.

∵OA 所在直线的方程为 $y=2x$，

∴OB 所在直线的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$.

由 $\begin{cases}y=2x,\\y^2=2px,\end{cases}$ 得 $A\left(\frac{p}{2},p\right)$.

由 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x,\\y^2=2px,\end{cases}$ 得 $B(8p,-4p)$.

$\because |AB|=5\sqrt{3}$，

$\therefore\sqrt{(p+4p)^2+\left(\frac{p}{2}-8p\right)^2}=5\sqrt{3}$.

$\because p>0,\therefore p=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，

$\therefore$所求抛物线的方程为 $y^2=\frac{4\sqrt{39}}{13}x$.

探究 3　直线与抛物线的综合应用

【例 3】在平面直角坐标系中，点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1. 记点 M 的轨迹为 C.

(1)求轨迹 C 的方程；

(2)设斜率为 k 的直线 l 过定点 $P(-2,1)$，求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点、两个公共点、三个公共点时 k 的相应取值范围.

【解析】(1)设 $M(x,y)$，依题意得 $|MF|=|x|+1$，即 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$，

化简整理得 $y^2=2(|x|+x)$.

故点 M 的轨迹 C 的方程为 $y^2=\begin{cases}4x,x\geqslant0,\\0,x<0.\end{cases}$

(2)在点 M 的轨迹 C 中，记 $C_1:y^2=4x(x\geqslant0)$，$C_2:y=0(x<0)$.

依题意，可设直线 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$.

由方程组$\begin{cases}y-1=k(x+2),\\y^2=4x,\end{cases}$

可得 $ky^2-4y+4(2k+1)=0$. ①

(ⅰ)当 $k=0$ 时，此时 $y=1$.

把 $y=1$ 代入轨迹 C 的方程，得 $x=\frac{1}{4}$.

故此时直线 $l:y=1$ 与轨迹 C 恰好有一个公共点$\left(\frac{1}{4},1\right)$.

(ⅱ)当 $k\neq0$ 时，方程①的根的判别式为 $\Delta=-16(2k^2+k-1)$. ②

设直线 l 与 x 轴的交点为 $(x_0,0)$，

则由 $y-1=k(x+2)$，得 $x_0=-\frac{2k+1}{k}$. ③

若$\begin{cases}\Delta<0,\\x_0<0,\end{cases}$由②③解得 $k<-1$ 或 $k>\frac{1}{2}$.

即当 $k\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，直线 l 与 C_1 没有公共点，与 C_2 有一个公共点，

故此时直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点.

若$\begin{cases}\Delta=0,\\x_0<0\end{cases}$或$\begin{cases}\Delta>0,\\x_0\geqslant0,\end{cases}$

由②③解得 $k\in\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$或 $-\frac{1}{2}\leqslant k<0$.

即当 $k\in\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$时，直线 l 与 C_1 只有一个公共点，与 C_2 有一个公共点.

当 $k\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$时，直线 l 与 C_1 有两个公共点，与 C_2 没有公共点.

故当 $k\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$时，直线 l 与轨迹 C 恰好有两个公共点.

若$\begin{cases}\Delta>0,\\x_0<0,\end{cases}$由②③解得 $-1<k<-\frac{1}{2}$ 或 $0<k<\frac{1}{2}$.

即当 $k\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，直线 l 与 C_1 有两个公共点，与 C_2 有一个公共点，

故此时直线 l 与轨迹 C 恰好有三个公共点.

综合(ⅰ)(ⅱ)可知，当 $k\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\cup\{0\}$时，直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点；

当 $k\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$时，直线 l 与轨迹 C 恰好有两个公共点；

当 $k\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，直线 l 与轨迹 C 恰好有三个公共点.

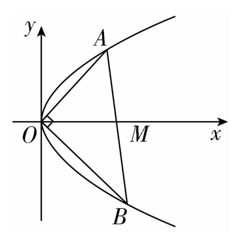
点睛 判断直线 l 与抛物线 C 的位置关系时，可将直线 l 的方程代入抛物线 C 的方程，消去 y(或 x)得到一个关于变量 x(或 y)的方程 $ax^2+bx+c=0$(或 $ay^2+by+c=0$).

(1)当 $a\neq0$ 时，若 $\Delta>0$，则直线 l 与抛物线 C 相交；若 $\Delta=0$，则直线 l 与抛物线 C 相切；若 $\Delta<0$，则直线 l 与抛物线 C 相离.

(2)当 $a=0$ 时，即得到一个一次方程，则 l 与 C 相交，且只有一个交点. 此时 l 为平行于抛物线 C 的对称轴.

(3)当直线与抛物线只有一个公共点时，直线与抛物线可能相切，也可能相交.

【变式训练 3】如图所示，过抛物线 $y^2=2px$ 的顶点 O 作两条互相垂直的弦交抛物线于 A,B 两点.



(1)求证：直线 AB 过定点.

(2)求△AOB 的面积的最小值.

【解析】(1)证明：当直线 AB 的斜率不存在时，$AB\perp x$ 轴，又 $OA\perp OB$，

∴$\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，设 $A(x_0,y_0)$，则 $y_0^2=2px_0$，∴$x_0=2p$，直线 AB 过点 $(2p,0)$.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 联立得 $\begin{cases}y^2=2px,\\y=k(x-a),\end{cases}$ 消去 x 得 $ky^2-2py-2pak=0$，

则 $y_1y_2=-2pa$. 又 $OA\perp OB$.

∴$y_1y_2=-x_1x_2$.

由方程组消去 y 得 $k^2x^2-(2k^2a+2p)x+k^2a^2=0$，

则 $x_1x_2=a^2$. ∴$a^2=2pa$，∴$a=2p$.

故直线 AB 过定点 $(2p,0)$.

(2)由(1)知 AB 恒过定点 $M(2p,0)$.

∴$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle BOM}=\dfrac{1}{2}|OM|(|y_1|+|y_2|)\geqslant 2p\sqrt{|y_1y_2|}$.

又 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，∴$(y_1y_2)^2=4p^2x_1x_2$.

又∵$y_1y_2=-x_1x_2$，∴$|y_1y_2|=4p^2$. 故 $S_{\triangle AOB}$ 的最小值为 $4p^2$.

随堂小练

1. 顶点在原点，焦点为 $F\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ 的抛物线的标准方程是(C)

A. $y^2=\dfrac{3}{2}x$　　B. $y^2=3x$

C. $y^2=6x$　　D. $y^2=-6x$

【解析】∵抛物线的焦点为 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$，∴$p=3$，且抛物线开口向右，∴抛物线的标准方程为 $y^2=6x$.

2. 抛物线 $y^2=-8x$ 上的点 P 到焦点的距离的最小值是 (A)

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

【解析】设抛物线上的点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 P 点到焦点的距离 $d=|x_0|+\dfrac{p}{2}$，故 $d_{\min}=\dfrac{p}{2}=2$.

3. 已知边长为 1 的等边三角形 OAB，O 为原点，$AB\perp x$ 轴，以 O 为顶点且过 A，B 的抛物线的方程为 (C)

A. $y^2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$　　B. $y^2=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$

C. $y^2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$　　D. $y^2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

【解析】由题意可知，抛物线的对称轴为 x 轴，当抛物线开口向右时，设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，且 A 为 x 轴上方的点，则易求得 $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，

∴$\dfrac{1}{4}=\sqrt{3}p$. ∴$p=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

∴抛物线方程为 $y^2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$.

同理，当抛物线开口向左时，抛物线方程为 $y^2=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$.

4. 已知 AB 是抛物线 $2x^2=y$ 的焦点弦，若 $|AB|=4$，则 AB 的中点的纵坐标为 $\underline{\dfrac{15}{8}}$.

【解析】设 AB 的中点为 $P(x_0,y_0)$，分别过 A，P，B 三点作准线的垂线，垂足分别为 A'，Q，B'. 由题意得 $|AA'|+|BB'|=|AB|=4$，$|PQ|=\dfrac{|AA'|+|BB'|}{2}=2$. 又 $|PQ|=y_0+\dfrac{1}{8}$，所以 $y_0+\dfrac{1}{8}=2$，解得 $y_0=\dfrac{15}{8}$.

5. 抛物线 $y^2=x$ 上到其准线和顶点距离相等的点的坐标为 $\underline{\left(\dfrac{1}{8},\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)}$.

【解析】设所求点的坐标为 (x_0,y_0)，则 $x_0^2+y_0^2=\left(x_0+\dfrac{1}{4}\right)^2$，

又 $y_0^2=x_0$，∴$x_0=\dfrac{1}{8}$. ∴$y_0=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十九)

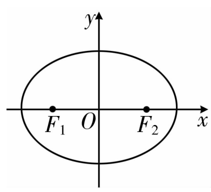
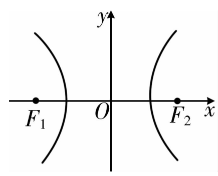
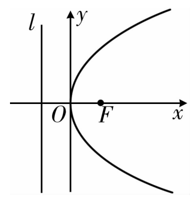
课后作业 · 单独成册

三、知能拓展

圆锥曲线的方程复习

核心梳理

1. 圆锥曲线的标准方程及简单几何性质(以焦点在 x 轴上为例)

圆锥曲线	椭圆	双曲线	抛物线
定义	平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于 $\|F_1F_2\|$)的点的轨迹	平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数(小于 $\|F_1F_2\|$)的点的轨迹	平面内与一个定点 F 和一条定直线 l(l 不经过点 F)的距离相等的点的轨迹
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$y^2=2px(p>0)$
图形			
顶点坐标	$(\pm a,0),(0,\pm b)$	$(\pm a,0)$	$(0,0)$
对称性	关于 x 轴、y 轴和原点对称	关于 x 轴、y 轴和原点对称	关于 x 轴对称
焦点坐标	$(\pm c,0)$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c,0),c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\left(\frac{p}{2},0\right)$
离心率	$0<e<1$	$e>1$	$e=1$
准线方程	—	—	$x=-\frac{p}{2}$
渐近线方程	—	$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$	—

2. 直线与圆锥曲线的位置关系

(1)从几何的角度看,直线和圆锥曲线的位置关系可分为三类:无公共点、仅有一个公共点及有两个不同的公共点. 其中,直线与圆锥曲线仅有一个公共点,对于椭圆,表示直线与其相切;对于双曲线,表示直线与其相切或直线与其渐近线平行;对于抛物线,表示直线与其相切或直线与其对称轴平行或重合.

(2)从代数的角度看,可通过将直线的方程与曲线的方程组成方程组,消元后利用所得一元二次方程根的情况来判断.

3. 求曲线的方程常用方法

(1)直接法:建立适当的坐标系,设动点为(x,y),根据几何条件直接寻求 x,y 之间的关系式.

(2)代入法:利用所求曲线上的动点与某一已知曲线上的动点的关系,把所求动点转换为已知动点. 具体地说,就是用所求动点的坐标 x,y 来表示已知动点的坐标并代入已知动点满足的曲线的方程,由此即可求得所求动点坐标 x,y 之间的关系式.

(3)定义法:如果所给几何条件正好符合椭圆、双曲线、抛物线等曲线的定义,则可直接利用这些已知曲线的方程写出动点的轨迹方程.

(4)参数法:选择一个(或几个)与动点变化密切相关的量作为参数,用参数表示动点的坐标(x,y),即得动点轨迹的参数方程,消去参数,可得动点轨迹的普通方程.

重难突破

要点 1 圆锥曲线的定义及应用

圆锥曲线的定义的应用技巧

(1)在求点的轨迹问题时，若所求轨迹符合圆锥曲线的定义，则根据定义直接写出圆锥曲线的轨迹方程.

(2)在椭圆和双曲线中，常涉及曲线上的点与两个焦点连接而成的“焦点三角形”，处理时常结合圆锥曲线的定义及解三角形的知识来解决.

(3)在抛物线中，常利用定义，以达到“到焦点的距离”和“到准线的距离”之间的相互转化.

提醒：应用定义解题时应注意圆锥曲线的定义中的限制条件.

【例 1】(1)已知动点 M 的坐标满足方程 $5\sqrt{x^2+y^2}=|3x+4y-12|$，则动点 M 的轨迹是 (C)

A. 椭圆　　B. 双曲线

C. 抛物线　　D. 以上都不对

(2)在平面直角坐标系中，椭圆 C 的中心为原点，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 过 F_1 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，且$\triangle ABF_2$ 的周长为 16，则椭圆 C 的方程为 $\underline{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1}$.

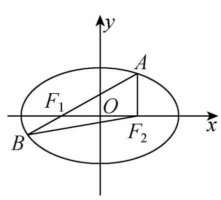
【解析】(1)把轨迹方程 $5\sqrt{x^2+y^2}=|3x+4y-12|$ 写成 $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|3x+4y-12|}{5}$.

∴动点 M 到原点的距离与它到直线 $3x+4y-12=0$ 的距离相等. ∴点 M 的轨迹是以原点为焦点，直线 $3x+4y-12=0$ 为准线的抛物线.

(2)设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，因为 AB 过 F_1 且 A，B 在椭圆上，如图所示，则$\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=16$，∴$a=4$.

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$c=2\sqrt{2}$，∴$b^2=a^2-c^2=8$，

∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$.

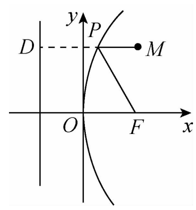


点睛 求圆锥曲线标准方程的方法：(1)定义法；(2)待定系数法：对于椭圆、双曲线，由条件建立关于 a，b 的方程求解，注意 $a^2=b^2+c^2(c^2=b^2+a^2)$这一隐含条件；对于抛物线，则只需根据条件建立关于 p 的方程求解即可.

【变式训练 1】已知点 P 是抛物线 $y^2=8x$ 上的任意一点，F 是抛物线的焦点，点 M 的坐标是(2，3)，求 $|PM|+|PF|$ 的最小值，并求出此时点 P 的坐标.

【解析】抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程是 $x=-2$，那么点 P 到焦点 F 的距离等于它到准线 $x=-2$ 的距离，过点 P 作 PD 垂直于准线 $x=-2$，垂足为 D，那么 $|PM|+|PF|=|PM|+|PD|$.

如图所示，根据平面几何知识，当 M，P，D 三点共线时，$|PM|+|PF|$ 的值最小，且最小值为 $|MD|=2-(-2)=4$，



所以 $|PM|+|PF|$ 的最小值是 4.

此时点 P 的纵坐标为 3，所以其横坐标为$\frac{9}{8}$，即点 P 的坐标是$\left(\frac{9}{8},3\right)$.

要点 2 圆锥曲线的方程

(1)椭圆、双曲线的标准方程

求椭圆、双曲线的标准方程包括“定位”和“定量”两方面，一般先确定焦点的位置，再确定参数. 当焦点位置不确定时，要分情况讨论. 也可将椭圆方程设为 $Ax^2+By^2=1(A>0,B>0,A\neq B)$，其中当$\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$时，焦点在 x 轴上；当$\frac{1}{A}<\frac{1}{B}$时，焦点在 y 轴上. 双曲线方程可设为 $Ax^2+By^2=1(AB<0)$，当$\frac{1}{A}<0$时，焦点在 y 轴上；当$\frac{1}{B}<0$时，焦点在 x 轴上.

另外，与已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$共渐近线的双曲线方程可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$；已知所求双曲线为等轴双曲线，其方程可设为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$.

(2)抛物线的标准方程

求抛物线的标准方程时，先确定抛物线的方程类型，再由条件求出参数 p 的大小. 当焦点位置不确定时，要分情况讨论，也可将方程设为 $y^2=2px(p\neq 0)$或 $x^2=2py(p\neq 0)$，然后

建立方程求出参数 p 的值.

【例 2】(1)已知中心在原点的椭圆 C 的右焦点为 $F(1,0)$，离心率等于$\frac{1}{2}$，则椭圆 C 的方程是 (D)

A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\sqrt{3}}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)已知抛物线 $y^2=8x$ 的准线过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点，且双曲线的离心率为 2，则该双曲线的方程为 $\underline{x^2-\frac{y^2}{3}=1}$.

【解析】(1)由题意得$\begin{cases}c=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ c=1,\end{cases}$

则 $b^2=a^2-c^2=3$，故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由题意得$\begin{cases}c=2,\\ \frac{c}{a}=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ c=2,\end{cases}$则 $b^2=c^2-a^2=3$，

因此双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

点睛 求圆锥曲线方程的一般步骤

一般求已知曲线类型的曲线方程问题，可采用"先定形，后定式，再定量"的步骤.

(1)定形：指的是二次曲线的焦点位置与对称轴的位置.

(2)定式：根据"形"设方程的形式，注意曲线系方程的应用，如当椭圆的焦点不确定在哪个坐标轴上时，可设方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$.

(3)定量：由题设中的条件找到"式"中待定系数的等量关系，通过解方程得到量的大小.

【变式训练 2】焦点在 x 轴上，右焦点到短轴端点的距离为 2，到左顶点的距离为 3 的椭圆的标准方程是 (A)

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

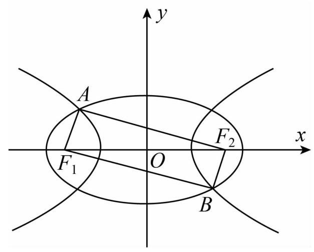
C. $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$　　D. $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

【解析】依题意，得 $a=2,a+c=3$，故 $c=1,b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，故所求椭圆的标准方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

要点 3 圆锥曲线的几何性质

涉及圆锥曲线几何性质的常见具体类型有：(1)已知基本量求离心率 e 的值或求离心率 e 的取值范围；(2)已知圆锥曲线的方程求参数的取值范围；(3)已知曲线的某些性质求曲线的方程或求曲线的其他性质.

【例 3】(1)如图所示，F_1,F_2 是椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，A,B 分别是 C_1,C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率是 (D)



A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)已知 $a>b>0$，椭圆 C_1 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 C_2 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$C_1$ 与 C_2 的离心率之积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 C_2 的渐近线方程为 $\underline{x\pm\sqrt{2}y=0}$.

【解析】(1)由椭圆可知 $|AF_1|+|AF_2|=4,|F_1F_2|=2\sqrt{3}$. 因为四边形 AF_1BF_2 为矩形，

所以 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2=12$，

所以 $2|AF_1||AF_2|=(|AF_1|+|AF_2|)^2-(|AF_1|^2+|AF_2|^2)=16-12=4$，所以 $(|AF_2|-|AF_1|)^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|=12-4=8$，所以 $|AF_2|-|AF_1|=2\sqrt{2}$，因此对于双曲线有 $a=\sqrt{2},c=\sqrt{3}$，

所以 C_2 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(2)设椭圆 C_1 和双曲线 C_2 的离心率分别为 e_1 和 e_2，则 $e_1=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，$e_2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. 因为 $e_1\cdot e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\frac{\sqrt{a^4-b^4}}{a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\left(\frac{b}{a}\right)^4=\frac{1}{4}$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，即 $x\pm\sqrt{2}y=0$.

点睛 求离心率的三种方法

(1)定义法：由椭圆(双曲线)的标准方程可知，不论椭圆(双曲线)的焦点在 x 轴上还是 y 轴上都有关系式 $a^2-b^2=c^2(a^2+b^2=c^2)$以及 $e=\frac{c}{a}$，已知其中的任意两个参数，可以求其他的参数，这是基本且常用的方法.

(2)方程法:建立参数 a 与 c 之间的齐次关系式,从而求出其离心率,这是求离心率的十分重要的思路及方法.

(3)几何法:求与过焦点的三角形有关的离心率问题,根据平面几何的性质以及椭圆(双曲线)的定义、几何性质,建立参数之间的关系,通过画出图形,观察线段之间的关系,使问题更形象、直观.

【变式训练 3】已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的半焦距是 c,A,B 分别是长轴、短轴的一个端点,O 为原点,若$\triangle ABO$ 的面积是$\sqrt{3}c^2$,则这个椭圆的离心率是 (A)

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】由题意得$\frac{1}{2}ab=\sqrt{3}c^2$,即 $a^2(a^2-c^2)=12c^4$,所以 $(a^2+3c^2)(a^2-4c^2)=0$,所以 $a^2=4c^2$,$a=2c$,故 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

要点 4 直线与圆锥曲线的位置关系

(1)直线与圆锥曲线的位置关系,可以通过讨论直线方程与曲线方程组成的方程组的实数解的个数来确定,通常消去方程组中变量 y(或 x)得到关于变量 x(或 y)的一元二次方程,考虑该一元二次方程的判别式 Δ,则有:$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与圆锥曲线相交于两点;$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与圆锥曲线相切于一点;$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与圆锥曲线无交点.

(2)直线 l 截圆锥曲线所得的弦长$|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$或$\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(y_1-y_2)^2}$,其中 k 是直线 l 的斜率,(x_1,y_1),(x_2,y_2)是直线与圆锥曲线的两个交点 A,B 的坐标,且$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$,其中 x_1+x_2,x_1x_2 可由一元二次方程的根与系数的关系整体给出.

【例 4】已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$(0,\sqrt{3})$,离心率为$\frac{1}{2}$,左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$.

(1)求椭圆的方程;

(2)若直线 l:$y=-\frac{1}{2}x+m$ 与椭圆交于 A,B 两点,与以 F_1F_2 为直径的圆交于 C,D 两点,且满足$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$,求直线 l 的方程.

【解析】(1)由题设知$\begin{cases}b=\sqrt{3},\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ b^2=a^2-c^2,\end{cases}$

解得 $a=2$,$b=\sqrt{3}$,$c=1$,

$\therefore$椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)知,以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=1$,

$\therefore$圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{2|m|}{\sqrt{5}}$,

由 $d<1$ 得$|m|<\frac{\sqrt{5}}{2}$.(*)

$\therefore|CD|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\frac{4}{5}m^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{5-4m^2}$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得 $x^2-mx+m^2-3=0$,

由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=m$,$x_1x_2=m^2-3$.

$\therefore|AB|=\sqrt{\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right][m^2-4(m^2-3)]}$

$=\frac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{4-m^2}$.

由$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$,得$\sqrt{\frac{4-m^2}{5-4m^2}}=1$,

解得 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,满足(*).

$\therefore$直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$或 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

点睛 涉及直线与圆锥曲线问题,需要用方程思想解决,同时必要时需分类讨论.

【变式训练 4】已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,其焦点为 F_1,F_2,离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,直线 l:$x+2y-2=0$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A,B.

(1)若点 A 是椭圆 C 的一个顶点,求椭圆的方程;

(2)若线段 AB 上存在点 P 满足$|PF_1|+|PF_2|=2a$,求 a 的取值范围.

【解析】(1)由椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $a=\sqrt{2}c$,

由 $A(2,0)$,得 $a=2$,$\therefore c=\sqrt{2}$,$b=\sqrt{2}$,

$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{a^2}=1$,

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{2y^2}{a^2}=1,\\ x+2y-2=0,\end{cases}$ 得 $6y^2-8y+4-a^2=0$,

若线段 AB 上存在点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,则线段 AB 与椭圆 C 有公共点,等价于方程 $6y^2-8y+4-a^2=0$ 在 $y\in[0,1]$ 上有解.

设 $f(y)=6y^2-8y+4-a^2$,

$\therefore\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(0)\geqslant 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}a^2\geqslant\dfrac{4}{3},\\ 4-a^2\geqslant 0,\end{cases}$ $\therefore\dfrac{4}{3}\leqslant a^2\leqslant 4$,

故 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2\right]$.

要点 5 圆锥曲线中的定点、定值及最值问题

(1)定点、定值问题

对于解析几何中的定点、定值问题,要善于运用辩证的观点去思考分析,在动点的“变”中寻求定值的“不变”性,用特殊探索法(特殊值、特殊位置、特殊图形等)先确定出定值,揭开神秘的面纱,这样可将盲目的探索问题转化为有方向有目标的一般性证明题,从而找到解决问题的突破口.

(2)最值问题

解决圆锥曲线中的最值问题,一般有两种方法:一是几何法,特别是用圆锥曲线的定义和平面几何的有关结论来解非常巧妙;二是代数法,将圆锥曲线中的最值问题转化为函数问题(即根据条件列出所求的目标函数),然后根据函数的特征选用参数法、配方法、判别式法、函数单调法及基本不等式法等,求解最大或最小值.

【例 5】已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,四点 $P_1(1,1)$,$P_2(0,1)$,$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1)求 C 的方程;

(2)设直线 l 不经过点 P_2 且与 C 相交于 A,B 两点,若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1,求证:l 过定点.

【解析】(1)由于 P_3,P_4 两点关于 y 轴对称,

故由题设知椭圆 C 经过 P_3,P_4 两点.

又由 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}>\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}$ 知,椭圆 C 不经过点 P_1,

所以点 P_2 在椭圆 C 上.

因此$\begin{cases}\dfrac{1}{b^2}=1,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1.\end{cases}$

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明:设直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率分别为 k_1,k_2.

如果 l 与 x 轴垂直,设 $l:x=t$,由题设知 $t\neq 0$,且 $|t|<2$,可得 A,B 的坐标分别为 $\left(t,\dfrac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$,$\left(t,-\dfrac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$.

则 $k_1+k_2=\dfrac{\sqrt{4-t^2}-2}{2t}-\dfrac{\sqrt{4-t^2}+2}{2t}=-1$,得 $t=2$,不符合题设.

从而可设 $l:y=kx+m(m\neq 1)$.

将 $y=kx+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 得

$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

由题设可知 $\Delta=16(4k^2-m^2+1)>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$.

而 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}$

$=\dfrac{kx_1+m-1}{x_1}+\dfrac{kx_2+m-1}{x_2}$

$=\dfrac{2kx_1x_2+(m-1)(x_1+x_2)}{x_1x_2}$.

由 $k_1+k_2=-1$,

得 $(2k+1)x_1x_2+(m-1)(x_1+x_2)=0$.

即 $(2k+1)\cdot\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}+(m-1)\cdot\dfrac{-8km}{4k^2+1}=0$.

解得 $k=-\dfrac{m+1}{2}$.

当且仅当 $m>-1$ 时,$\Delta>0$,于是 $l:y=-\dfrac{m+1}{2}x+m$,即 $y+1=-\dfrac{m+1}{2}(x-2)$,所以 l 过定点 $(2,-1)$.

点睛 对满足一定条件曲线上两点连接所得直线过定点,或满足一定条件的曲线过定点问题,设该直线(曲线)上两点的坐标,利用坐标在直线(或曲线)上,建立点的坐标满足的方程(组),求出相应的直线(或曲线),然后再利用直线(或曲线)过定点的知识加以解决.

【变式训练 5】设椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的动点 $P(x,y)$,点 $A(a,0)(0<a<3)$.若 $|AP|$ 的最小值为 1,求 a 的值.

【解析】$|AP|^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+4\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)$

$=\dfrac{5}{9}\left(x-\dfrac{9a}{5}\right)^2-\dfrac{4a^2}{5}+4$.

因为$\frac{x^2}{9}=1-\frac{y^2}{4}$，所以$\frac{x^2}{9}\leqslant 1$，$0\leqslant |x|\leqslant 3$.

(1)当$0<\frac{9a}{5}\leqslant 3$，即$0<a\leqslant\frac{5}{3}$时，

令$x=\frac{9a}{5}$得$|AP|^2$取最小值$4-\frac{4a^2}{5}=1$.

解得$a=\frac{\sqrt{15}}{2}$. 因为$\frac{\sqrt{15}}{2}>\frac{5}{3}$，所以$a$不存在.

(2)当$\frac{9a}{5}>3$，即$\frac{5}{3}<a<3$时，

令$x=3$得$|AP|^2$取最小值$\frac{5}{9}\left(3-\frac{9a}{5}\right)^2+4-\frac{4a^2}{5}=1$.

解得$a=2$或$a=4$(舍).

所以，当$a=2$时，$|AP|$的最小值为1.

要点6 圆锥曲线中的存在性问题

存在性问题是指在给定题设条件下是否存在某个数学对象(数值、性质、图形)使某个数学结论成立的数学问题. 存在性问题具备内容涉及面广、重点题型丰富等命题要求，方便考查分析、比较、猜测、归纳等综合能力，因而受到命题人的喜爱.

【例6】直线$y=ax+1$与双曲线$3x^2-y^2=1$相交于A，B两点，是否存在实数a，使A，B关于直线$y=2x$对称？请说明理由.

【解析】设存在实数a，使A，B关于直线l：$y=2x$对称，并设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则AB的中点坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

依题设有$\frac{y_1+y_2}{2}=2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}$，

即$y_1+y_2=2(x_1+x_2)$，①

又A，B在直线$y=ax+1$上，

$\therefore y_1=ax_1+1$，$y_2=ax_2+1$，

$\therefore y_1+y_2=a(x_1+x_2)+2$，②

由①②，得$2(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)+2$，

即$(2-a)(x_1+x_2)=2$，③

联立$\begin{cases}y=ax+1,\\3x^2-y^2=1,\end{cases}$得$(3-a^2)x^2-2ax-2=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{2a}{3-a^2}$，④

把④代入③，得$(2-a)\cdot\frac{2a}{3-a^2}=2$，

解得$a=\frac{3}{2}$，经检验符合题意，

$\therefore k_{AB}=\frac{3}{2}$，而$k_l=2$，$\therefore k_{AB}\cdot k_l=\frac{3}{2}\times 2=3\neq -1$.

故不存在满足题意的实数a.

点睛 此类问题，先假设实数a存在，然后根据推理或计算求出满足题意的结果，或得到与假设相矛盾的结果，从而否定假设，得出某数学对象不存在的结论.

【变式训练6】是否存在一条斜率为$k(k\neq 0)$的直线l与椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$交于两个不同的点M，N，且使M，N到点$A(0,1)$的距离相等？若存在，求出k的取值范围；若不存在，请说明理由.

【解析】设直线l：$y=kx+m$为满足条件的直线，再设P为MN的中点，欲满足条件，只要$AP\perp MN$即可.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+3k^2)x^2+6mkx+3m^2-3=0$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$x_P=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3mk}{1+3k^2}$，$y_P=kx_P+m=\frac{m}{1+3k^2}$，

$\therefore k_{AP}=\frac{3k^2-m+1}{3mk}$. $\because AP\perp MN$，

$\therefore\frac{3k^2-m+1}{3mk}=-\frac{1}{k}(k\neq 0)$，故$m=-\frac{3k^2+1}{2}$.

由$\Delta=36m^2k^2-4(1+3k^2)(3m^2-3)$

$=9(1+3k^2)(1-k^2)>0$，得$-1<k<1$，且$k\neq 0$.

故当$k\in(-1,0)\cup(0,1)$时，存在满足条件的直线l.

拓展提升

1. 抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$的焦点坐标是 (D)

A. $\left(\frac{1}{16},0\right)$　　B. $(1,0)$

C. $\left(-\frac{1}{16},0\right)$　　D. $(0,1)$

【解析】$y=\frac{1}{4}x^2$即$x^2=4y$，所以其焦点在y轴正半轴，坐标为$(0,1)$，故选D.

2. 若双曲线C：$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{m}=1$的离心率为$\sqrt{3}$，则$C$的虚轴长为 (C)

A. 4　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{6}$　　D. 2

【解析】因为双曲线C：$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{m}=1$的离心率为$\sqrt{3}$，故$\frac{\sqrt{3+m}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，

解得$m=6$，所以虚轴长为$2\sqrt{6}$. 故选C.

3. 已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上的点 P 到椭圆一个焦点的距离为 7，则点 P 到另一个焦点的距离为 （ B ）

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 7

【解析】根据椭圆定义可知，P 到两个焦点的距离之和为 $2a=2\times5=10$，所以 P 到另一个焦点的距离为 $10-7=3$. 故选 B.

4. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线的距离为 （ B ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

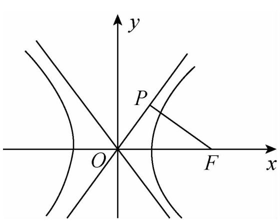
【解析】因为抛物线的焦点为$(1,0)$，双曲线的渐近线为 $x\pm y=0$，所以抛物线的焦点到双曲线的渐近线的距离为 $d=\frac{|1\pm0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 B.

5. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过 C 的右焦点 F 作其渐近线的垂线，垂足为 P，若$\triangle OPF$ 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，则 C 的离心率为 （ C ）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【解析】双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，



过 C 的右焦点 F 作其渐近线的垂线，垂足为 P，则$|PF|=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle OFP$ 中，$\angle OPF=\frac{\pi}{2}$，$|FP|=b$，$|OF|=c$，所以$|OP|=a$，

则 $S_{\triangle OPF}=\frac{1}{2}ab=\frac{\sqrt{3}ac}{4}$，即 $2b=\sqrt{3}c$，

所以 $4b^2=3c^2$，即 $4(c^2-a^2)=3c^2$，

所以 $4a^2=c^2$，故 $e=\frac{c}{a}=2$，故选 C.

6. 已知双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线互相垂直，且焦距为 $2\sqrt{6}$，则抛物线 $y^2=2bx$ 的准线方程为 （ B ）

A. $x=-\sqrt{3}$　　B. $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $y=-\sqrt{3}$　　D. $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】因为双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线互相垂直，

所以 $a=b$，又焦距为 $2\sqrt{6}$，所以 $a^2+b^2=\left(\frac{2\sqrt{6}}{2}\right)^2=6$，解得 $a=b=\sqrt{3}$，

所以 $y^2=2\sqrt{3}x$，所以抛物线的准线方程是 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 B.

7. (多选题)已知 P 是椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+y^2=1$ 上的动点，Q 是圆 D：$(x+1)^2+y^2=\frac{1}{5}$上的动点，则 （ BC ）

A. C 的焦距为$\sqrt{5}$　　B. C 的离心率为$\frac{\sqrt{30}}{6}$

C. D 在 C 的内部　　D. $|PQ|$的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】由$\frac{x^2}{6}+y^2=1$ 可知，$a^2=6$，$b^2=1$，$c^2=5$，则焦距 $2c=2\sqrt{5}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$；设 $P(x,y)$，因为圆心 $D(-1,0)$，半径为 $r=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$|PD|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+1-\frac{x^2}{6}}=\sqrt{\frac{5}{6}\left(x+\frac{6}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}>\sqrt{\frac{1}{5}}$，故圆 D 在 C 的内部；当 PD 取最小值$\sqrt{\frac{4}{5}}$时，$|PQ|$的最小值为 $\sqrt{\frac{4}{5}}-\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

综上所述，选项 BC 正确，故选 BC.

8. 已知动点 $P(x,y)$在椭圆 C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上，F 为椭圆 C 的右焦点，若点 M 满足$|MF|=1$，且 $MP\perp MF$，则线段$|PM|$的最小值为__$\sqrt{3}$__.

【解析】由题意可知，动点 M 是在以 $F(3,0)$为圆心，1 为半径的圆上运动，且$|PM|$为圆的一条切线，根据切线长定理，当

$|PF|$最小时，切线长$|PM|$取得最小值，易知当P在右顶点时，PF取得最小值，此时$|PF|=5-3=2$，由切线长定理可知$|PM|=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

9. 已知F为抛物线$x^2=2py(p>1)$的焦点，点$A(1,p)$，M为抛物线上任意一点，$|MA|+|MF|$的最小值为3，则$p=$__2__. 若线段AF的垂直平分线交抛物线于P，Q两点，则四边形$APFQ$的面积为__$4\sqrt{3}$__.

【解析】过A作抛物线的准线的垂线交抛物线于M，交准线于点N，由抛物线的性质可得$|MF|=|MN|$，所以$|MA|+|MF|=|MA|+|MN|\geqslant|AN|=p-\left(-\frac{p}{2}\right)=\frac{3p}{2}$，

由题意可得$\frac{3p}{2}=3$，解得$p=2$，所以抛物线的方程为$x^2=4y$.

由抛物线的方程可得$A(1,2)$，$F(0,1)$，所以AF的中点$D\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$k_{AF}=\frac{2-1}{1-0}=1$，

所以AF的中垂线的方程为$y-\frac{3}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即$y=-x+2$，设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

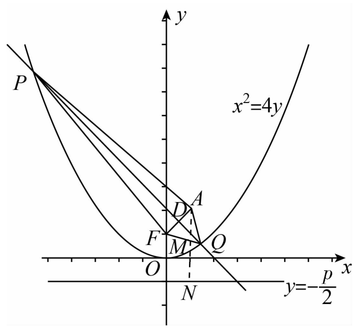
与抛物线联立$\begin{cases}y=-x+2,\\x^2=4y,\end{cases}$整理可得$x^2+4x-8=0$，

所以$x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=-8$，

所以弦$|PQ|=\sqrt{1+(-1)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16+32}=4\sqrt{6}$，

$|AF|=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$，

所以$S_{四边形APFQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|AF|=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{3}$.



温馨提示：请自主完成课后作业(三十)

课后作业·单独成册