CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

第六章 平面向量及其应用

一、课标导向

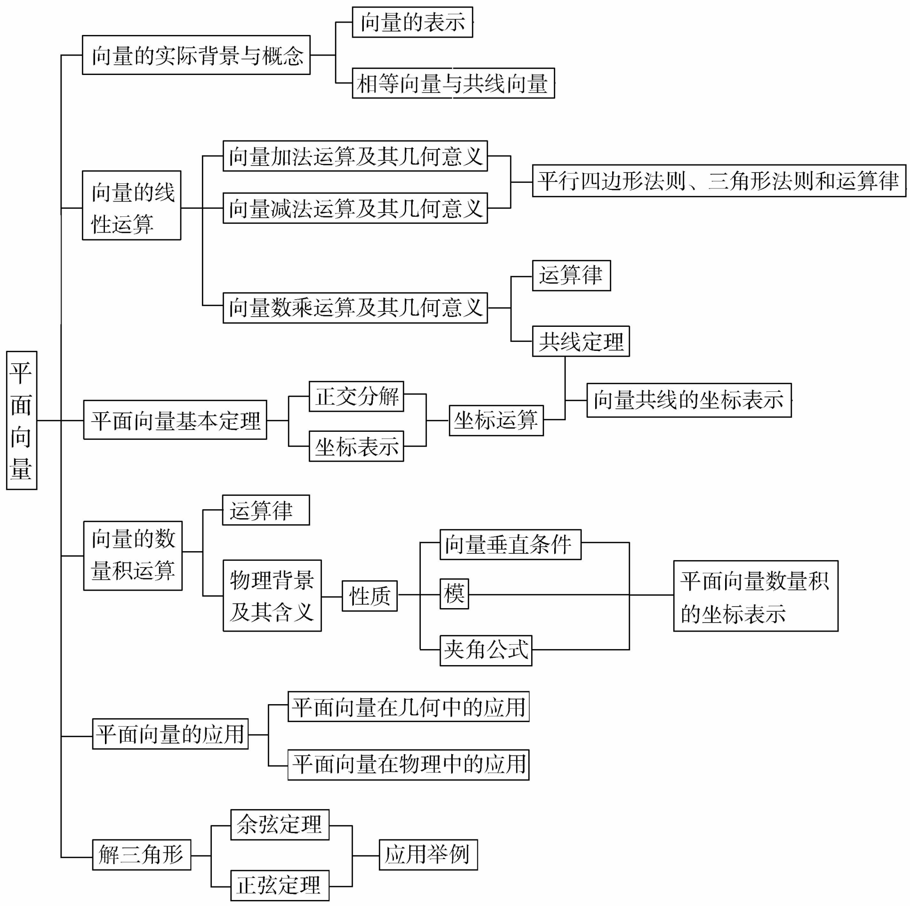
课标要求

1. 向量的概念
(1)通过对力、速度、位移等的分析,了解平面向量的实际背景,理解平面向量的意义和两个向量相等的含义.
(2)理解平面向量的几何表示和基本要素.
2. 向量的运算
(1)借助实例和平面向量的几何表示,掌握平面向量加、减运算及运算规则,理解其几何意义.
(2)通过实例分析,掌握平面向量数乘运算及运算规则,理解其几何意义.理解两个平面向量共线的含义.
(3)了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.
(4)通过物理中做功等实例,理解平面向量数量积的概念及其物理意义,会计算平面向量的数量积.
(5)通过几何直观,了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义.
(6)会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.
3. 平面向量基本定理及坐标表示
(1)理解平面向量基本定理及其意义.
(2)借助平面直角坐标系,掌握平面向量的正交分解及坐标表示.
(3)会用坐标表示平面向量的加、减运算与数乘运算.
(4)能用坐标表示平面向量的数量积,会表示两个平面向量的夹角.
(5)能用坐标表示平面向量共线、垂直的条件.
4. 向量的应用与解三角形
(1)会用向量方法解决简单的平面几何问题、力学问题以及其他实际问题,体会向量在解决数学和实际问题中的作用.
(2)借助向量的运算,探索三角形边长与角度的关系,掌握余弦定理、正弦定理.
(3)能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.

学习建议

1. 学习平面向量,应从力、速度、位移等实际情境入手,从物理、几何、代数三个角度理解向量的概念与运算法则.
2. 根据实数的运算,运用类比的方法探索实数运算与向量运算的共性与差异.
3. 根据物理中力的分解学习向量基本定理,建立基底的概念和向量的坐标表示,并运用向量解决一些物理和几何问题.
4. 向量是数与形的结合体,因此要注重数形结合思想的运用,通过数与形的结合,感悟数学知识之间的关联,加强对数学整体性的理解.

知识网络


平面向量
向量的实际背景与概念
向量的表示
相等向量与共线向量
向量的线性运算
向量加法运算及其几何意义
向量减法运算及其几何意义
平行四边形法则、三角形法则和运算律
向量数乘运算及其几何意义
运算律
共线定理
平面向量基本定理
正交分解
坐标表示
坐标运算
向量共线的坐标表示
向量的数量积运算
运算律
物理背景及其含义
性质
向量垂直条件
模
夹角公式
平面向量数量积的坐标表示
平面向量的应用
平面向量在几何中的应用
平面向量在物理中的应用
解三角形
余弦定理
正弦定理
应用举例

二、精讲精练

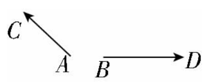
6.1 平面向量的概念

学习目标	核心素养
1. 会用有向线段表示向量，了解有向线段与向量的联系与区别，会用字母表示向量.（重点） 2. 理解零向量、单位向量、平行向量、共线向量、相等向量及向量的模等概念，会辨识图形中这些相关的概念.（重点、难点）	1. 通过平面向量概念的学习，逐步形成数学抽象素养. 2. 通过零向量、单位向量、平行向量、共线向量、相等向量及向量的模等的学习，培养直观想象素养.

自主预习

情景导思

如图，老鼠由 A 处向西北逃窜，猫在 B 处向东追去，设问：猫能否追到老鼠？



结论：猫的速度再快也没用，因为方向错了.

分析：老鼠逃窜的路线 AC、猫追逐的路线 BD 实际上都是有方向、有长短的量.

想一想：哪些量既有大小又有方向？哪些量只有大小没有方向？

知新预学

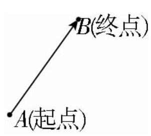
1. 向量与数量

(1)向量：既有____大小____又有____方向____的量叫做向量.

(2)数量：只有____大小____没有____方向____的量称为数量.

2. 向量的表示方法

(1)向量的几何表示：向量可以用一条有向线段表示. 带有____方向____的线段叫做有向线段，它包含三个要素：____起点____、____方向____、____长度____，如图所示. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$.



(2)向量的字母表示：向量可以用字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$表示. 印刷用黑体 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，书写用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

(3)向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小，也就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度（或称模），即有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$. ____长度为 0____的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$；____长度等于 1 个单位长度____的向量，叫做单位向量.

3. 相等向量与共线向量

(1)相等向量：____长度相等____且____方向相同____的向量叫做相等向量.

(2)平行向量：方向____相同或相反____的____非零____向量叫做平行向量.

①记法：向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

②规定：零向量与____任意向量____平行.

(3)共线向量：由于任意一组平行向量都可以平移到同一条直线上，所以____平行____向量也叫做共线向量. 也就是说，平行向量与共线向量是等价的，因此要注意避免向量平行、共线与平面几何中的直线、线段的平行和共线相混淆.

小试牛刀

1. 下列结论中，正确的个数是（ B ）

①温度含零上温度和零下温度，所以温度是向量；

②向量的模是一个正实数；

③向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量；

④若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】①温度没有方向，所以不是向量，故①错误；②向量的模也可以为 0，故②错误；④向量不可以比较大小，故④错误；③若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 必共线，又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，故均为非零向量，故③正确.

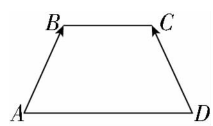
2. (多选题)下列说法正确的是（ ACD ）

A. 若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，则 $|\boldsymbol{a}|=0$　　B. 零向量是没有方向的

C. 零向量与任意向量平行　　D. 零向量的方向是任意的

【解析】零向量的长度为 0，方向是任意的，它与任何向量都平行，所以 B 是错误的. ACD 正确.

3. 如图所示，梯形 $ABCD$ 为等腰梯形，则两腰上的向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的关系是（ B ）

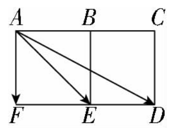


A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　　B. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$

C. $\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{DC}$　　D. $\overrightarrow{AB}<\overrightarrow{DC}$

【解析】$|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\overrightarrow{DC}|$ 表示等腰梯形两腰的长度，故相等.

4. 如图所示，在以 1×2 方格纸中的格点（各线段的交点）为起点和终点的向量中，



(1)写出与 $\overrightarrow{AF}$,$\overrightarrow{AE}$ 相等的向量;

(2)写出与 $\overrightarrow{AD}$ 的模相等的向量.

【解析】(1)$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}$.(2)$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{CF}$,$\overrightarrow{FC}$.

互动课堂

合作探究

探究 1　向量的基本概念

【例 1】判断下列命题是否正确,并说明理由.

①若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 一定不共线;

②若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,则 A,B,C,D 四点是平行四边形的四个顶点;

③在平行四边形 $ABCD$ 中,一定有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$;

④若向量 $\boldsymbol{a}$ 与任意向量 $\boldsymbol{b}$ 平行,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

⑤若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.

【解析】①两个向量不相等,可能是长度不同,方向可以相同或相反,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有共线的可能,故①不正确.②$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$A,B,C,D$ 四点可能在同一条直线上,故②不正确.③在平行四边形 $ABCD$ 中,$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 平行且方向相同,所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,故③正确.④零向量的方向是任意的,与任意向量平行,故④正确.⑤$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$ 且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 方向相同,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 方向相同且模相等,故 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,故⑤正确.

点睛　对于判断命题正误题,应熟记有关概念,看清、理解各命题,逐一进行判断,有时对错误命题的判断只需举一个反例即可.

【变式训练 1】下列说法正确的有__③__.(填序号)

①若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$;

②向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量,则 A,B,C,D 四点必在同一条直线上;

③向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是平行向量;

④任意两个单位向量都是相等向量.

【解析】①错误.由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 仅说明 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 模相等,但不能说明它们方向的关系.

②错误.共线向量即平行向量,只要方向相同或相反,并不要求两个向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ 必须在同一直线上,因此点 A,B,C,D 不一定在同一条直线上.

③正确.向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BA}$ 是长度相等,方向相反的两个向量.

④错误.单位向量不仅有长度,而且有方向;单位向量的方向不一定相同,而相等向量要求长度相等,方向相同.

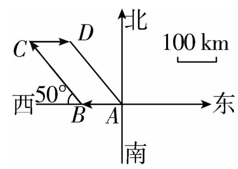
探究 2　向量的表示及应用

【例 2】一辆汽车从 A 点出发向西行驶了 100 km 到达 B 点,然后改变方向向西偏北 $50°$方向行驶了 200 km 到达 C 点,接着又改变方向,向东行驶了 100 km 最终到达 D 点.

(1)作出向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$;

(2)求 $|\overrightarrow{AD}|$.

【解析】(1)向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$ 如图所示.



(2)由题意,易知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向相反,故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线,又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$,

∴在四边形 $ABCD$ 中,$AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$.

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

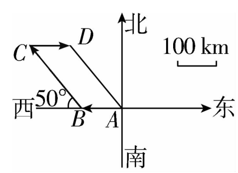
∴$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,∴$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=200$(km).

点睛　准确画出向量的方法是先确定向量的起点,再确定向量的方向,然后根据向量的大小确定向量的终点.

【变式训练 2】在如图所示的方格纸上,每个小正方形的边长为 1,已知向量 $\boldsymbol{a}$.

(1)试以 B 为终点画一个向量 $\boldsymbol{b}$,使 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$;

(2)在图中画一个以 A 为起点的向量 $\boldsymbol{c}$,使 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$,并说出向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点的轨迹是什么.

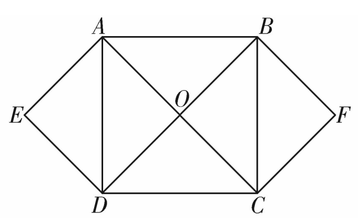


【解析】(1)根据相等向量的定义,所作向量与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行,且长度相等(作图略).

(2)由平面几何知识可知所有这样的向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点的轨迹是以 A 为圆心,半径为 $\sqrt{5}$ 的圆(作图略).

探究 3　相等向量与共线向量

【例 3】如图所示,O 为正方形 $ABCD$ 对角线的交点,四边形 $OAED$,$OCFB$ 都是正方形.



(1)写出与 $\overrightarrow{AO}$ 相等的向量;

(2)写出与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量;

(3)向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是否相等?

【解析】(1)与 $\overrightarrow{AO}$ 相等的向量为 $\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{ED}$.

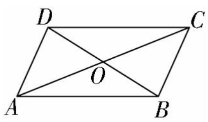
(2)与$\overrightarrow{AO}$共线的向量为$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{CO}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{ED}$,$\overrightarrow{DE}$,$\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{FB}$.

(3)向量$\overrightarrow{AO}$与$\overrightarrow{CO}$不相等,因为$\overrightarrow{AO}$与$\overrightarrow{CO}$的方向相反,所以它们不相等.

点睛 1. 非零向量共线是指向量的方向相同或相反.

2. 共线的向量不一定相等,但相等的向量一定共线.

【变式训练 3】如图,已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形,则:



(1)与$\overrightarrow{OA}$的模相等的向量有哪些?

(2)与$\overrightarrow{OA}$的模相等,方向相反的向量有哪些?

(3)写出与$\overrightarrow{AB}$共线的向量.

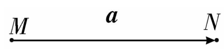
【解析】(1)与$\overrightarrow{OA}$的模相等的向量有$\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{CO}$.

(2)与$\overrightarrow{OA}$的模相等且方向相反的向量为$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{AO}$.

(3)与$\overrightarrow{AB}$共线的向量有$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{BA}$.

随堂小练

1. **(多选题)**如图所示,对于向量 $\boldsymbol{a}$,下列说法正确的是 (ABC)



A. 也可以用$\overrightarrow{MN}$表示

B. 方向是由 M 指向 N

C. 起点是 M

D. 终点是 M

【解析】向量的终点是 N,故 D 错,ABC 正确.

2. 若 $\boldsymbol{a}$ 为任意非零向量,$\boldsymbol{b}$ 是模为 1 的向量,有下列各式:

①$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$;②$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;③$|\boldsymbol{a}|>0$;④$|\boldsymbol{b}|=\pm1$.

其中正确的是 (B)

A. ①④　　B. ③

C. ①②③　　D. ②③

【解析】$\boldsymbol{a}$ 为任一非零向量,故$|\boldsymbol{a}|>0$. 故选 B.

3. 下列命题中,不正确的命题个数为 (C)

①若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,且$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$;

②若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的长度相等且方向相同或相反;

③对于任意$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

④若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【解析】①不正确. 因为向量是不同于数量的一种量. 它由两个因素来确定,即大小与方向,所以两个向量不能比较大小,故①不正确.

②不正确. 由$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$只能判断两向量长度相等,并不能判断方向.

③正确. 因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向. 由两向量相等的条件可得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

④不正确. 因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 若有一个是零向量,则其方向不确定. 故选 C.

4. 若对任意向量 $\boldsymbol{b}$,均有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 为<u>零向量</u>.

5. 给出下列五个条件:

①$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;②$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$;③$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反;④$|\boldsymbol{a}|=0$ 或$|\boldsymbol{b}|=0$;⑤$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量.

其中能使 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 成立的是<u>①③④</u>.

【解析】相等向量一定是共线向量,①能使 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;方向相同或相反的向量一定是共线向量,③能使 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;零向量与任意向量平行,④能使 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

温馨提示:请自主完成课后作业(一)

课后作业 · 单独成册

6.2 平面向量的运算

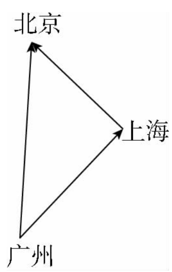
第 1 课时 向量的加法运算

学习目标	核心素养
1. 理解并掌握向量加法的概念,了解向量加法的物理意义及其几何意义. 2. 掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则,并能熟练地运用这两个法则作两个向量的加法运算.(重点) 3. 了解向量加法的交换律和结合律,并能依据几何意义作图解释向量加法运算律的合理性.	1. 通过学习向量加法的意义,培养数学抽象素养. 2. 借助加法的运算性质,培养数学运算素养.

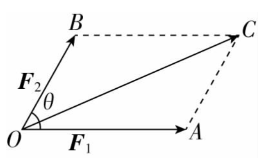
自主预习

情景导思

分析下列实例:(1)飞机从广州飞往上海,再从上海飞往北京,如图所示,这两次位移的结果与飞机从广州直接飞往北京的位移是否相同?



(2)有两条拖轮牵引一艘轮船,它们的牵引力分别是 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$,牵引绳之间的夹角为 θ,如图所示,如果只用一条拖轮来牵引,也能产生跟原来相同的效果吗?



知新预学

1. 向量加法的定义

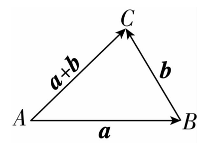
求__两个向量和__的运算,叫做向量的加法.

对于零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$,规定 $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+$__$\boldsymbol{0}$__$=\boldsymbol{a}$.

2. 向量加法的法则

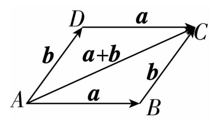
(1)三角形法则

已知非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,如图所示.



(2)平行四边形法则

已知两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作▱$ABCD$,则对角线上的向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图所示.



3. 向量加法的运算律

(1)交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$__$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$__.

(2)结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

4. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$,$|\boldsymbol{b}|$ 之间的关系

一般地,我们有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$__$\leqslant$__$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,当且仅当__$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 方向相同时__等号成立.

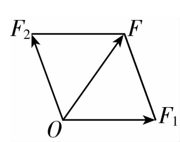
小试牛刀

1. 作用在同一物体上的两个力的大小都是 60 N,当它们的夹角为 120°时,这两个力的合力大小为 (B)

A. 30 N　　B. 60 N

C. 90 N　　D. 120 N

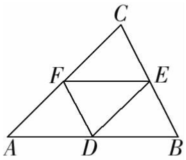
【解析】由向量加法的平行四边形法则作出两个力的合力,如图所示,由题意可知△OF_1F 为正三角形,∴合力的大小为 60 N.



2. (多选题)如图,D,E,F 分别是△ABC 的边 AB,BC,CA 的中点,则下列等式中正确的是 (ABC)

A. $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{0}$　　B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$

C. $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$　　D. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BD}$



【解析】$\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DE}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}+\mathbf{0}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}\neq\overrightarrow{BD}$. 故 ABC 正确，D 错误.

3. 已知在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}|=$ __$2\sqrt{13}$__.

【解析】$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{13}$.

4. 化简：(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$；

(2)$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$；

(3)$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}$.

【解析】(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

(2)$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN})=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MN}$.

(3)$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$.

互动课堂

合作探究

探究1 向量加法及其运算律

【例1】化简：

(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$；

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$；

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}$.

【解析】(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

$=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0}$.

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}$

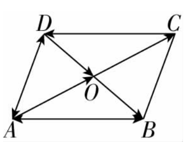
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

点睛 解决该类题目要灵活运用向量加法运算律，注意各向量的起点、终点及向量起点、终点字母排列顺序.

【变式训练1】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，O 是 AC 和 BD 的交点.



(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$ __$\overrightarrow{AC}$__；

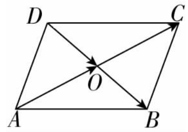
(2)$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=$ __$\overrightarrow{AO}$__；

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=$ __$\overrightarrow{AD}$__；

(4)$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=$ __$\mathbf{0}$__.

探究2 向量加法在平面几何中的应用

【例2】已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，且 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



【证明】$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$，

又∵$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$，∴$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

∴$AB=CD$ 且 $AB\parallel DC$.

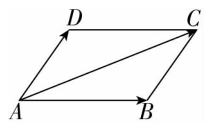
∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

点睛 利用向量的加法证明平面几何问题：

(1)要注意法则的应用；

(2)要注意有向线段表示的向量相等，说明有向线段所在直线平行或重合且长度相等.

【变式训练2】如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状.



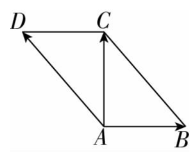
【解析】∵$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

∴$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

探究3 向量加法的实际应用

【例3】在水流速度为 $4\sqrt{3}$ km/h 的河中，如果要船以 12 km/h 的实际航速与河岸垂直行驶，求船航行速度的大小和方向.



【解析】如图，设 $\overrightarrow{AB}$ 表示水流速度，则 $\overrightarrow{AC}$ 表示船航行的实际速度，作 $AD\perp BC$，则 $\overrightarrow{AD}$ 即表示船航行的速度.

∵$|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{AC}|=12$，$\angle CAB=90^\circ$，∴$\tan\angle ACB=\dfrac{4\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

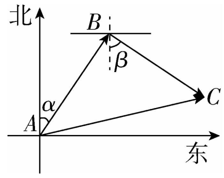
即 $\angle ACB=30^\circ$，∴$\angle CAD=30^\circ$.

∴$|\overrightarrow{AD}|=8\sqrt{3}$，$\angle BAD=120^\circ$.

即船航行的速度大小为 $8\sqrt{3}$ km/h，方向与水流方向所成角为 120°.

点睛 速度、位移等物理量均为向量，因此此类问题可以通过建模，转化为数学中的向量问题解决.

【变式训练3】如图所示，一架飞机从 A 地按北偏东 35° 的方向飞行 800 km 到达 B 地接到物资，然后又从 B 地按南偏东 55° 的方向飞行 800 km 送往 C 地，求这架飞机飞行的路程及两次位移的和.



【解析】设 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 分别表示飞机从 A 地按北偏东 $35°$ 的方向飞行 800 km，从 B 地按南偏东 $55°$ 的方向飞行 800 km，

则飞机飞行的路程指的是 $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$；

两次飞行的位移的和指的是 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$.

依题意，有 $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=800+800=1\ 600(\text{km})$，

$\because \alpha=35°, \beta=55°, \therefore \angle ABC=35°+55°=90°$，

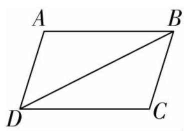
$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}=\sqrt{800^2+800^2}=800\sqrt{2}(\text{km})$.

其中 $\angle BAC=45°$，$\therefore$ 方向为北偏东 $35°+45°=80°$.

从而飞机飞行的路程是 1 600 km，两次飞行的位移和的大小为 $800\sqrt{2}$ km，方向为北偏东 $80°$.

随堂小练

1. 如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}=$ （ C ）

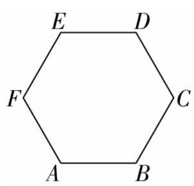


A. $\overrightarrow{BD}$　　B. $\overrightarrow{DB}$

C. $\overrightarrow{BC}$　　D. $\overrightarrow{CB}$

【解析】$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{BC}+\mathbf{0}=\overrightarrow{BC}$.

2. 如图所示，在正六边形 $ABCDEF$ 中，若 $AB=1$，则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}|=$ （ B ）



A. 1　　B. 2

C. 3　　D. $2\sqrt{3}$

【解析】$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2$.

3. 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{b}$ 是任意非零向量，则下列结论中正确的是 （ C ）

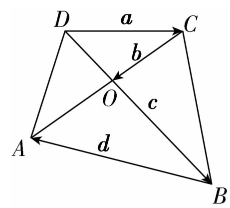
①$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；②$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$；③$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$；④$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；⑤$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

A. ①②　　B. ①③

C. ①③⑤　　D. ③④⑤

【解析】$\because \boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，$\therefore \boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，故选 C.

4. 根据下图填空，其中 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{DC}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CO}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{BA}$.



(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=$ $\underline{\overrightarrow{DB}}$；

(2)$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}=$ $\underline{\overrightarrow{CA}}$.

【解析】(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DB}$.

(2)$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（二）

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　向量的减法运算

学习目标	核心素养
1. 理解并掌握向量减法的概念，了解向量减法的物理意义及其几何意义.（重点） 2. 掌握向量减法的三角形法则和平行四边形法则，并能熟练地运用这两个法则作两个向量的减法运算.（重点、难点）	1. 通过学习向量减法的意义培养数学抽象素养. 2. 借助减法的运算性质培养数学运算素养.

自主预习

情景导思

上节课我们学习了向量的加法运算，知道了向量加法的三角形法则和平行四边形法则，那么，能否类比实数运算的减法法则，运用相反向量的概念得到向量减法运算的法则呢？

知新预学

1. 相反向量

与向量 $\boldsymbol{a}$ __长度相等、方向相反__ 的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记作 __$-\boldsymbol{a}$__.

(1)规定：零向量的相反向量 __仍是零向量__；

(2) $-(-\boldsymbol{a})=$ __$\boldsymbol{a}$__；

(3) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=$ __$\boldsymbol{0}$__；

(4)若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互为相反向量，则 $\boldsymbol{a}=$ __$-\boldsymbol{b}$__，$\boldsymbol{b}=$ __$-\boldsymbol{a}$__，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$ __$\boldsymbol{0}$__.

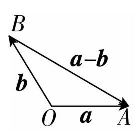
2. 向量减法的定义

向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 __差__，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，求两个向量差的运算，叫做 __向量的减法__.

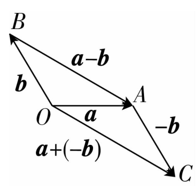
3. 向量减法的法则

(1)三角形法则

已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，如图①，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，利用此方法作图时，把两个向量的起点放在一起，则这两个向量的差是以减向量的终点为起点，被减向量的终点为终点的向量，这就是向量减法的几何意义. 即若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示有共同起点的两个向量，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量. 其作图过程可简记为“同起点，终点连”，方向指向被减向量的终点.



图①



图②

(2)平行四边形法则

利用相反向量作图，通过向量加法的平行四边形法则作出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图②.

4. 向量的模与向量加、减运算间的关系

根据向量加、减法的平行四边形法则或三角形法则可以解释 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 之间的关系，请你把下列结论补充完整：

对于任意的两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，都有

(1)当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ __共线同向__ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$；

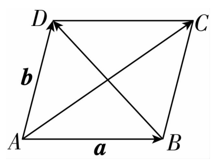
(2)当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ __共线反向__ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 分别能围成三角形. 由三角形中三边关系知 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||<|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

对任意两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 总有 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. 可以检验当 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零向量时，上式中的等号仍成立. 经常利用该不等式判断向量模的范围.

小试牛刀

1. 如图所示，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{BD}$ 分别是　　（ B ）



A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　　D. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

【解析】由向量的加法、减法得，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

故选 B.

2. $\overrightarrow{AC}$ 可以写成：① $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$；② $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OC}$；③ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$；④ $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$. 其中正确的是　　（ D ）

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

【解析】由向量的加法及减法定义可知①④正确.

3. 若菱形 $ABCD$ 的边长为 2，则 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ 的模为 __2__.

【解析】$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2$.

4. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，若 $|\overrightarrow{OA}|=12$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，且 $\angle AOB=90°$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ __13__.

【解析】∵ $|\overrightarrow{OA}|=12$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$\angle AOB=90^\circ$，

∴ $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$，∴ $|\overrightarrow{AB}|=13$.

∵ $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，∴ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$，

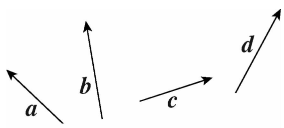
∴ $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{BA}|=13$.

互动课堂

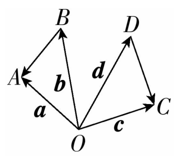
合作探究

探究 1　向量减法的几何作图

【例 1】如图所示，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$.

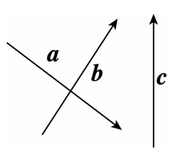


【解析】如图所示，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$. 则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\overrightarrow{DC}$.

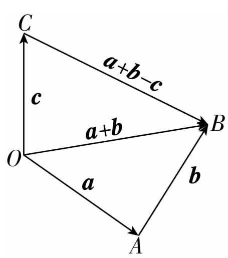


点睛　求作两个向量的差向量时，当两个向量有共同起点时，直接连接两个向量的终点，并指向被减向量，就得到两个向量的差向量；若两个向量的起点不重合，先通过平移使它们的起点重合，再作出差向量.

【变式训练 1】如图，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



【解析】如图所示，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



探究 2　向量加、减法的基本运算

【例 2】化简下列式子：

(1) $\overrightarrow{NQ}-\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{MP}$；

(2) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$.

【解析】(1) 原式 $=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{NP}=\mathbf{0}$.

(2) 原式 $=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.

点睛　向量减法的三角形法则的内容是：两向量相减，表示两向量起点的字母必须相同，这样两向量的差向量以减向量的终点字母为起点，以被减向量的终点字母为终点.

【变式训练 2】化简：

(1) $(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EC})$；

(2) $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$.

【解析】(1) $(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EC})$

$=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{DA}$.

(2) $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0}$.

探究 3　用已知向量表示其他向量

【例 3】已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{f}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$.

【解析】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}$，

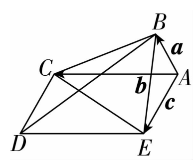
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}-\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{d}$，

$\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}=\mathbf{0}$.

点睛　灵活利用三角形法则处理，有时还要用到平行向量的性质、闭合向量为零向量等结论.

【变式训练 3】如图，在五边形 $ABCDE$ 中，若四边形 $ACDE$ 是平行四边形，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CD}$ 及 $\overrightarrow{CE}$.



【解析】∵四边形 $ACDE$ 是平行四边形，

∴ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$.

由已知得 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，

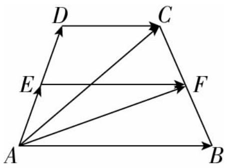
$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

∴ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

探究 4　向量加、减法的综合应用

【例 4】已知任意四边形 $ABCD$，E 为 AD 的中点，F 为 BC 的中点，求证：$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

【证明】方法一：如图，在四边形 $CDEF$ 中，



$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\mathbf{0}$，

$\therefore \overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ED}$. ①

在四边形 $ABFE$ 中，

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\mathbf{0}$，

$\therefore \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}$. ②

①+②得，

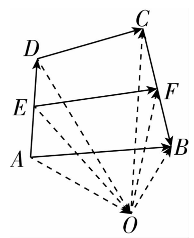
$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}=(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

$\because E,F$ 分别是 AD,BC 的中点，

$\therefore \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BF}=\mathbf{0}$.

$\therefore \overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

方法二：如图，在平面内取点 O，连接 AO,EO,DO,CO,FO,BO，



则 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$，

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}$.

$\because E,F$ 分别是 AD,BC 的中点，

$\therefore \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FC}$.

$\therefore \overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}$

$=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC})$

$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

点睛 1. 本例用向量的加、减运算解决，而不必考虑图形是平面图形还是空间图形，体现了向量的优点.

2. 本结论可以看作梯形中位线定理的推广.

【变式训练 4】 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{7}+1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}-1$，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值.

【解析】 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $|\overrightarrow{BA}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. 以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，则 $|\overrightarrow{OC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

$\because (\sqrt{7}+1)^2+(\sqrt{7}-1)^2=4^2$，

$\therefore |\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2$，$\therefore OA\perp OB$.

$\therefore$ 平行四边形 $OACB$ 是矩形.

$\because$ 矩形的对角线相等，

$\therefore |\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|=4$，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=4$.

随堂小练

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=$ （ A ）

A. $\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{CD}$　　D. $\overrightarrow{DB}$

【解析】 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. 故选 A.

2. 下列等式中，正确的个数为 （ C ）

①$\mathbf{0}-\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；②$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$；③$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$；④$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$；⑤$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$；⑥$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

【解析】 根据相反向量的概念知①②③④⑤正确，所以正确的个数为 5. 故选 C.

3. **(多选题)** 在平行四边形 $ABCD$ 中，下列结论正确的是 （ ABD ）

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$

B. $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

D. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$

【解析】 $\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$，A 正确；

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$，B 正确；

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$，C 错误；

$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore \overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$，$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$，D 正确. 故选 ABD.

4. 化简 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CD}=$ __$\overrightarrow{AD}$__.

【解析】 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$.

5. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=12$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最小值为 __4__，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值为 __20__.

【解析】 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 取得最小值，其值为 $12-8=4$，这时 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 取得最大值，其值为 $12+8=20$.

温馨提示：请自主完成课后作业(三)

课后作业 · 单独成册

第3课时 向量的数乘运算

学习目标	核心素养
1.了解向量数乘的概念,并理解向量数乘运算的几何意义. 2.理解并掌握向量数乘的运算律,会运用向量数乘运算律进行向量运算.(重点) 3.理解并掌握两向量共线的性质及其判定方法,并能熟练地运用这些知识处理有关共线向量问题.(重点、难点)	1.通过学习向量数乘的概念、几何意义及性质,培养数学抽象素养. 2.借助向量数乘的概念、几何意义及性质应用,培养数学运算与逻辑推理素养.

自主预习

情景导思

初中我们学习了实数相乘的结果是实数,那么实数与向量相乘的结果是实数还是向量?

知新预学

1.向量数乘的定义

实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积是一个__向量__,这种运算叫做向量的__数乘__,记作__$\lambda\boldsymbol{a}$__,其长度与方向规定如下:

(1)$|\lambda\boldsymbol{a}|=$__$|\lambda||\boldsymbol{a}|$__.

(2)当__$\lambda>0$__时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$方向相同;当__$\lambda<0$__时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$方向相反.

特别地,当$\lambda=0$时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

2.向量数乘的几何意义

在实数与向量的积$\lambda\boldsymbol{a}$中,$|\lambda|$可视为将向量$\boldsymbol{a}$的长度$|\boldsymbol{a}|$伸长($|\lambda|>1$)或缩短($|\lambda|<1$)的倍数.λ的符号表示是否改变向量$\boldsymbol{a}$的方向:当$\lambda>0$时,不改变$\boldsymbol{a}$的方向,即$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向;当$\lambda<0$时,改变$\boldsymbol{a}$的方向,即$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向.

3.向量数乘的运算律

设λ,μ为实数,那么

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=$__$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$__.

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=$__$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$__.

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$__$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$__.

特别地,有$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a})$,$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

4.向量共线定理

向量$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$与$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是:存在唯一一个实数$\lambda$,使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

5.向量的线性运算

向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算,向量的线性运算的结果仍是向量.对于任意向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,以及任意实数$\lambda$,$\mu_1,\mu_2$,恒有$\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=\lambda\mu_1\boldsymbol{a}\pm\lambda\mu_2\boldsymbol{b}$.

小试牛刀

1.下列各式中不表示向量的是 (C)

A.$0\cdot\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$

C.$|3\boldsymbol{a}|$　　D.$\frac{1}{x-y}\boldsymbol{e}(x\neq y)$

【解析】向量的数乘运算结果仍为向量,显然只有$|3\boldsymbol{a}|$不是向量.

2.若$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向,则 (A)

A.$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$

C.$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$

【解析】$\because\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的方向相同,且$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,

$\therefore\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$.

3.在平行四边形$ABCD$中,对角线AC与BD交于点O,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$,则$\lambda=$__2__.

【解析】$\because$四边形$ABCD$为平行四边形,对角线AC与BD交于点O,$\therefore\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$,$\therefore\lambda=2$.

4.若$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$,则$\lambda=$__$-3$__.

【解析】$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CB}$,

$\therefore\lambda=-3$.

互动课堂

合作探究

探究1 向量数乘的定义

【例1】已知$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,则在下列各命题中,正确的有 (D)

①$\lambda<0$,$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向一定相反;

②$\lambda>0$,$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向一定相同;

③$\lambda\mu>0$,$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\mu\boldsymbol{a}$的方向一定相同;

④$\lambda\mu<0$,$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\mu\boldsymbol{a}$的方向一定相反.

A.1个　　B.2个

C.3个　　D.4个

【解析】由λ与向量$\boldsymbol{a}$的积$\lambda\boldsymbol{a}$的方向规定,易知①②正确,对于命题③④,当$\lambda\mu>0$时,λ,μ同号,$\therefore\lambda\boldsymbol{a}$与$\mu\boldsymbol{a}$或者都与$\boldsymbol{a}$

同向，或者都与 a 反向，∴λa 与 μa 同向，当 $\lambda\mu<0$ 时，则 λ 与 μ 异号，λa 与 μa 中，一个与 a 同向，一个与 a 反向，∴λa 与 μa 反向，故③④也正确．故选 D.

点睛 解决此类问题要紧扣向量数乘的定义，实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量．当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，方向任意.

【变式训练 1】设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，λ 是非零实数，则下列结论正确的是 (B)

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反　　B. $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同

C. $|-\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$　　D. $|-\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\boldsymbol{a}$

【解析】对于 A，当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反，A 错误；由 $\lambda^2>0$ 可知 B 正确；对于 C，$|-\lambda\boldsymbol{a}|=|-\lambda||\boldsymbol{a}|$，由于 $|-\lambda|$ 的大小不确定，故 $|-\lambda\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$ 的大小关系不确定，C 错误；对于 D，$|\lambda|\boldsymbol{a}$ 是向量，而 $|-\lambda\boldsymbol{a}|$ 表示长度，两者不能比较大小，D 错误．故选 B.

探究 2 向量数乘的基本运算

【例 2】(1)化简：$\frac{1}{4}[2(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})-4(5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})]$.

(2)已知向量为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，未知向量为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 满足关系式 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$，$-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$.

【解析】$\frac{1}{4}[2(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})-4(5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})]$

$=\frac{1}{4}(4\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}-20\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b})$

$=\frac{1}{4}(-16\boldsymbol{a}+16\boldsymbol{b})$

$=-4\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$.

(2)联立得 $\begin{cases}3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},①\\-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},②\end{cases}$

由①×3+②×2，得 $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，代入①得 $3\times(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$，

所以 $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

点睛 1. 向量的数乘运算类似于代数多项式的运算，例如实数运算中的去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形手段在数与向量的乘积中同样适用，但是这里的“同类项”“公因式”是指向量，实数看作是向量的系数.

2. 向量也可以通过列方程和方程组求解，同时在运算过程中多注意观察，恰当地运用运算律，简化运算.

【变式训练 2】(1)计算：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-8\boldsymbol{a}$.

(2)若 $2\left(\boldsymbol{y}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)-\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{y})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为已知向量，求未知向量 $\boldsymbol{y}$.

【解析】(1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-8\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b})-8\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{a}=-10\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$.

(2)因为 $2\left(\boldsymbol{y}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)-\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{y})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，

所以 $3\boldsymbol{y}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{y}=\frac{2}{9}\boldsymbol{a}-\frac{2}{9}\boldsymbol{b}+\frac{1}{9}\boldsymbol{c}$.

探究 3 判定向量共线或三点共线

【例 3】已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线.

(1)若 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，判断向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是否共线；

(2)若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，求证：$A,B,D$ 三点共线.

【解析】(1)∵$\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{a}$，∴$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

(2)证明：∵$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=5(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=5\overrightarrow{AB}$.

∴$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ 共线，且有公共点 B，

∴A,B,D 三点共线.

点睛 1. 向量共线的判断(证明)是把两个向量用共同的已知向量来表示，进而互相表示，从而判断共线.

2. 利用向量共线定理证明三点共线，一般先任取两点构造向量，从而将问题转化为证明两个向量共线，需注意的是，在证明三点共线时，不但要利用 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，还要说明向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有公共点.

【变式训练 3】已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，则共线的三个点是 <u>A,B,D</u>.

【解析】∵$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2+7\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=2(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)=2\overrightarrow{AB}$.

∴$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ 共线，且有公共点 B，

∴A,B,D 三点共线.

探究 4 利用向量共线求参数值

【例 4】已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，欲使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线，试确定 k 的值.

【解析】∵$k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线，

∴存在实数 λ，使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$，

则 $(k-\lambda)\boldsymbol{e}_1=(\lambda k-1)\boldsymbol{e}_2$，

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，只能有 $\begin{cases}k-\lambda=0,\\\lambda k-1=0,\end{cases}$

∴$k=\pm1$.

点睛 利用向量共线定理，即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 共线 $\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，既可以证明点共线问题，也可以根据共线求参数的值.

【变式训练 4】已知 A,B,P 三点共线，O 为直线外任意一点，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x+y=$ <u>1</u>.

【解析】由于 A,B,P 三点共线，则 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}$ 在同一直线上，由向量共线定理可知，一定存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，

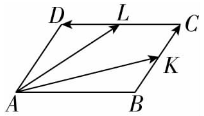
∴$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

∴$x=1-\lambda$，$y=\lambda$，则 $x+y=1$.

探究 5 向量数乘运算的综合应用

【例 5】如图所示，已知▱$ABCD$ 的边 BC,CD 的中点分别

为K,L,且$\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{e}_2$,试用$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$表示$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$.



【解析】方法一:设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{x}$,则$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}$,

则$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}$,$\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{4}\boldsymbol{x}$,

又$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{x}$,所以由$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{AL}$得$\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{4}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_2$,

解得$\boldsymbol{x}=\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_2-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1$,

即$\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_2$,

由$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}$,得$\overrightarrow{CD}=-\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2$.

方法二:设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{x}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{y}$,则$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}$,$\overrightarrow{DL}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}$.

由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}$,$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{AL}$,

得$\begin{cases}-\boldsymbol{y}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1,①\\ \boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_2,②\end{cases}$

$-2\times$②+①得$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,

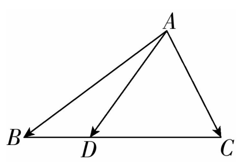
解得$\boldsymbol{x}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)$,即$\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_2$,

同理得$\boldsymbol{y}=\frac{2}{3}(-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,即$\overrightarrow{CD}=-\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2$.

点睛 1. 由已知向量表示未知向量时,要善于利用三角形法则、平行四边形法则以及向量线性运算的运算律,还应重视平面几何定理的应用.

2. 当用已知向量表示未知向量比较困难时,应考虑方程思想,利用方程的观点进行求解.

【变式训练5】在△ABC中,D为BC的一个三等分点,求证:$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



【证明】∵$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$,∴$2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}$.①

∵$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BD}$,②

①+②得$3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,∴$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

随堂小练

1. 已知$\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{e}$,则$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=$ (C)

A. $5\boldsymbol{e}$　　B. $-5\boldsymbol{e}$

C. $23\boldsymbol{e}$　　D. $-23\boldsymbol{e}$

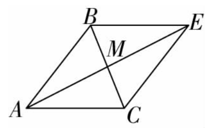
【解析】$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\times5\boldsymbol{e}-3\times(-3\boldsymbol{e})+4\boldsymbol{e}=23\boldsymbol{e}$.

2. 在△ABC中,M是BC的中点,则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=$ (C)

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$　　B. $\overrightarrow{AM}$

C. $2\overrightarrow{AM}$　　D. $\overrightarrow{MA}$

【解析】如图,作出平行四边形$ABEC$,因为M是BC的中点,所以M也是AE的中点,



由题意知,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$,故选C.

3. 已知△ABC的三个顶点A,B,C及平面内一点P,且$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$,则 (D)

A. 点P在△ABC内部

B. 点P在△ABC外部

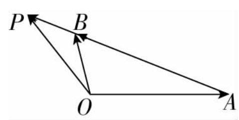
C. 点P在AB边上或其延长线上

D. 点P在AC边上

【解析】∵$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$,

∴$\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$,∴点$P$在$AC$边上.

4. 如图所示,已知$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$,用$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$.



【解析】$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OB}$.

温馨提示:请自主完成课后作业(四)

课后作业·单独成册

第 4 课时　向量的数量积(1)

学习目标	核心素养
1. 掌握平面向量数量积的定义及性质,理解其几何意义.(重点) 2. 会用两个向量的数量积求两个向量的夹角以及判断两个向量是否垂直.(重点、难点)	1. 通过学习向量数量积的定义及性质,培养数学抽象素养. 2. 借助向量数量积的意义和公式应用,可以培养逻辑推理、数学运算素养.

自主预习

情景导思

同学们都会算两个实数的乘积,那么,如果给你两个向量,你会计算它们的数量积吗?向量的数量积与实数的乘法有何区别?

知新预学

1. 两个向量的夹角

(1)已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(2)当 $\theta=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;当 $\theta=\pi$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向;当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

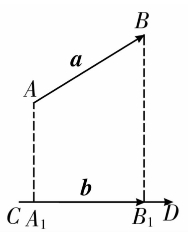
2. 向量数量积的定义

(1)已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 θ,我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

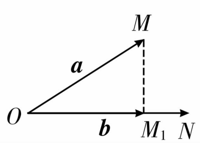
(2)规定:零向量与任一向量的数量积为 0.

3. 向量数量积的几何意义

(1)如图①,设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$,过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B,分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线,垂足分别为 A_1,B_1,得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$,我们称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影,$\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.



图①



图②

(2)如图②,我们可以在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$.过点 M 作直线 ON 的垂线,垂足为 M_1,则 $\overrightarrow{OM_1}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.

4. 向量数量积的性质

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量,则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$($\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角).

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;当 a 与 b 反向时,$a\cdot b=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

小试牛刀

1. 若 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　(　B　)

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{4}$

【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

故选 B.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 垂直,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是　(　C　)

A. $60°$　　B. $30°$　　C. $135°$　　D. $45°$

【解析】∵$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}^2=-1$,

∴$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{1\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=135°$.

3. 已知正三角形 ABC 的边长为 1,求:

(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;

(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$;

(3)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

【解析】(1)∵$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $60°$.

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)∵$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $120°$,

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 120°$

$=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

(3)∵$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $60°$,

∴$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

互动课堂

合作探究

探究1 数量积的基本概念

【例1】下列判断中正确的是__①②⑥__.

①若$a^2+b^2=0$,则$a=b=0$;②已知a,b,c是三个非零向量,若$a+b=0$,则$|a\cdot c|=|b\cdot c|$;③a,b共线$\Leftrightarrow a\cdot b=|a||b|$;④$|a||b|<a\cdot b$;⑤$a\cdot a\cdot a=|a|^3$;⑥$a^2+b^2\geqslant 2a\cdot b$;⑦若非零向量$a,b$满足$a\cdot b>0$,则$a$与$b$的夹角为锐角.

【解析】由于$a^2\geqslant 0,b^2\geqslant 0$,所以,若$a^2+b^2=0$,则$a=b=0$,故①正确;

若$a+b=0$,则$a=-b$,又a,b,c是三个非零向量,所以$a\cdot c=-b\cdot c$,所以$|a\cdot c|=|b\cdot c|$,②正确;

a,b共线$\Leftrightarrow a\cdot b=\pm|a||b|$,所以③错;

对于④,应有$|a||b|\geqslant a\cdot b$,所以④错;

对于⑤,应该是$a\cdot a\cdot a=|a|^2a$,所以⑤错;

对于⑥,$a^2+b^2\geqslant 2|a||b|\geqslant 2a\cdot b$,故⑥正确;

对于⑦,当a与b的夹角为$0°$时,也有$a\cdot b>0$,因此⑦错.

综上可知①②⑥正确.

点睛 对于这类概念、性质、运算律的问题的解答,关键是要对相关知识深刻理解.特别是那些易与实数运算相混淆的运算律,如消去律、乘法结合律等.

【变式训练1】已知a,b,c是三个非零向量,则下列命题中真命题的个数为 (C)

①$a\cdot b=\pm|a||b|\Leftrightarrow a/\!/b$;②$a,b$反向$\Leftrightarrow a\cdot b=-|a||b|$;③$a\perp b\Leftrightarrow|a+b|=|a-b|$;④$|a|=|b|\Leftrightarrow|a\cdot c|=|b\cdot c|$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】①$\because a\cdot b=|a||b|\cos\theta$,$\therefore$由$a\cdot b=\pm|a||b|$及$a,b$为非零向量可得$\cos\theta=\pm 1$,$\therefore\theta=0$或$\pi$.$\therefore a/\!/b$,且以上各步均可逆,故命题①是真命题.

②若a,b反向,则a,b的夹角为π,$\therefore a\cdot b=|a||b|\cos\pi=-|a||b|$,且以上各步均可逆,故命题②是真命题.

③当$a\perp b$时,将向量a,b的起点确定在同一点,以向量a,b为邻边作平行四边形,则该平行四边形必为矩形,于是它的两条对角线长相等,即有$|a+b|=|a-b|$.反过来,若$|a+b|=|a-b|$,则以a,b为邻边的四边形为矩形,$\therefore a\perp b$,故命题③是真命题.

④当$|a|=|b|$,但a与c的夹角和b与c的夹角不等时,就有$|a\cdot c|\neq|b\cdot c|$,反过来由$|a\cdot c|=|b\cdot c|$也推不出$|a|=|b|$.故命题④是假命题.

综上,①②③是真命题,④是假命题.

探究2 求向量的数量积

【例2】已知$|a|=4,|b|=5$,当(1)$a/\!/b$;(2)$a\perp b$;(3)a与b的夹角为$30°$时,分别求a与b的数量积.

【解析】(1)当$a/\!/b$时,若a与b同向,则$\theta=0°$,

$\therefore a\cdot b=|a||b|\cos 0°=4\times 5=20$;

若a与b反向,则$\theta=180°$,

$\therefore a\cdot b=|a||b|\cos 180°=4\times 5\times(-1)=-20$.

(2)当$a\perp b$时,$\theta=90°$,$\therefore a\cdot b=|a||b|\cos 90°=0$.

(3)当a与b的夹角为$30°$时,$a\cdot b=|a||b|\cos 30°=4\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

点睛 求平面向量数量积的步骤:

(1)求a与b的夹角$\theta,\theta\in[0,\pi]$;(2)分别求$|a|$和$|b|$;(3)求数量积,即$a\cdot b=|a||b|\cos\theta$,要特别注意书写时$a$与$b$之间用实心圆点"·"连接,而不能用"×"连接,也不能省去.

【变式训练2】已知$|a|=4,|b|=7$,且向量a与b的夹角为$\frac{2\pi}{3}$,求$(2a+3b)\cdot(3a-2b)$.

【解析】$(2a+3b)\cdot(3a-2b)$

$=6a^2-4a\cdot b+9b\cdot a-6b^2$

$=6|a|^2+5a\cdot b-6|b|^2$

$=6\times 4^2+5\times 4\times 7\cos\frac{2\pi}{3}-6\times 7^2$

$=-268$.

探究3 利用数量积公式求向量的模

【例3】已知$|a|=|b|=5$,向量a与b的夹角为$\frac{\pi}{3}$,求$|a+b|,|a-b|$.

【解析】设a,b的夹角为θ,

则$a\cdot b=|a||b|\cos\theta=5\times 5\times\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$.

$|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{|a|^2+2a\cdot b+|b|^2}=\sqrt{25+2\times\frac{25}{2}+25}=5\sqrt{3}$.

$|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{|a|^2-2a\cdot b+|b|^2}=\sqrt{25-2\times\frac{25}{2}+25}=5$.

点睛 此类求解模的问题一般转化为求模的平方,与向量的数量积联系,要灵活应用$a^2=|a|^2$,勿忘记开方.

【变式训练3】已知向量a与b的夹角为$120°$,且$|a|=4,|b|=2$,求:

(1)$|a+b|$;

(2)$|(a+b)\cdot(a-2b)|$.

【解析】由已知得$a\cdot b=|a||b|\cos\theta=4\times 2\times\cos 120°=-4$,$a^2=|a|^2=16,b^2=|b|^2=4$.

(1)$\because|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2=16+2\times(-4)+4=12$,

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$.

(2)$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=16-(-4)-2\times4=12$,

$\therefore|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|=12$.

探究 4 向量的夹角与垂直问题

【例 4】设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 是两个单位向量，其夹角是 $60°$，求向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m}$ 的夹角.

【解析】$\because|\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{m}|=1$，且 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角是 $60°$，

$\therefore \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\cos 60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

$\therefore|\boldsymbol{a}|=|2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\sqrt{(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})^2}=\sqrt{4\times1+1+4\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}=\sqrt{4\times1+1+4\times\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$，

$|\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m}|=\sqrt{(2\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m})^2}=\sqrt{4\times1+9\times1-12\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}=\sqrt{4\times1+9\times1-12\times\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m})=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}-6\boldsymbol{m}^2+2\boldsymbol{n}^2=\frac{1}{2}-6\times1+2\times1=-\frac{7}{2}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=-\frac{1}{2}$.

$\because\theta\in[0°,180°]$，$\therefore\theta=120°$，$\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$.

点睛 求向量夹角时，应先根据公式把涉及的量先计算出来再代入公式求角，注意向量夹角的范围是$[0,\pi]$.

【变式训练 4】已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则当 k 为何值时，向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 垂直?

【解析】要想$(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，

则需$(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$，

即 $k|\boldsymbol{a}|^2+(2k-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=0$，

$\therefore 5^2k+(2k-1)\times5\times4\times\cos 60°-2\times4^2=0$，

解得 $k=\frac{14}{15}$，即当 $k=\frac{14}{15}$时，向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 垂直.

随堂小练

1.（多选题）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和实数 λ，下列选项中正确的是（ ACD ）

A. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$　　B. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

C. $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

【解析】设 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|$，当且仅当 $\theta=0$ 或 π 时，$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，故 B 错. 选 ACD.

2. 已知$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是（ D ）

A. $\frac{5\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

【解析】$\because(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，$\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，

即 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$. 故选 D.

3. 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1^2+1\times1\times\cos 120°=\frac{1}{2}$.

4. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\lambda=$ $\underline{-8 或 5}$.

【解析】由 $3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，可得 $7\boldsymbol{c}=-(3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$，即 $49\boldsymbol{c}^2=9\boldsymbol{a}^2+\lambda^2\boldsymbol{b}^2+6\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，而 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，则 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$，则 $49=9+\lambda^2+6\lambda\cos\frac{\pi}{3}$，即 $\lambda^2+3\lambda-40=0$，解得 $\lambda=-8$ 或 $\lambda=5$.

温馨提示：请自主完成课后作业（五）

课后作业 · 单独成册

第 5 课时　向量的数量积(2)

学习目标	核心素养
1. 掌握向量数量积的运算律及常用的公式.(重点) 2. 会利用向量数量积的有关运算律进行计算或证明.(重点、难点)	1. 通过学习向量数量积的运算律及公式,培养数学抽象素养. 2. 借助向量数量积的有关运算,培养数学运算素养.

自主预习

情景导思

先快速回忆下上节课我们学习的向量的数量积的定义、公式、性质及运算,为本节课我们学习其运算律及常见公式的应用做好准备.

知新预学

1. 向量数量积的运算律

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律);

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$(结合律);

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

2. 向量数量积的运算性质

多项式乘法	向量数量积
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=$ $\underline{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ $\underline{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2}$

小试牛刀

1. 下面给出的关系式中,正确的个数是　　(C)

①$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$;②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;③$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$;④$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;⑤$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【解析】①②③正确;④错误;⑤错误,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta)^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2\cos^2\theta\neq\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$,故选 C.

2. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　　(A)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 5

【解析】$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$,

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=6$,

将上面两式左右两边分别相减,得 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$. 故选 A.

3. 若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　　(C)

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

【解析】设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,由 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=0$,$\therefore 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2=0$.

$\therefore\cos\theta=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|^2}{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|^2}{2|\boldsymbol{b}|^2}=-\dfrac{1}{2}$.

$\because 0°\leqslant\theta\leqslant180°$,$\therefore\theta=120°$. 故选 C.

互动课堂

合作探究

探究 1　向量数量积运算律的有关概念

【例 1】给出下列结论:

①若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;②若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$;③$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$;④$\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]=0$.

其中正确结论的序号是 $\underline{④}$.

【解析】∵两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,∴①不正确;

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,但不能得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,故②不正确;

向量 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,故③不正确;

$\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0$,故④正确.

点睛 向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与实数 a,b 的乘积 ab 有联系,也有许多不同之处.

例如,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 并不能得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 特别是向量的数量积不满足结合律,即一般情况下 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

【变式训练 1】设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是任意的非零向量,且它们相互不共线,给出下列结论:

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$;

②$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直;

③$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

④$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$.

其中正确结论的序号是 $\underline{①③④}$.

【解析】根据向量积的分配律知①正确；

$\because[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0$，$\therefore(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，②错误；

$\because\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，$\therefore|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 组成三角形的三边，$\therefore|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立，③正确；

④正确.

故正确结论的序号是①③④.

探究 2 向量数量积运算律的综合应用

【例 2】已知 $|\boldsymbol{a}|=6,|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

【解析】$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-6|\boldsymbol{b}|^2$

$=6^2-6\times4\times\cos60°-6\times4^2=-72$.

点睛 熟练掌握向量的数量积的定义及运算性质，是解决此类问题的关键. 计算形如 $(m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})\cdot(p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b})$ 的数量积可仿照多项式的乘法法则展开计算，再运用数量积定义和模的公式化简求解.

【变式训练 2】已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，且 $|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=2$，求：

(1) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$；

(2) $|3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|$.

【解析】(1) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2$

$=2|\boldsymbol{a}|^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2$

$=2\times16+5\times4\times2\times\cos120°-3\times4=0$.

(2) $|3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|^2=(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})^2=9\boldsymbol{a}^2-24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+16\boldsymbol{b}^2$

$=9\times16-24\times(-4)+16\times4=16\times19$，

$\therefore|3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|=4\sqrt{19}$.

探究 3 已知向量垂直求参数值

【例 3】已知两个单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，则 $t=$__2__.

【解析】由题意知，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=[t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(1-t)=0$，又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，所以 $t=2$.

点睛 由两向量垂直求参数一般是利用性质：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

【变式训练 3】设两个向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 满足 $|\boldsymbol{e}_1|=2,|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $60°$. 若向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 垂直，求实数 t 的值.

【解析】$\because$ 向量 $2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$ 垂直，

$\therefore(2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)=0$，

$\therefore2t\boldsymbol{e}_1^2+2t^2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+7\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+7t\boldsymbol{e}_2^2=0$，

即 $8t+2t^2+7+7t=0$，解得 $t=-7$ 或 $t=-\frac{1}{2}$.

探究 4 由两向量夹角的取值范围求参数的取值范围

【例 4】已知 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 是两个互相垂直的单位向量，若向量 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 与 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为锐角，则 k 的取值范围为__$(0,1)\cup(1,+\infty)$__.

【解析】$\because\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 与 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为锐角，

$\therefore(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)\cdot(k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=k\boldsymbol{e}_1^2+k\boldsymbol{e}_2^2+(k^2+1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=2k>0$，$\therefore k>0$.

但当 $k=1$ 时，$\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，它们的夹角为 0，不符合题意，舍去.

综上，k 的取值范围为 $k>0$ 且 $k\neq1$，即 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

点睛 由两向量夹角 θ 的取值范围，求参数的取值范围，一般利用以下结论：对于非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$.

【变式训练 4】由代数式的乘法法则类比推导向量的数量积的运算法则：

①“$mn=nm$”类比得到“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$”；

②“$(m+n)t=mt+nt$”类比得到“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$”；

③“$t\neq0,mt=nt\Rightarrow m=n$”类比得到“$\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$”；

④“$|mn|=|m||n|$”类比得到“$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$”；

⑤“$(mn)t=m(nt)$”类比得到“$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$”.

以上的式子中，类比得到的结论正确的是__①②__.

【解析】向量的数量积满足交换律，“$mn=nm$”类比得到“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$”，①正确；向量的数量积满足分配律，“$(m+n)t=mt+nt$”类比得到“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$”，②正确；向量的数量积不满足消元律，“$t\neq0,mt=nt\Rightarrow m=n$”不能类比得到“$\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$”，③错误；“$|mn|=|m||n|$”不能类比得到“$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$”，④错误；向量的数量积不满足结合律，“$(mn)t=m(nt)$”不能类比得到“$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$”，⑤错误.

随堂小练

1. 设 θ 为两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，已知对任意实数 t，$|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|$ 的最小值为 1. 下列选项正确的是 (B)

A. 若 θ 确定，则 $|\boldsymbol{a}|$ 唯一确定

B. 若 θ 确定，则 $|\boldsymbol{b}|$ 唯一确定

C. 若 $|\boldsymbol{a}|$ 确定，则 θ 唯一确定

D. 若 $|\boldsymbol{b}|$ 确定，则 θ 唯一确定

【解析】$|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{b}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{a}^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2t^2+2t|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2$.

$\because|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|_{\min}=1$，

$\therefore\frac{4|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-4|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta}{4|\boldsymbol{a}|^2}=|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)=1$.

$\therefore |\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=1$，

$\therefore |\boldsymbol{b}||\sin\theta|=1$，即 $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{1}{|\sin\theta|}$，

$\therefore$ 若 θ 确定，则 $|\boldsymbol{b}|$ 唯一确定. 故选 B.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=5$，则 $|3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ （ A ）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

【解析】$|3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{9|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$

$=\sqrt{9+25-6\times5\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\sqrt{49}=7$. 故选 A.

3. 设 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，又 k 与 t 是两个不同时为零的实数.

(1)若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(t-3)\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{y}=-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ 垂直，求 k 关于 t 的函数 $k=f(t)$；

(2)求函数 $k=f(t)$ 的最小值.

【解析】(1) $\because \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$，$\therefore \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$.

$\therefore [\boldsymbol{a}+(t-3)\boldsymbol{b}]\cdot(-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=0$，

即 $-k\boldsymbol{a}^2+[t-k(t-3)]\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t(t-3)\boldsymbol{b}^2=0$.

$\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

又 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，

$\therefore -4k+t(t-3)=0$，

$\therefore k=f(t)=\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{3}{4}t$.

(2)由(1)知 $f(t)=\dfrac{1}{4}(t^2-3t)=\dfrac{1}{4}\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{16}$，

$\therefore$ 当 $t=\dfrac{3}{2}$ 时，$f(t)_{\min}=-\dfrac{9}{16}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（六）

课后作业 · 单独成册

6.3 平面向量基本定理及坐标表示

第1课时 平面向量基本定理

学习目标	核心素养
1. 通过研究向量与另两个不共线向量之间的关系，体会平面向量基本定理的含义，了解基底的含义. 2. 理解并掌握平面向量基本定理.(重点、难点)	1. 通过平面向量基本定理的学习，培养数学抽象素养. 2. 借助平面向量基本定理的应用，培养直观想象素养.

自主预习

情景导思

物理上我们学习过力的分解，知道力是矢量的，与我们的向量是对应的，今天我们就借助力的分解和向量的加减运算，来完成平面向量基本定理的学习. 如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的确定向量，那么与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 在同一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 能否用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示？依据是什么？

知新预学

1. 平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个__不共线__向量，那么对于这一平面内的__任一__向量 $\boldsymbol{a}$，__有且只有一对__实数 λ_1,λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

2. 基底

若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，把__$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$__叫做表示这一平面内__所有__向量的一个基底.

小试牛刀

1. 下面三种说法中，正确的是 (B)

①一个平面内只有一对不共线的向量可作为表示该平面内的所有向量的基底；

②一个平面内有无数多对不共线的向量可作为表示该平面内的所有向量的基底；

③零向量不可作为基底中的向量.

A. ①② B. ②③

C. ①③ D. ①②③

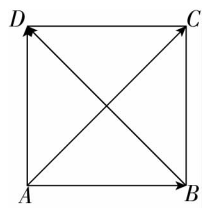
【解析】任何一对不共线的向量都可作为平面内所有向量的基底，基底有无数多对，$\boldsymbol{0}$ 与任何向量共线，所以不能作为基底中的向量，所以①错误，②③正确. 故选 B.

2. 已知向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，实数 x,y 满足 $(2x-3y)\boldsymbol{e}_1+(3x-4y)\boldsymbol{e}_2=6\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，则 $x=$__-15__，$y=$__-12__.

【解析】∵向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，

∴ $\begin{cases}2x-3y=6,\\3x-4y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-15,\\y=-12.\end{cases}$

3. 如图所示，在正方形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}$，则以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 为基底时，$\overrightarrow{AC}$ 可表示为__$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$__，以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\}$ 为基底时，$\overrightarrow{AC}$ 可表示为__$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$__.



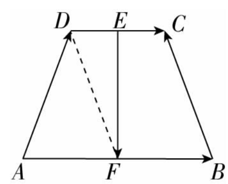
【解析】由平行四边形法则可知，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 为基底时，将 $\overrightarrow{BD}$ 平移，使点 B 与点 A 重合，再由三角形法则和平行四边形法则即可得到 $\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

4. 已知在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，且 $AB=2CD$，E,F 分别是 DC,AB 的中点. 设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{EF}$.

【解析】如图所示，连接 FD，∵ $DC/\!/AB$，$AB=2CD$，E,F 分别是 DC,AB 的中点，

∴ $DC \mathrel{\underline{\parallel}} FB$.

∴四边形 $DCBF$ 为平行四边形.



∴ $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$=-\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

互动课堂

合作探究

探究1 对向量的基底的理解

【例1】设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是平面内所有向量的一个基底，则下列四组向量中，不能作为基底的是 (B)

A. e_1+e_2 和 e_1-e_2　　B. $3e_1-4e_2$ 和 $6e_1-8e_2$

C. e_1+2e_2 和 $2e_1+e_2$　　D. e_1 和 e_1+e_2

【解析】选项 B 中，$\because 6e_1-8e_2=2(3e_1-4e_2)$，

$\therefore (3e_1-4e_2)/\!/(6e_1-8e_2)$，

$\therefore 3e_1-4e_2$ 和 $6e_1-8e_2$ 不能作为基底.

点睛 考查两个向量是否能构成基底，主要看两个向量是否非零且不共线.此外，平面内的一个基底一旦确定，那么平面内任意一个向量都可以由这个基底唯一线性表示出来.

【变式训练 1】设 e_1,e_2 是不共线的两个向量，下列四组向量中，能作为平面内所有向量的一个基底的是_①②④_.

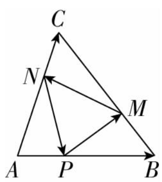
① e_1 与 e_1-e_2；② e_1-2e_2 与 e_2-2e_1；③ e_1-2e_2 与 $4e_2-2e_1$；④ e_1+2e_2 与 e_1-e_2.

【解析】对于③，$4e_2-2e_1=-2e_1+4e_2=-2(e_1-2e_2)$，

$\therefore e_1-2e_2$ 与 $4e_2-2e_1$ 共线，不能作为基底.

探究 2 用基底表示向量

【例 2】如图所示，设 M,N,P 是△ABC 三边上的点，且 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. 若 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$，试用 a,b 将 $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP},\overrightarrow{PM}$ 表示出来.



【解析】$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b$，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}(a-b)$

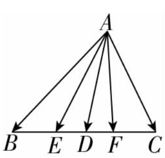
$=-\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$，

$\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MP}=-(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP})=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b$.

点睛 1. 若题目中已给出了基底，求解此类问题时，常利用向量加法和减法的三角形法则或平行四边形法则，结合数乘运算找到所求向量与基底的关系.

2. 若题目中没有给出基底，常结合已知条件先寻找一组从同一点出发的两个不共线向量作为基底，然后用上述方法求解.

【变式训练 2】如图，已知△ABC 中，D 为 BC 的中点，E,F 为 BC 的三等分点. 若 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$，用 a,b 表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$.



【解析】$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=a+\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$；

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

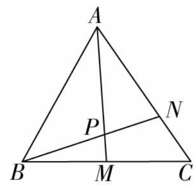
$=a+\frac{1}{3}(b-a)=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$；

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$=a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$.

探究 3 平面向量基本定理的应用

【例 3】如图，在△ABC 中，点 M 是边 BC 的中点，点 N 在边 AC 上，且 $AN=2NC$，AM 与 BN 相交于点 P. 求 $AP:PM$ 的值.



【解析】设 $\overrightarrow{BM}=e_1$，$\overrightarrow{CN}=e_2$，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3e_2-e_1$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2e_1+e_2$.

$\because A,P,M$ 和 B,P,N 分别共线，

$\therefore$ 存在实数 λ,μ，使得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda e_1-3\lambda e_2$，

$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu e_1+\mu e_2$.

$\therefore \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)e_1+(3\lambda+\mu)e_2$.

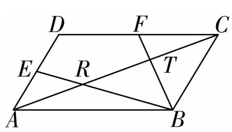
$\because \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2e_1+3e_2$，

$\therefore$ 由平面向量基本定理，得 $\begin{cases}\lambda+2\mu=2,\\3\lambda+\mu=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\\mu=\frac{3}{5}.\end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$，$\therefore AP:PM=4:1$.

点睛 利用平面向量基本定理解题的基本方法：恰当选择一个基底，用基底把向量表示出来，把问题转化为基底之间的关系，使问题得以解决.

【变式训练 3】如图所示，设 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，E,F 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 AD,CD 的中点，BE,BF 分别与对角线 AC 交于点 R 和 T，求证：$AR=RT=TC$.



【证明】依题意知 a,b 不共线，

设 $\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$，

则 $\overrightarrow{AR}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$. ①

$\because E$ 为 AD 的中点，$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

设 $\overrightarrow{ER}=k\overrightarrow{EB}=k(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE})=k\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)(k\in\mathbf{R})$，

$\therefore \overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+k\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=k\boldsymbol{a}+\frac{1-k}{2}\boldsymbol{b}$. ②

由①②得，$(\lambda-k)\boldsymbol{a}+\left(\lambda+\frac{k-1}{2}\right)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

$\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以$\begin{cases}\lambda-k=0,\\ \lambda+\frac{k-1}{2}=0.\end{cases}$ 解得 $\lambda=k=\frac{1}{3}$，

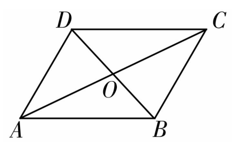
$\therefore \overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，即 $AR=\frac{1}{3}AC$.

同理，$\overrightarrow{TC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，即 $TC=\frac{1}{3}AC$，

故 $AR=RT=TC$.

随堂小练

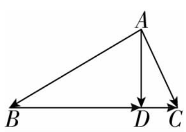
1. 如图所示，设 O 是▱$ABCD$ 的两条对角线的交点，给出下列向量组：
①$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$；②$\overrightarrow{DA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$；③$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{DC}$；④$\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OB}$.
其中可作为该平面内所有向量的基底的是 （ B ）



A. ①②　　B. ①③
C. ②④　　D. ③④

【解析】②中 $\overrightarrow{DA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线，④中 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 共线，①③中两向量不共线. 故选 B.

2. 如图，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{AD}=$ （ B ）



A. $\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$

【解析】$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

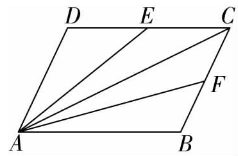
3. 已知 AD 为△ABC 的中线，则 $\overrightarrow{AD}=$ （ D ）

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

【解析】延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，连接 CE，BE，则四边形 $ABEC$ 是平行四边形，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

4. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点. 若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，则 $\lambda+\mu=$ $\underline{\frac{4}{3}}$.



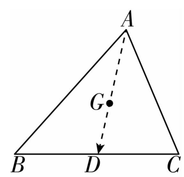
【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

又 $\because \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$，即 $\lambda=\mu=\frac{2}{3}$，$\therefore \lambda+\mu=\frac{4}{3}$.

5. 已知 G 为△ABC 的重心，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AG}=$ $\underline{\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}}$.

【解析】如图，连接 AG 并延长，交 BC 于点 D，则 D 为 BC 的中点，



$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（七）

课后作业 · 单独成册

第2课时　平面向量的正交分解及坐标表示

学习目标	核心素养
1.掌握平面向量的坐标表示以及两个向量和、差和向量数乘的坐标运算法则.(重点) 2.正确理解向量坐标的概念,要把点的坐标与向量的坐标区分开来. 3.理解用坐标表示的平面向量共线的条件,能根据平面向量的坐标,判断向量是否共线,并掌握三点共线的判断方法.(重点、难点)	1.通过平面向量的坐标表示以及两个向量和、差和向量数乘的坐标运算,培养数学抽象素养. 2.借助坐标运算法则及共线条件的应用,提升数学运算素养.

自主预习

情景导思

前面我们学习了向量的线性运算,明白它的法则与实数的多项式运算法则相似.那么向量的坐标运算法则又具有什么样的特征呢?这就是我们本节课学习的内容.

知新预学

1.平面向量的坐标表示

(1)向量的正交分解:把一个向量分解为两个__互相垂直__的向量,叫做把向量正交分解.

(2)向量的坐标表示:在平面直角坐标系中,设与 x 轴、y 轴方向相同的两个__单位向量__为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$,取$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$作为基底,$\boldsymbol{a}$ 为坐标平面内的任意向量,由平面向量基本定理可知,有且只有一对实数 x,y,使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.我们把有序数对$(x,y)$叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

2.平面向量的坐标运算

(1)已知 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$__$(x_1+x_2,y_1+y_2)$__,即两个向量和的坐标等于这两个向量相应坐标的和.

(2)已知 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$__$(x_1-x_2,y_1-y_2)$__,即两个向量差的坐标等于这两个向量相应坐标的差.

(3)已知 $\boldsymbol{a}=(x,y),\lambda\in\mathbf{R}$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=$__$(\lambda x,\lambda y)$__,即实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.

(4)已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 $A(x_1,y_1)$,终点 $B(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{AB}=$__(x_2-x_1,y_2-y_1)__.

3.两向量共线的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,其中 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$.

(1)当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是__$x_1y_2-x_2y_1=0$__.

(2)当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $x_2y_2\neq0$ 时,有$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.即两向量的相应坐标成比例.

4.线段中点及三角形重心的向量坐标公式

(1)若 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P$ 为 AB 的中点,O 为坐标原点,则 $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=$__$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$__.

(2)在△ABC 中,$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$,△$ABC$ 的重心为 G,O 为坐标原点,则 $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=$__$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$__.

小试牛刀

1.设平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,5),\boldsymbol{b}=(-2,1)$,则 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$　(　A　)

A.(7,3)　B.(7,7)　C.(1,7)　D.(1,3)

【解析】$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3,5)-2(-2,1)=(3,5)-(-4,2)=(7,3)$.

2.已知向量 $\overrightarrow{OA}=(3,-2),\overrightarrow{OB}=(-5,-1)$,则$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 的坐标是　(　A　)

A.$\left(-4,\frac{1}{2}\right)$　B.$\left(4,-\frac{1}{2}\right)$

C.$(-8,1)$　D.$(8,1)$

【解析】$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-8,1)$,

$\therefore\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(-4,\frac{1}{2}\right)$.故选 A.

3.已知四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(0,2),B(-1,-2),C(3,1)$,且 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$,则顶点 D 的坐标为　(　A　)

A.$\left(2,\frac{7}{2}\right)$　B.$\left(2,-\frac{1}{2}\right)$

C.$(3,2)$　D.$(1,3)$

【解析】设 D 点坐标为(x,y),则 $\overrightarrow{BC}=(4,3)$,

$\overrightarrow{AD}=(x,y-2)$,

由 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$,得$\begin{cases}4=2x,\\3=2(y-2),\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=\frac{7}{2},\end{cases}$所以 $D\left(2,\frac{7}{2}\right)$.

故选 A.

4.已知点 $A(0,1),B(3,2)$,向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$,则向量 $\overrightarrow{BC}=$　(　A　)

A. $(-7,-4)$　　B. $(7,4)$

C. $(-1,4)$　　D. $(1,4)$

【解析】$\because \overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-4,-3)-(3,1)=(-7,-4)$. 故选 A.

5. 已知三点 $A(1,2)$，$B(2,4)$，$C(3,m)$共线，则 m 的值为 $\underline{\ 6\ }$.

【解析】由已知得，$\overrightarrow{AB}=(2,4)-(1,2)=(1,2)$，

$\overrightarrow{AC}=(3,m)-(1,2)=(2,m-2)$.

$\because A,B,C$ 三点共线，即向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共线，

$\therefore$ 存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，

即 $(1,2)=\lambda(2,m-2)=(2\lambda,\lambda m-2\lambda)$.

$\therefore \begin{cases}2\lambda=1,\\ \lambda m-2\lambda=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\ m=6.\end{cases}$

即当 $m=6$ 时，A,B,C 三点共线.

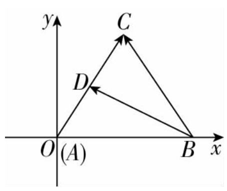
互动课堂

合作探究

探究 1　平面向量的坐标表示

【例 1】已知边长为 2 的正三角形 ABC，顶点 A 在坐标原点，AB 边在 x 轴上，C 在第一象限，D 为 AC 的中点，分别求向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}$ 的坐标.

【解析】如图，正三角形 ABC 的边长为 2，则顶点 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(2\cos 60°,2\sin 60°)$，



$\therefore C(1,\sqrt{3})$，$D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BC}=(1-2,\sqrt{3}-0)=(-1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{1}{2}-2,\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0\right)=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

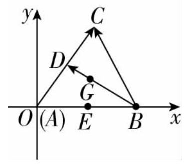
点睛 1. 向量的坐标等于终点的坐标减去起点的相应坐标，只有当向量的起点在坐标原点时，向量的坐标才等于终点的坐标.

2. 求向量的坐标一般转化为求点的坐标，解题时常常结合几何图形，利用三角函数的定义和性质进行计算.

【变式训练 1】在例 1 基础上，若 E 为 AB 的中点，G 为三角形的重心，求向量 $\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{GD}$ 的坐标.

【解析】由于 $B(2,0)$，$E(1,0)$，$C(1,\sqrt{3})$，$D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$G\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{CE}=(1-1,0-\sqrt{3})=(0,-\sqrt{3})$，



$\overrightarrow{AG}=\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\overrightarrow{BG}=\left(1-2,\dfrac{\sqrt{3}}{3}-0\right)=\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\overrightarrow{GD}=\left(\dfrac{1}{2}-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

探究 2　平面向量的坐标运算

【例 2】已知平面上三点 $A(2,-4)$，$B(0,6)$，$C(-8,10)$，求：

(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$；(2)$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$；(3)$\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

【解析】$\because A(2,-4)$，$B(0,6)$，$C(-8,10)$.

$\therefore \overrightarrow{AB}=(0,6)-(2,-4)=(-2,10)$，

$\overrightarrow{AC}=(-8,10)-(2,-4)=(-10,14)$，

$\overrightarrow{BC}=(-8,10)-(0,6)=(-8,4)$.

(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(-2,10)-(-10,14)=(8,-4)$.

(2)$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=(-2,10)+2(-8,4)=(-18,18)$.

(3)$\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=(-8,4)-\dfrac{1}{2}(-10,14)=(-3,-3)$.

点睛 1. 已知两点求向量的坐标时，一定要注意是终点坐标减去起点坐标.

2. 向量的坐标运算最终转化为实数的运算.

【变式训练 2】已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，求：

(1)$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$；(3)$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

【解析】(1)$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2(-1,2)+3(2,1)$

$=(-2,4)+(6,3)=(4,7)$.

(2)$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(-1,2)-3(2,1)$

$=(-1,2)-(6,3)=(-7,-1)$.

(3)$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}(-1,2)-\dfrac{1}{3}(2,1)$

$=\left(-\dfrac{1}{2},1\right)-\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)=\left(-\dfrac{7}{6},\dfrac{2}{3}\right)$.

探究 3　平面向量坐标运算的应用

【例 3】已知点 $A(2,3)$，$B(5,4)$，$C(7,10)$，若 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$，试求 λ 为何值时：

(1)点 P 在第一、三象限的角平分线上；

(2)点 P 在第三象限内.

【解析】设点 P 的坐标为(x,y)，

则 $\overrightarrow{AP}=(x,y)-(2,3)=(x-2,y-3)$，

$\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(5,4)-(2,3)+\lambda[(7,10)-(2,3)]$

$=(3,1)+\lambda(5,7)=(3+5\lambda,1+7\lambda)$.

$\because \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，$\therefore \begin{cases} x-2=3+5\lambda, \\ y-3=1+7\lambda, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x=5+5\lambda, \\ y=4+7\lambda. \end{cases}$

(1)若点 P 在第一、三象限的角平分线上，则 $5+5\lambda=4+7\lambda$，

$\therefore \lambda=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，点 P 在第一、三象限的角平分线上.

(2)若点 P 在第三象限内，则 $\begin{cases} 5+5\lambda<0, \\ 4+7\lambda<0, \end{cases}$

$\therefore \lambda<-1$.

$\therefore$ 当 $\lambda<-1$ 时，点 P 在第三象限内.

点睛 1. 待定系数法是最基本的数学方法之一，其基本形式是先将未知量设出来，再建立方程(组)求出未知数的值.

2. 坐标形式下向量相等的条件：相等向量的对应坐标相等；对应坐标相等的向量是相等向量. 由此可建立相等关系求某些参数的值.

【变式训练 3】已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$. 若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(9,-8)(m,n\in\mathbf{R})$，则 $m-n=$ __-3__.

【解析】$\because \boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，$\therefore m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(2m+n,m-2n)=(9,-8)$，即 $\begin{cases} 2m+n=9, \\ m-2n=-8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=2, \\ n=5, \end{cases}$ 故 $m-n=2-5=-3$.

探究 4　向量共线的判定

【例 4】已知 $A(2,1)$，$B(0,4)$，$C(1,3)$，$D(5,-3)$. 判断 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是否共线？如果共线，它们的方向相同还是相反？

【解析】$\overrightarrow{AB}=(0,4)-(2,1)=(-2,3)$.

$\overrightarrow{CD}=(5,-3)-(1,3)=(4,-6)$.

方法一：$\because(-2)\times(-6)-3\times4=0$，且 $(-2)\times4<0$，

$\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线且方向相反.

方法二：$\because \overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线且方向相反.

点睛 此类题目应充分利用向量共线定理或向量共线的坐标表示进行判断，特别是利用向量共线的坐标表示进行判断时，要注意坐标之间的搭配.

【变式训练 4】已知 A，B，C 三点的坐标分别为 $(-1,0)$，$(3,-1)$，$(1,2)$，且 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，求证：$\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{AB}$.

【证明】设点 E，F 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2). 依题意有，$\overrightarrow{AC}=(2,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,3)$，$\overrightarrow{AB}=(4,-1)$.

$\because \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\therefore (x_1+1,y_1)=\frac{1}{3}(2,2)$，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

同理点 F 的坐标为 $\left(\frac{7}{3},0\right)$.

$\therefore \overrightarrow{EF}=\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

$\because \frac{8}{3}\times(-1)-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)=0$，$\therefore \overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{AB}$.

探究 5　利用向量共线求参数

【例 5】已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$，当 k 为何值时，$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行？平行时它们是同向还是反向？

【解析】方法一：$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=k(1,2)+(-3,2)=(k-3,2k+2)$，

$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(1,2)-3(-3,2)=(10,-4)$.

当 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行时，存在唯一的实数 λ，

使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，

即 $(k-3,2k+2)=\lambda(10,-4)$，

$\therefore \begin{cases} k-3=10\lambda, \\ 2k+2=-4\lambda, \end{cases}$

解得 $k=\lambda=-\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 当 $k=-\frac{1}{3}$ 时，$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行，

这时 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$\because \lambda=-\frac{1}{3}<0$，$\therefore k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 反向.

方法二：由方法一知 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-3,2k+2)$，

$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(10,-4)$.

$\because k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行，

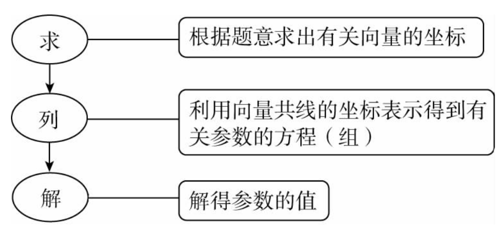
$\therefore (k-3)\times(-4)-10(2k+2)=0$，

解得 $k=-\frac{1}{3}$.

此时 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(-\frac{1}{3}-3,-\frac{2}{3}+2\right)=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

$\therefore$ 当 $k=-\frac{1}{3}$ 时，$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行，并且反向.

点睛 由向量共线求参数的值的方法：



【变式训练 5】设向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$，$\overrightarrow{OB}=(4,5)$，$\overrightarrow{OC}=(10,k)$，当 k 为何值时，A，B，C 三点共线？

【解析】方法一：若 A，B，C 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共线，

则存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.

$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4-k,-7)$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(10-k,k-12)$，

$\therefore (4-k,-7)=\lambda(10-k,k-12)$，

$\therefore\begin{cases}4-k=\lambda(10-k),\\-7=\lambda(k-12),\end{cases}$ 解得 $k=-2$ 或 $k=11$.

故当 $k=-2$ 或 $k=11$ 时,A,B,C 三点共线.

方法二:若 A,B,C 三点共线,则 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 共线.

$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4-k,-7)$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(10-k,k-12)$,

$\therefore(4-k)(k-12)+7(10-k)=0$,

$\therefore k^2-9k-22=0$,解得 $k=-2$ 或 $k=11$.

故当 $k=-2$ 或 $k=11$ 时,A,B,C 三点共线.

随堂小练

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,0)$,则向量 $3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=$ (D)

A. $(-4,2)$　　B. $(-4,-2)$

C. $(4,2)$　　D. $(4,-2)$

【解析】$3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=3(1,0)-(-1,2)=(3,0)-(-1,2)=(3+1,0-2)=(4,-2)$,故选 D.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,y)$. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $y=$ (D)

A. 1　　B. -1　　C. 4　　D. -4

【解析】$\because\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\therefore(-1)\times y-2\times2=0$,$\therefore y=-4$. 故选 D.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,3)$,$\boldsymbol{c}=(3,4)$,且 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$,则 λ_1,λ_2 的值分别为 (D)

A. $-2,1$　　B. $1,-2$　　C. $2,-1$　　D. $-1,2$

【解析】由已知得 $\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=3,\\2\lambda_1+3\lambda_2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda_1=-1,\\\lambda_2=2.\end{cases}$ 故选 D.

4. 已知 $M(3,-2)$,$N(-5,-1)$,且 $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$,则点 P 的坐标为 (C)

A. $(-8,1)$　　B. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$　　D. $(8,-1)$

【解析】设 $P(x,y)$,则 $(x-3,y+2)=\frac{1}{2}\times(-8,1)$,

$\therefore x=-1,y=-\frac{3}{2}$. 故选 C.

5. 已知点 $A(1,3)$,$B(4,-1)$,则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 $\underline{\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}$.

【解析】$\because\overrightarrow{AB}=(4,-1)-(1,3)=(3,-4)$,

$\therefore$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

6. 已知 $\overrightarrow{OA}=(2,-1)$,$\overrightarrow{OB}=(3,0)$,$\overrightarrow{OC}=(m,3)$. 若 A,B,C 三点能构成三角形,则实数 m 的取值范围是 $\underline{(-\infty,6)\cup(6,+\infty)}$.

【解析】$\because A,B,C$ 三点能构成三角形. $\therefore\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线.

$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,1)$,$\overrightarrow{AC}=(m-2,4)$,

$\therefore1\times4-1\times(m-2)\neq0$,解得 $m\neq6$.

$\therefore m$ 的取值范围是 $(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$.

温馨提示:请自主完成课后作业(八)

课后作业 · 单独成册

第 3 课时　平面向量数量积的坐标表示

学习目标	核心素养
1. 理解两个向量数量积坐标表示的推导过程，能运用数量积的坐标表示进行向量数量积的运算，并能根据向量的坐标计算向量的模，并推导平面内两点间的距离公式.（重点） 2. 能根据向量的坐标求向量的夹角及判定两个向量垂直.（重点、难点）	1. 通过数量积坐标表示公式的学习，培养数学抽象素养. 2. 借助数量积坐标表示的简单应用，提升直观想象素养.

自主预习

情景导思

上节课我们学习了向量的坐标表示及运算，那么如果给出两个向量的坐标表示，如何用坐标表示它们的数量积呢？

知新预学

1. 平面向量数量积的坐标表示

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ __$x_1x_2+y_1y_2$__，即两个向量的数量积等于__它们对应坐标的乘积的和__.

2. 平面向量的模

(1)若设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2)若向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点和终点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

3. 平面向量夹角的坐标表示

设两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

4. 两个向量垂直的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ __$x_1x_2+y_1y_2=0$__.

小试牛刀

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为　（ B ）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$

C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

【解析】∵ $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$.

∴ $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又∵ $\theta\in[0,\pi]$，

∴ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$. 故选 B.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,n)$，$\boldsymbol{b}=(-1,n)$. 若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $|\boldsymbol{a}|=$　（ C ）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　D. 4

【解析】∵ $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=2(-1+n^2)-(1+n^2)=n^2-3=0$，

∴ $n=\pm\sqrt{3}$.

∴ $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+n^2}=2$. 故选 C.

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\lambda+1,1)$，$\boldsymbol{n}=(\lambda+2,2)$. 若 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$，则 $\lambda=$　（ B ）

A. -4　　B. -3

C. -2　　D. -1

【解析】由已知得，$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(2\lambda+3,3)$，$\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=(-1,-1)$，由 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$，可得 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=(2\lambda+3,3)\cdot(-1,-1)=-2\lambda-6=0$，解得 $\lambda=-3$. 故选 B.

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$. 若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{c}|=$ __$8\sqrt{2}$__.

【解析】∵ $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，

∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+4\times2=6$，

∴ $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}$，

∴ $\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+36\boldsymbol{b}^2=20-12\times6+36\times5=128$.

∴ $|\boldsymbol{c}|=8\sqrt{2}$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(4,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的余弦值；

(2)若 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，求实数 λ 的值.

【解析】(1)∵ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times(-1)+3\times2=2$，

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∴ $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2}{5\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$.

(2)∵ $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(4+\lambda,3-2\lambda)$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(7,8)$，

$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

∴ $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=7(4+\lambda)+8(3-2\lambda)=0$，

∴ $\lambda=\dfrac{52}{9}$.

互动课堂

合作探究

探究1 平面向量数量积的坐标运算

【例1】已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$. 求：

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标；

(2)若 $\boldsymbol{c}=(2,-1)$，求$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$.

【解析】(1)∵$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，且 $\boldsymbol{b}=(1,2)$，

设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda,2\lambda)(\lambda>0)$.

∵$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，∴$\lambda+4\lambda=10$，∴$\lambda=2$，

∴$\boldsymbol{a}=(2,4)$.

(2)∵$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2\times2+(-1)\times4=0$，

∴$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

点睛 1. 通过向量的坐标表示实现向量问题代数化，应注意与方程、函数等知识的联系.

2. 向量问题的处理有两种思路：一种是纯向量式，另一种是坐标式，两者相互补充.

【变式训练1】已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,5)$，$\boldsymbol{c}=(2,1)$. 求：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；

(4)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

【解析】(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,3)\cdot(2,5)=1\times2+3\times5=17$.

(2)∵$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,3)+(2,5)=(3,8)$，

$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(1,3)-(2,5)=(2,6)-(2,5)=(0,1)$，

∴$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(3,8)\cdot(0,1)=3\times0+8\times1=8$.

(3)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=17\boldsymbol{c}=17(2,1)=(34,17)$.

(4)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot[(2,5)\cdot(2,1)]=(1,3)\cdot(2\times2+5\times1)=9(1,3)=(9,27)$.

探究2 平面向量的夹角问题

【例2】已知 $\overrightarrow{OP}=(2,1)$，$\overrightarrow{OA}=(1,7)$，$\overrightarrow{OB}=(5,1)$，设 C 是直线 OP 上的一点(其中 O 为坐标原点).

(1)求使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 取得最小值时的 $\overrightarrow{OC}$；

(2)对(1)中求出的点 C，求 $\cos\angle ACB$.

【解析】(1)∵点 C 是直线 OP 上的一点，

∴向量 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 共线，

设 $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OP}(t\in\mathbf{R})$，

则 $\overrightarrow{OC}=t(2,1)=(2t,t)$，

∴$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(1-2t,7-t)$，

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(5-2t,1-t)$，

∴$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(1-2t)(5-2t)+(7-t)(1-t)$

$=5t^2-20t+12=5(t-2)^2-8$.

∴当 $t=2$ 时，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 取得最小值，此时 $\overrightarrow{OC}=(4,2)$.

(2)由(1)知 $\overrightarrow{OC}=(4,2)$，

∴$\overrightarrow{CA}=(-3,5)$，$\overrightarrow{CB}=(1,-1)$，

∴$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{34}$，$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-3-5=-8$.

∴$\cos\angle ACB=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

点睛 应用向量的夹角公式求夹角时，应先分别求出两个向量的模，再求出它们的数量积，最后代入公式求出夹角的余弦值，进而求出夹角.

【变式训练2】已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$. 求：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值；

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值.

【解析】(1)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=(1,0)-(0,1)=(1,-1)$，

$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=4(1,0)+3(0,1)=(4,3)$，

∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times1+3\times(-1)=1$，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(4+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$.

(2)设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，

得 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times5}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

探究3 平面向量数量积坐标形式的综合运用

【例3】已知在△ABC 中，$A(2,-1)$，$B(3,2)$，$C(-3,-1)$，AD 为 BC 边上的高，求 $|\overrightarrow{AD}|$ 与点 D 的坐标.

【解析】设 D 点坐标为(x,y)，

则 $\overrightarrow{AD}=(x-2,y+1)$，$\overrightarrow{BC}=(-6,-3)$，

$\overrightarrow{BD}=(x-3,y-2)$，

∵D 在直线 BC 上，即 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线，

∴存在实数 λ，使 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，

即$(x-3,y-2)=\lambda(-6,-3)$.

∴$\begin{cases}x-3=-6\lambda,\\y-2=-3\lambda.\end{cases}$

∴$x-3=2(y-2)$，即 $x-2y+1=0$. ①

∵$AD\perp BC$，

∴$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即$(x-2,y+1)\cdot(-6,-3)=0$，

∴$-6(x-2)-3(y+1)=0$，即 $2x+y-3=0$. ②

由①②可得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 即 D 点坐标为$(1,1)$，

∴$\overrightarrow{AD}=(-1,2)$. ∴$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$.

综上，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{5}$，$D(1,1)$.

点睛 利用向量求点的坐标是一种常见题型，其处理方法为设出点的坐标，利用向量垂直及向量的模列出方程组进行求解.

【变式训练 3】在平面直角坐标系内，已知三点 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(2,5)$，求：

(1)$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的坐标；

(2)$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$ 的值；

(3)$\cos\angle BAC$ 的值.

【解析】(1)$\overrightarrow{AB}=(0,1)-(1,0)=(-1,1)$，

$\overrightarrow{AC}=(2,5)-(1,0)=(1,5)$.

(2)因为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(-1,1)-(1,5)=(-2,-4)$，

所以 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$.

(3)因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,1)\cdot(1,5)=4$，

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{26}$，

所以 $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{4}{\sqrt{2}\times\sqrt{26}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

随堂小练

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$，$\boldsymbol{b}=(6,5)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$　　(　A　)

A. 垂直　　B. 不垂直也不平行

C. 平行且同向　　D. 平行且反向

【解析】$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-5\times6+6\times5=0$，$\therefore \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 故选 A.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，则实数 $\lambda=$　　(　A　)

A. $-\dfrac{1}{7}$　　B. $\dfrac{1}{7}$　　C. $-\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

【解析】由 $\boldsymbol{a}=(-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，

知 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-3\lambda-1,2\lambda)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-1,2)$.

又 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，

$\therefore 3\lambda+1+4\lambda=0$，$\therefore \lambda=-\dfrac{1}{7}$. 故选 A.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$，则 $|\boldsymbol{b}|=$　　(　C　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 5　　D. 25

【解析】$\because |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$，

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=5+2\times10+\boldsymbol{b}^2=(5\sqrt{2})^2$，

$\therefore |\boldsymbol{b}|=5$. 故选 C.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，则 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=$__1__.

【解析】$\because \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$，

$\therefore (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+\sqrt{3}\times0=1$.

温馨提示：请自主完成课后作业(九)

课后作业 · 单独成册

6.4 平面向量的应用

第 1 课时 平面几何中的向量方法

学习目标	核心素养
1. 通过对具体问题的分析，了解用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”.（重点） 2. 体会向量方法在证明平行、垂直，计算长度、夹角问题中的应用.（重点、难点）	在用向量方法解决几何问题的过程中，体会向量方法的程序化步骤，体会化归转化、数形结合等数学思想，提升逻辑推理、数学运算、数学建模等素养.

自主预习

情景导思

已知水渠横断面是梯形 $ABCD$，$AB//CD$，且 $AD=BC$，则这个梯形为等腰梯形. 类比几何元素之间的关系，你会想到向量运算之间都有什么关系？

知新预学

1. 平面几何图形的许多性质，如平移、全等、相似、长度、夹角等都可以由_向量的线性运算及数量积_表示出来.

2. 用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”：

（1）建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为_向量问题_.

（2）通过_向量运算_，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等问题.

（3）把运算结果“_翻译_”成几何关系.

小试牛刀

1. 在四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，且 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，则这个四边形是（ C ）

A. 平行四边形　　B. 矩形

C. 等腰梯形　　D. 菱形

【解析】由 $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 知 $DC//AB$，且 $|DC|=\frac{1}{2}|AB|$，因此四边形 $ABCD$ 是梯形. 又因为 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，所以四边形 $ABCD$ 是等腰梯形. 故选 C.

2. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且满足 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}|$，则 $\triangle ABC$ 为（ B ）

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

【解析】因为 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，

$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}|$，所以 $|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，

因为 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，所以 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，

由此可得以 AB，AC 为邻边的平行四边形为矩形，所以 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，得 $\triangle ABC$ 的形状是直角三角形. 故选 B.

3. 设点 M 是线段 BC 的中点，点 A 在直线 BC 外，$|\overrightarrow{BC}|^2=16$，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则 $|\overrightarrow{AM}|=$（ C ）

A. 8　　B. 4

C. 2　　D. 1

【解析】因为 $|\overrightarrow{BC}|^2=16$，所以 $|\overrightarrow{BC}|=4$，

因为 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，

又因为 M 是 BC 的中点，

所以 $|\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=2$，故选 C.

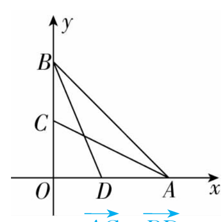
互动课堂

合作探究

探究　向量在平面几何中的应用

【例 1】求等腰直角三角形中两直角边上的中线所成的钝角的余弦值.

【解析】如图，分别以等腰直角三角形的两直角边为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系.

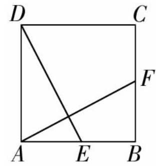


设 $A(2a,0)$，$B(0,2a)$，则 $D(a,0)$，$C(0,a)$，$\overrightarrow{AC}=(-2a,a)$，$\overrightarrow{BD}=(a,-2a)$，

不妨设 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{(-2a,a)\cdot(a,-2a)}{\sqrt{5}a\cdot\sqrt{5}a}=\frac{-4a^2}{5a^2}=-\frac{4}{5}$.

故所求钝角的余弦值为 $-\frac{4}{5}$.

【例 2】如图所示,在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,BC 的中点,求证:$AF\perp DE$.



【证明】方法一:设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,

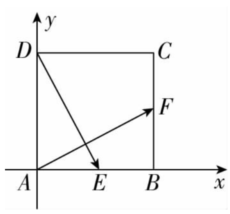
则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

又 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)\cdot\left(-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2=0$.

故 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{DE}$,即 $AF\perp DE$.



方法二:如图,建立平面直角坐标系,设正方形的边长为 2,则 $A(0,0),D(0,2),E(1,0),F(2,1),\overrightarrow{AF}=(2,1),\overrightarrow{DE}=(1,-2)$.

因为 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=(2,1)\cdot(1,-2)=2-2=0$,

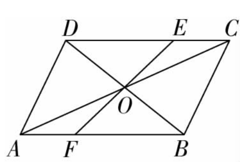
所以 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{DE}$,即 $AF\perp DE$.

点睛 用向量方法证明平面几何问题的两种基本思路.

(1)向量的线性运算法的四个步骤:①选取基底;②用基底表示相关向量;③利用向量的线性运算或数量积找相应关系;④把几何问题向量化.

(2)向量的坐标运算法的四个步骤:①建立适当的平面直角坐标系;②把相关向量坐标化;③用向量的坐标运算找相应关系;④把几何问题向量化.

【变式训练 1】如图,点 O 是平行四边形 $ABCD$ 的中心,E,F 分别在边 CD,AB 上,且 $\frac{CE}{ED}=\frac{AF}{FB}=\frac{1}{2}$.求证:点 E,O,F 在同一直线上.



【证明】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$,

由 $\frac{CE}{ED}=\frac{AF}{FB}=\frac{1}{2}$,知 E,F 分别是 CD,AB 的三等分点,

$\therefore\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{1}{3}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=\frac{1}{6}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$,

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})-\frac{1}{3}\boldsymbol{m}=\frac{1}{6}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$.

$\therefore\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OE}$.

又 O 为 $\overrightarrow{FO}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 的公共点,

$\therefore$点 E,O,F 在同一直线上.

【变式训练 2】在直角梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$\angle CDA=\angle DAB=90°$,$CD=DA=\frac{1}{2}AB$,求证:$AC\perp BC$.

【证明】方法一:$\because\angle CDA=\angle DAB=90°,AB/\!/CD,CD=DA=\frac{1}{2}AB$,

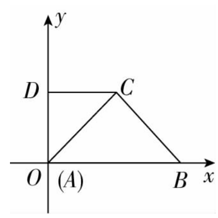
$\therefore$可设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_2$,则 $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|,\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_2$.

$\therefore\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)-2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1^2-\boldsymbol{e}_2^2=|\boldsymbol{e}_1|^2-|\boldsymbol{e}_2|^2=0$,$\therefore\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$,即 $AC\perp BC$.

方法二:如图,建立平面直角坐标系,



设 $CD=1$,则 $A(0,0),B(2,0),C(1,1),D(0,1)$.

$\therefore\overrightarrow{BC}=(-1,1),\overrightarrow{AC}=(1,1)$.

$\therefore\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,1)\cdot(1,1)=-1+1=0$.

$\therefore AC\perp BC$.

随堂小练

1. 已知在 $\triangle ABC$ 中,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,则 $\triangle ABC$ 的形状为 (A)

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 不能确定

2. 在四边形 $ABCD$ 中,若 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{0},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,则四边形 $ABCD$ 为 (D)

A. 平行四边形　　B. 矩形

C. 等腰梯形　　D. 菱形

【解析】$\because \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$,

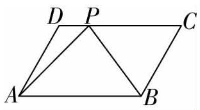
$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,$\therefore$四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又$\because \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,$\therefore \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,

即平行四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直,

$\therefore$平行四边形 $ABCD$ 为菱形.故选 D.

3. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=8$,$AD=5$,$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$ __22__.



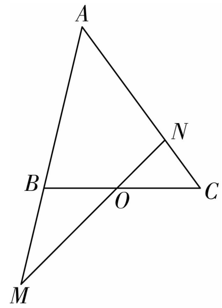
【解析】由 $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,得 $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$,所以 $\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=2$,即 $|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{3}{16}|\overrightarrow{AB}|^2=2$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=22$.

4. 如图所示,在$\triangle ABC$ 中,点 O 是 BC 的中点.过点 O 的直线分别交直线 AB,AC 于不同的两点 M,N,若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,则 $m+n=$ __2__.



【解析】$\because O$ 是 BC 的中点,

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

又$\because \overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$.

又$\because M,O,N$ 三点共线,$\therefore \frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$,则 $m+n=2$.

温馨提示:请自主完成课后作业(十)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时 向量在物理中的应用举例

学习目标	核心素养
1. 通过应用举例，学会用平面向量知识研究物理中的相关问题和生活中的实际问题.（重点） 2. 体验向量在解决物理问题中的工具性作用，增强积极主动的探究意识，培养创新精神.	通过用向量法解决物理问题，培养数学抽象、数学运算和数学建模等素养.

自主预习

情景导思

两个人提一个旅行包，夹角越大越费力. 为什么？

知新预学

向量在物理中的应用：

(1) 物理问题中常见的向量有 力、速度、位移 .

(2) 向量的加减法运算体现在一些物理量的 合成和分解 中.

(3) 动量 mv 是向量的 数乘 运算.

(4) 功是 力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积.

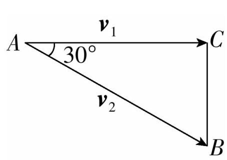
小试牛刀

1. 一只鹰正以与水平方向成 30°角的方向向下飞行，直扑猎物，太阳光从头上直照下来，鹰在地面上的影子的速度是 40 m/s，则鹰的飞行速度为 (C)

A. $\frac{80}{3}$ m/s　　B. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ m/s

C. $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ m/s　　D. $\frac{40}{3}$ m/s

【解析】如图，$|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{v}_1|=40$，且 $\angle CAB=30°$，则 $|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_2|=\frac{80\sqrt{3}}{3}$.



故选 C.

2. 已知作用在点 A 的三个力 $\boldsymbol{F}_1=(3,4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$，且 $A(1,1)$，则合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$ 的终点坐标为 (A)

A. (9,1)　　B. (1,9)

C. (9,0)　　D. (0,9)

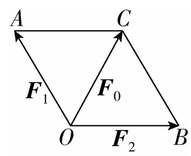
【解析】$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(3,4)+(2,-5)+(3,1)=(8,0)$，设终点为 $B(x,y)$，则 $(x-1,y-1)=(8,0)$，

$\therefore \begin{cases} x-1=8, \\ y-1=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=9, \\ y=1, \end{cases}$

∴终点坐标为 (9,1)，故选 A.

3. 两个大小相等的共点力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，当它们的夹角为 90°时，合力大小为 20 N，则当它们的夹角为 120°时，合力大小为 (B)

A. 40 N　　B. $10\sqrt{2}$ N　　C. $20\sqrt{2}$ N　　D. $10\sqrt{3}$ N



【解析】如图，设合力为 $\boldsymbol{F}_0$，

由平行四边形法则可知，$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=20\cos 45°=10\sqrt{2}$ N，

当 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的夹角为 120°时，由平行四边形法则可知，$|\boldsymbol{F}_0|=|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=10\sqrt{2}$ N，故选 B.

4. 已知船在静水中的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，水流速度为 $\boldsymbol{v}_2$，则船逆水行驶的速度为 (B)

A. $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$　　B. $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$

C. $|\boldsymbol{v}_1|-|\boldsymbol{v}_2|$　　D. $\left|\frac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_2}\right|$

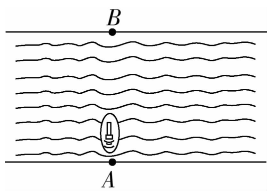
【解析】由题意，根据向量的加法法则，可得逆水行驶的速度为 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，注意速度是有方向和大小的，是一个向量. 故选 B.

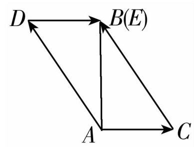
互动课堂

合作探究

探究　向量在物理中的应用

【例 1】如图，一条宽为 $\sqrt{3}$ km 的河，水流速度为 2 km/h，在河两岸有两个码头 A，B，已知 $AB=\sqrt{3}$ km，船在水中最大航速为 4 km/h，问该船从 A 码头怎样行驶可以最快到达 B 码头？用时多久？





【解析】如图所示，设 $\overrightarrow{AC}$ 为水流速度，$\overrightarrow{AD}$ 为航行速度，以 AC 和 AD 为邻边作▱$ACED$ 且当 AE 与 AB 重合时能最快到达彼岸，根据题意 $AC\perp AE$.

在 Rt△ADE 和 ▱$ACED$ 中，

$|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=4$，$\angle AED=90^\circ$，

$\therefore |\overrightarrow{AE}|=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{DE}|^2}=2\sqrt{3}$.

又 $AB=\sqrt{3}$，$\therefore$ 用时 0.5 h.

$\because \sin\angle EAD=\dfrac{1}{2}$，$\angle EAD\in(0^\circ,90^\circ)$，

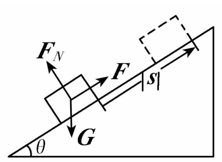
$\therefore \angle EAD=30^\circ$.

答：该船从 A 码头沿与水流成 120° 角方向行驶能最快到达 B 码头，用时 0.5 h.

【例 2】质量 $m=2.0$ kg 的木块，在平行于斜面向上的拉力 $|\boldsymbol{F}|=10$ N 的作用下，沿倾斜角 $\theta=30^\circ$ 的光滑斜面向上滑行 $|\boldsymbol{s}|=2.0$ m 的距离.（$g=9.8$ N/kg）

(1)分别求物体所受各力对物体所做的功；

(2)在这个过程中，物体所受各力对物体做功的代数和是多少？



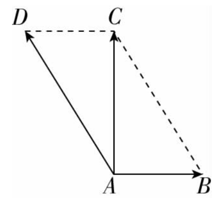
【解析】(1)木块受三个力的作用，重力 $\boldsymbol{G}$、拉力 $\boldsymbol{F}$ 和支持力 $\boldsymbol{F}_N$，如图所示，拉力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 方向相同，所以拉力对木块所做的功为 $W_F=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 0^\circ=20$(J)；支持力 $\boldsymbol{F}_N$ 与位移方向垂直，不做功，所以 $W_{F_N}=\boldsymbol{F}_N\cdot\boldsymbol{s}=0$(J). 重力 $\boldsymbol{G}$ 对物体所做的功为 $W_G=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{G}||\boldsymbol{s}|\cos(\theta+90^\circ)=-19.6$(J).

(2)物体所受各力对物体做功的代数和为 $W=W_F+W_{F_N}+W_G=0.4$(J).

点睛 利用向量法解决物理问题有两种思路，第一种是几何法，选取适当的基底，将题中涉及的向量用基底表示，利用向量运算法则、运算律或性质计算. 第二种是坐标法，通过建立平面直角坐标系，实现向量的坐标化，转化为代数运算.

【变式训练 1】在长江南岸某渡口处，江水以 12.5 km/h 的速度向东流，渡船的速度为 25 km/h. 渡船要垂直地渡过长江，其航向应如何确定？

【解析】如图，设 $\overrightarrow{AB}$ 表示水流的速度，$\overrightarrow{AD}$ 表示渡船的速度，$\overrightarrow{AC}$ 表示渡船实际垂直过江的速度.



$\because \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

在 Rt△ACD 中，$\angle ACD=90^\circ$，

$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AB}|=12.5$，$|\overrightarrow{AD}|=25$，

$\therefore \angle CAD=30^\circ$，即渡船要垂直地渡过长江，其航向应为北偏西 30°.

【变式训练 2】已知两恒力 $\boldsymbol{F}_1=(3,4)$，$\boldsymbol{F}_2=(6,-5)$ 作用于同一质点，使之由点 $A(20,15)$ 移动到点 $B(7,0)$，求 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 分别对质点所做的功.

【解析】设物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下的位移为 $\boldsymbol{s}$，则所做的功为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

$\because \overrightarrow{AB}=(7,0)-(20,15)=(-13,-15)$.

$\therefore W_1=\boldsymbol{F}_1\cdot\overrightarrow{AB}=(3,4)\cdot(-13,-15)=3\times(-13)+4\times(-15)=-99$，

$W_2=\boldsymbol{F}_2\cdot\overrightarrow{AB}=(6,-5)\cdot(-13,-15)=6\times(-13)+(-5)\times(-15)=-3$.

随堂小练

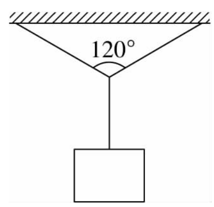
1. 点 P 在平面上做匀速直线运动，速度 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$，设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$，则 5 s 后点 P 的坐标为(速度单位：m/s，长度单位：m)　　　(C)

A. $(-2,4)$　　　B. $(-30,25)$

C. $(10,-5)$　　　D. $(5,-10)$

【解析】5 秒后点 P 的坐标为 $(-10,10)+5(4,-3)=(10,-5)$.

2. 用两条成 120° 角的等长的绳子悬挂一个灯具，如图所示，已知灯具重 10 N，则每根绳子的拉力大小为 __10__ N.



【解析】设重力为 $\boldsymbol{G}$，每根绳子的拉力分别为 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，则由题意得 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 与 $-\boldsymbol{G}$ 都成 60° 角，

且 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$.

$\therefore |\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{G}|=10$ N，

$\therefore$ 每根绳子的拉力都为 10 N.

3. 已知一个物体在大小为 6 N 的力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生的位移 $\boldsymbol{s}$ 的大小为 100 m，且 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 60°，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

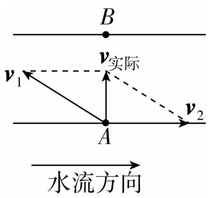
$W=$ <u>300</u> J.

【解析】$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}\rangle$

$=6\times100\times\cos 60^{\circ}=300(\mathrm{J})$.

4. 一条河宽为 800 m，现有一船从 A 处出发垂直到达河正对岸的 B 处，船速为 20 km/h，水速为 12 km/h，则船到达 B 处所需时间为 <u>3</u> min.

【解析】$\because \boldsymbol{v}_{实际}=\boldsymbol{v}_{船}+\boldsymbol{v}_{水}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，



$|\boldsymbol{v}_1|=20$ km/h，$|\boldsymbol{v}_2|=12$ km/h，

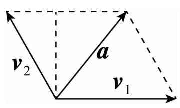
$\therefore |\boldsymbol{v}|=\sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2-|\boldsymbol{v}_2|^2}$

$=\sqrt{20^2-12^2}=16(\mathrm{km/h})$.

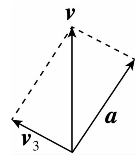
$\therefore$所需时间 $t=\dfrac{0.8}{16}=0.05(\mathrm{h})=3(\mathrm{min})$.

5. 一艘船从南岸出发，向北岸横渡. 根据测量，这一天水流速度为 3 km/h，方向正东，风的方向为北偏西 30°，受风力影响，静水中船的漂行速度为 3 km/h. 若要使该船由南向北沿垂直于河岸的方向以 $2\sqrt{3}$ km/h 的速度横渡，求船本身的速度大小及方向.

【解析】如图①，设水的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，风的速度为 $\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{a}$. 易求得 $\boldsymbol{a}$ 的方向是北偏东 30°，$\boldsymbol{a}$ 的大小是 3 km/h. 如图②，设船的实际航行速度为 $\boldsymbol{v}$，方向由南向北，大小为 $2\sqrt{3}$ km/h，船本身的速度为 $\boldsymbol{v}_3$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}$，即 $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}$，由数形结合知，$\boldsymbol{v}_3$ 的方向是北偏西 60°，大小是 $\sqrt{3}$ km/h.



图①



图②

温馨提示：请自主完成课后作业（十一）

课后作业·单独成册

第 3 课时　余弦定理

学习目标	核心素养
1. 掌握余弦定理的表示形式及证明余弦定理的向量方法,并会运用余弦定理解决两类基本的解三角形问题.(重点) 2. 在方程思想指导下处理三角形问题,通过三角函数、余弦定理、向量的数量积等知识间的关系,来理解事物之间的普遍联系与辩证统一.	1. 通过学习余弦定理及其推论和应用,提高数学抽象和逻辑推理素养. 2. 通过将三角函数、余弦定理、向量的数量积等知识联系起来,提高数学运算与数学建模素养.

自主预习

情景导思

在三角形中,如果已知两边及其夹角,怎么求出此角的对边?如果已知三条边,怎么求出它的三个角呢?

知新预学

1. 余弦定理的表示及其推论

文字语言	三角形中任何一边的__平方__等于其他两边__平方__的__和__减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍
符号语言	$a^2=$__$b^2+c^2-2bc\cos A$__, $b^2=$__$a^2+c^2-2ac\cos B$__, $c^2=$__$a^2+b^2-2ab\cos C$__
推论	$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2. 用余弦定理解三角形的问题

(1)已知两边及夹角解三角形;

(2)已知三边解三角形.

小试牛刀

1. 在$\triangle ABC$中,符合余弦定理的是　　(A)

A. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

B. $c^2=a^2-b^2-2bc\cos A$

C. $b^2=a^2-c^2-2bc\cos A$

D. $\cos C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$

【解析】由余弦定理及其推论知只有 A 正确.

2. 在$\triangle ABC$中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $C=120°$,$c=\sqrt{2}a$,则　　(A)

A. $a>b$　　B. $a<b$

C. $a=b$　　D. a 与 b 的大小关系不确定

【解析】$\because \cos 120°=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-2a^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a<a$. 故选 A.

3. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $a=\sqrt{5}$,$c=2$,$\cos A=\dfrac{2}{3}$,则 $b=$　　(D)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. 3

【解析】由余弦定理,得 $5=b^2+2^2-2\times b\times 2\times\dfrac{2}{3}$,解得 $b=3\left(b=-\dfrac{1}{3}\text{舍去}\right)$,故选 D.

4. 在$\triangle ABC$中,若 $a^2+b^2-c^2=ab$,则角 C 的大小为__$\dfrac{\pi}{3}$__.

【解析】$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$,

又 $C\in(0,\pi)$,$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$.

互动课堂

合作探究

探究 1　已知两边及其夹角解三角形

【例 1】在$\triangle ABC$中,已知 $a=2$,$b=2\sqrt{2}$,$C=15°$,求角 A,B 和边 c 的值.$\left(\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

【解析】由余弦定理知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=4+8-2\times 2\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=8-4\sqrt{3}$,

$\therefore c=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore A=30°$,$B=135°$.

$\therefore c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,$A=30°$,$B=135°$.

点睛 已知三角形的两边及其夹角解三角形的方法:先利用余弦定理求出第三边,再利用余弦定理的推论求出其余角.

【变式训练 1】在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $a=3$,$b=2$,$\cos(A+B)=\frac{1}{3}$,则 $c=$ (D)

A. 4　　B. $\sqrt{15}$

C. 3　　D. $\sqrt{17}$

【解析】由三角形内角和定理可知 $\cos C=-\cos(A+B)=-\frac{1}{3}$,又由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=17$,所以 $c=\sqrt{17}$.

探究 2 已知三边(或三边的关系)解三角形

【例 2】在△ABC 中,已知 $a=2\sqrt{6}$,$b=6+2\sqrt{3}$,$c=4\sqrt{3}$,求角 A,B,C.

【解析】根据余弦定理,可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{(6+2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times(6+2\sqrt{3})\times4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{6}$,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{(2\sqrt{6})^2+(6+2\sqrt{3})^2-(4\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{6}\times(6+2\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because C\in(0,\pi)$,$\therefore C=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore B=\pi-A-C=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{12}\pi$,

$\therefore A=\frac{\pi}{6}$,$B=\frac{7}{12}\pi$,$C=\frac{\pi}{4}$.

点睛 已知三边(或三边的关系)解三角形的方法及注意事项:

(1)利用余弦定理的推论求出相应角的余弦值,值为正,角为锐角;值为 0,角为直角;值为负,角为钝角.

(2)两次运用余弦定理的推论求出两个内角的余弦值,确定两个角,然后求出第三个角.

(3)若已知三角形三边的比例关系,常根据比例的性质引入 k,从而转化为已知三边求解.

【变式训练 2】将例 2 中的条件改为“$a:b:c=2\sqrt{6}:(6+2\sqrt{3}):4\sqrt{3}$”,求角 A,B,C.

【解析】$\because a:b:c=2\sqrt{6}:(6+2\sqrt{3}):4\sqrt{3}$,

即 $\frac{a}{2\sqrt{6}}=\frac{b}{6+2\sqrt{3}}=\frac{c}{4\sqrt{3}}$,

$\therefore$不妨设 $\frac{a}{2\sqrt{6}}=k$,则 $a=2\sqrt{6}k$,$b=(6+2\sqrt{3})k$,$c=4\sqrt{3}k$.

由例 2 的解析易知,$A=\frac{\pi}{6}$,$B=\frac{7}{12}\pi$,$C=\frac{\pi}{4}$.

探究 3 已知两边及其中一边的对角解三角形

【例 3】在△ABC 中,已知角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.若 $a=2\sqrt{3}$,$b=\sqrt{6}$,$A=45°$,求边 c.

【解析】在△ABC 中,根据余弦定理可得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $c^2-2\sqrt{3}c-6=0$,

所以 $c=\sqrt{3}\pm3$.

又 $c>0$,所以 $c=\sqrt{3}+3$.

点睛 已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形的方法:可根据余弦定理列一元二次方程求出第三边(注意边的取舍).

【变式训练 3】已知在△ABC 中,$b=\sqrt{3}$,$c=3$,$B=30°$,解此三角形.

【解析】由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得

$(\sqrt{3})^2=a^2+3^2-2\times a\times3\times\cos 30°$,

$\therefore a^2-3\sqrt{3}a+6=0$,$\therefore a=\sqrt{3}$ 或 $a=2\sqrt{3}$.

当 $a=\sqrt{3}$ 时,$a=b$,$\therefore A=30°$,$\therefore C=120°$;

当 $a=2\sqrt{3}$ 时,由余弦定理得

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$,

$\therefore A=90°$,$C=60°$.

即有 $C=60°$,$A=90°$,$a=2\sqrt{3}$ 或 $C=120°$,$A=30°$,$a=\sqrt{3}$.

探究 4 余弦定理在边角转化中的应用

【例 4】(1)在△ABC 中,角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c,已知 $b\cos C+c\cos B=2b$,则 $\frac{a}{b}=$ __2__.

(2)在△ABC 中,若 $\lg(a+c)+\lg(a-c)=\lg b-\lg\frac{1}{b+c}$,则 $A=$ __120°__.

【解析】(1)由余弦定理得 $b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2a^2}{2a}=a$,

所以 $a=2b$,即 $\frac{a}{b}=2$.

(2)由题意可知 $\lg(a+c)(a-c)=\lg b(b+c)$,

所以 $(a+c)(a-c)=b(b+c)$,即 $b^2+c^2-a^2=-bc$.

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$.

又 $0°<A<180°$,所以 $A=120°$.

点睛 余弦定理在边角转化中的作用:余弦定理指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系,每一个等式中都包含四个不同的量,一般是利用余弦定理及其推论进行边、角互化.

【变式训练 4】(1)在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$,则 $C=$ (B)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

(2)在△ABC 中,$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{2c}$($a$,$b$,$c$ 分别为角 A,B,C 的对边),则△ABC 的形状为 (B)

A. 正三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等腰三角形

【解析】(1)$\because a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$,$\therefore a^2+b^2-c^2=-\sqrt{2}ab$,

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-\sqrt{2}ab}{2ab}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{3\pi}{4}$. 故选 B.

(2) $\because \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{c-b}{2c}$，

$\therefore \cos A=\frac{b}{c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow a^2+b^2=c^2$，符合勾股定理.

故$\triangle ABC$为直角三角形. 故选 B.

随堂小练

1. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c. 若$a=1$，$c=2$，$\cos B=\frac{1}{2}$，则$b=$ （ B ）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. 3

【解析】由余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，所以$b=\sqrt{3}$，故选 B.

2. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c. 若$(a^2-b^2+c^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，则$B=$ （ D ）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

【解析】$\because (a^2-b^2+c^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，$\therefore \frac{a^2+c^2-b^2}{ac}=\frac{\sqrt{3}}{\tan B}$.

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}$，$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B\in(0,\pi)$.

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$或$B=\frac{2\pi}{3}$. 故选 D.

3. 边长分别为$1,\sqrt{5},2\sqrt{2}$的三角形的最大角与最小角的和是 （ C ）

A. 90°　　B. 120°

C. 135°　　D. 150°

【解析】由题意可得，边长为$\sqrt{5}$的边对的角不是最大角，也不是最小角，设此角为θ，则由余弦定理可得$\cos\theta=\frac{1+8-5}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \theta=45^\circ$，故三角形的最大角与最小角的和是$180^\circ-45^\circ=135^\circ$，故选 C.

4. 在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，$A=30^\circ$，则$AC=$__1 或 2__.

【解析】由余弦定理得$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos30^\circ$，即$1=AC^2+3-2\sqrt{3}AC\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$AC=1$或$AC=2$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十二）

课后作业 · 单独成册

第 4 课时 正弦定理

学习目标	核心素养
1. 通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理，并能解决一些简单的问题.(重点) 2. 通过对特殊三角形边角间数量关系的研究，发现正弦定理，初步学会运用由特殊到一般的思想方法发现数学规律. 3. 通过参与、思考、交流，体验正弦定理的发现过程，逐步培养探索精神和创新意识；通过对正弦函数的学习体会数学的对称美、和谐美.	通过学习正弦定理及其变形、三角形面积公式以及用正弦定理及其变形解决相关问题，提高数学抽象与逻辑推理素养.

自主预习

情景导思

在初中，我们学习过解直角三角形的问题，但现实生活中，解一般三角形的问题很多. 在任意三角形中，角与边之间是否存在定量关系？怎样得到这个边角关系准确量化的表示呢？

知新预学

1. 正弦定理

在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

2. 正弦定理的变形

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，三角形外接圆的半径为 R，则有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

(1)$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；

(2)$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

(3)$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$；

(4)$a\sin B=b\sin A$，$b\sin C=c\sin B$，$a\sin C=c\sin A$；

(5)$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

3. 用正弦定理解三角形

(1)已知三角形的两角及任一边，求其他两边和一角；

(2)已知三角形的两边和其中一边的对角，求另一边的对角，从而进一步求出其他的边和角.

4. 三角形的面积公式

(1)$S=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$(h_a 表示 a 边上的高)；

(2)$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

小试牛刀

1. 在△ABC 中，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，下列等式中总能成立的是 (D)

A. $a\sin A=b\sin B$　　B. $b\sin C=c\sin A$

C. $ab\sin C=bc\sin B$　　D. $a\sin C=c\sin A$

【解析】由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $a\sin C=c\sin A$.

2. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 若 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}$，则△$ABC$ 是 (C)

A. 等边三角形

B. 直角三角形，且有一个角是 30°

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形，且有一个角是 30°

【解析】由题意得 $a\cos B=b\sin A$，

又 $a\sin B=b\sin A$，∴$\sin B=\cos B$，

又 $B\in(0°,180°)$，∴$B=45°$.

同理 $C=45°$. 故△ABC 为等腰直角三角形. 选 C.

3. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $B=30°$，$c=150$，$b=50\sqrt{3}$，则△ABC 的形状是__等腰或直角__三角形.

【解析】由 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{150\times\frac{1}{2}}{50\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又∵$C\in(0°,180°)$，∴$C=60°$ 或 $C=120°$，

∴$A=90°$ 或 $A=30°$，∴△ABC 为等腰三角形或直角三角形.

互动课堂

合作探究

探究 1 对正弦定理的理解

【例 1】在△ABC 中，若角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，则下列关于正弦定理的叙述或变形中错误的是 (B)

A. $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

B. $a=b\Leftrightarrow\sin 2A=\sin 2B$

C. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$

D. 正弦值较大的角所对的边也较大

【解析】在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k(k>0)$，则$a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$，故$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$，故A正确.

当$A=30°$，$B=60°$时，$\sin 2A=\sin 2B$，此时$a\neq b$，故B错误.

根据比例式的性质易得C正确.

大边对大角，D正确. 故选B.

点睛 如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，那么$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$.

【变式训练1】在$\triangle ABC$中，下列关系式一定成立的是 （ D ）

A. $a>b\sin A$ B. $a=b\sin A$

C. $a<b\sin A$ D. $a\geqslant b\sin A$

【解析】在$\triangle ABC$中，$B\in(0,\pi)$，$\therefore\sin B\in(0,1]$，$\therefore\frac{1}{\sin B}\geqslant 1$，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$a=\frac{b\sin A}{\sin B}\geqslant b\sin A$. 故选D.

探究2 用正弦定理解三角形

【例2】(1)在$\triangle ABC$中，已知$c=10$，$A=45°$，$C=30°$，解这个三角形.

(2)在$\triangle ABC$中，已知$c=\sqrt{6}$，$A=45°$，$a=2$，解这个三角形.

【解析】(1)$\because A=45°$，$C=30°$，$\therefore B=180°-(A+C)=105°$，

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{10\times\sin 45°}{\sin 30°}=10\sqrt{2}$.

$\because\sin 75°=\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{c\sin(A+C)}{\sin C}=\frac{10\times\sin 75°}{\sin 30°}=20\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=5\sqrt{2}+5\sqrt{6}$.

$\therefore B=105°$，$a=10\sqrt{2}$，$b=5\sqrt{2}+5\sqrt{6}$.

(2)$\because\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\times\sin 45°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because C\in(0°,180°)$，$\therefore C=60°$或$C=120°$.

当$C=60°$时，$B=75°$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 75°}{\sin 60°}=\sqrt{3}+1$；

当$C=120°$时，$B=15°$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 15°}{\sin 120°}=\sqrt{3}-1$.

$\therefore b=\sqrt{3}+1$，$B=75°$，$C=60°$或$b=\sqrt{3}-1$，$B=15°$，$C=120°$.

点睛 1. 已知三角形的任意两个角与一边解三角形时，由三角形内角和定理可以计算出三角形的另一角，由正弦定理可计算出三角形的另两边.

2. 已知三角形两边和其中一边的对角，首先用正弦定理求出另一边所对的角的正弦值，若这个角不是直角，则利用三角形中大边对大角看能否判断所求这个角是锐角，当已知的角为大边所对的角时，则能判断另一边所对的角为锐角，当已知的角为小边所对的角时，则不能判断，此时就有两组解，再分别求解即可；然后由三角形内角和定理求出第三个角；最后根据正弦定理求出第三条边.

【变式训练2】(1)$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c. 若$\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，$a=1$，则$b=$ $\underline{\frac{21}{13}}$.

(2)已知在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$A=30°$，则$C=$ $\underline{105°或15°}$.

【解析】(1)在$\triangle ABC$中，由$\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，可得$\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin C=\frac{12}{13}$，$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{63}{65}$，由正弦定理得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{21}{13}$.

(2)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sin 30°}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because B\in(0°,180°)$，$\therefore B=45°$或$B=135°$，

$\therefore C=180°-45°-30°=105°$或$C=180°-135°-30°=15°$.

探究3 判断三角形的形状

【例3】已知在$\triangle ABC$中，$a^2\tan B=b^2\tan A$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【解析】由已知得$\frac{a^2\sin B}{\cos B}=\frac{b^2\sin A}{\cos A}$，

由正弦定理得$\frac{\sin^2 A\sin B}{\cos B}=\frac{\sin^2 B\sin A}{\cos A}$.

$\because\sin A$，$\sin B\neq 0$，$\therefore\sin A\cos A=\sin B\cos B$.

即$\sin 2A=\sin 2B$.

$\therefore 2A+2B=\pi$或$2A=2B$.

$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$或$A=B$.

$\therefore\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

点睛 1. 判断三角形的形状，应围绕三角形的边角关系进行，既可以转化为边与边的关系，也可以转化为角与角的关系.

2. 注意在边角互化过程中，正弦定理的变形使用，如$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$等.

【变式训练3】已知在$\triangle ABC$中，$b\sin B=c\sin C$且$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【解析】由$b\sin B=c\sin C$，得$b^2=c^2$，

$\therefore b=c$，$\therefore\triangle ABC$为等腰三角形，

由 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$ 得 $a^2=b^2+c^2$，

∴$\triangle ABC$ 为直角三角形，

∴$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

探究 4 与三角形面积有关的问题

【例 4】在$\triangle ABC$ 中，已知 $B=30°$，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求$\triangle ABC$ 的面积.

【解析】由正弦定理，得 $\sin C=\frac{AB\cdot\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $AB\cdot\sin B<AC<AB$，故该三角形有两解：$C=60°$或$C=120°$.

当 $C=60°$时，$A=90°$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=2\sqrt{3}$；

当 $C=120°$时，$A=30°$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\sqrt{3}$.

∴$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ 或$\sqrt{3}$.

点睛 三角形面积公式的应用技巧.

(1)求三角形面积时，应先根据题目给出的已知条件选择最简便、最快捷的计算方法，这样不仅能减少一些不必要的计算，还能使计算结果更加接近真实值.

(2)事实上，在众多公式中，最常用的公式是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$，即给出三角形的两边和夹角(其中某边或角需求解)求三角形面积，反过来，给出三角形的面积利用上述公式也可求得相应的边或角，应熟练应用此公式.

【变式训练 4】(1)已知$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{3}{2}$，且 $b=2$，$c=\sqrt{3}$，则 A 的大小为 (A)

A. 60°或 120° B. 60°

C. 120° D. 30°或 150°

(2)在钝角$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=1$，$A=30°$，$c=\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$ 的面积为 $\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

【解析】(1)由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ 得 $\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\sin A$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故 $A=60°$或 $A=120°$，故选 A.

(2)在钝角$\triangle ABC$ 中，由 $a=1$，$A=30°$，$c=\sqrt{3}$，利用正弦定理可知 $C=120°$，得到 $B=30°$，利用面积公式得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

随堂小练

1. 在$\triangle ABC$ 中，$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$B=45°$，则 $A=$ (C)

A. 30°或 150° B. 60°

C. 60°或 120° D. 30°

【解析】根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

可得$\frac{2\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故可得 A 为 60°或 120°.

又 $a>b$，则 $A>B$，显然两个结果都满足题意. 故选 C.

2. 在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $A=105°$，$C=45°$，$c=\sqrt{2}$，则 $b=$ (A)

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【解析】∵在$\triangle ABC$ 中，$A=105°$，$C=45°$，

∴$B=180°-A-B=180°-105°-45°=30°$，

再由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得$\frac{b}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45°}$，

解得 $b=1$. 故选 A.

3. 在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，若 $A:B:C=1:2:3$，则 $a:b:c=$ (D)

A. $1:2:3$ B. $2:3:4$

C. $3:4:5$ D. $1:\sqrt{3}:2$

【解析】由题可得 $A=30°$，$B=60°$，$C=90°$，由正弦定理得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$，故选 D.

4. 在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，则$\triangle ABC$ 的形状为 (B)

A. 锐角三角形 B. 直角三角形

C. 钝角三角形 D. 不确定

【解析】因为 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，

所以由正弦定理可得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin^2A$，

即 $\sin(B+C)=\sin^2A\Rightarrow\sin A=\sin^2A$，

所以 $\sin A=1$，$A=\frac{\pi}{2}$，所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

5. 在$\triangle ABC$ 中，若 $b=5$，$B=\frac{\pi}{4}$，$\tan A=2$，则 $\sin A=\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$，$a=\underline{2\sqrt{10}}$.

【解析】由 $\tan A=2$，得 $\sin A=2\cos A$，

由 $\sin^2A+\cos^2A=1$，得 $\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由 $b=5$，$B=\frac{\pi}{4}$及正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十三)

课后作业 · 单独成册

第 5 课时　余弦定理、正弦定理应用举例

学习目标	核心素养
1. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些有关测量距离的实际问题，了解常用的测量相关术语.（重点） 2. 激发学习数学的兴趣，并体会数学的应用价值；同时培养运用图形、数学符号表达题意和应用转化思想解决数学问题的能力.	1. 通过分清已知条件与所求，逐步求解问题的答案，可以提高数学抽象与逻辑推理素养. 2. 利用数形结合从实际问题中抽象出一个或几个三角形，然后通过解这些三角形，得到所求的量，从而得到实际问题的解，可以提高逻辑推理与数学建模素养.

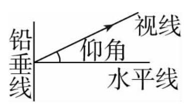
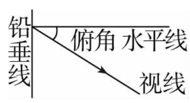
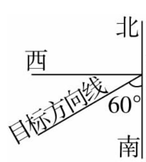
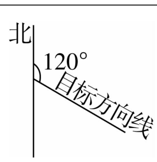
自主预习

情景导思

对于未知的距离、高度等，存在着许多可供选择的测量方案，比如要求两个不可到达的点之间的距离，我们可以将此问题转化为求三角形的边长，根据已知的边长和角度，利用正弦定理和余弦定理求解.

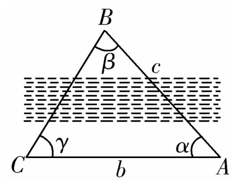
知新预学

实际测量中的有关名称、术语

名称	定义	图示
基线	在测量中，根据测量需要确定的线段叫做基线	
仰角	在同一铅垂平面内，视线在水平线<u>　上　</u>方时与水平线的夹角	
俯角	在同一铅垂平面内，视线在水平线下方时与水平线的夹角	
方向角	从指定方向线到<u>目标方向线</u>的水平角（指定方向线是指正北或正南或正东或正西，方向角小于 90°）	
方位角	从正北的方向线按<u>　顺　</u>时针到目标方向线所转过的水平角	

小试牛刀

1. 为了测量 B,C 之间的距离，在河岸 A,C 处测量，如图，测得下面四组数据，较合理的是　（ D ）



A. c 与 α

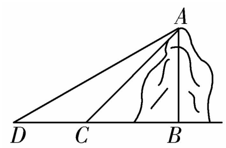
B. c 与 b

C. b,c 与 β

D. b,α 与 γ

【解析】∵A,C 在河岸的同一侧，∴可以测量 AC 的长度和 $\angle BAC$，$\angle BCA$ 的大小，并用正弦定理求 BC. 故选 D.

2. 如图所示，从山顶望地面上 C,D 两点，测得它们的俯角分别为 45°和 30°，已知 $CD=100$ m，点 C 位于 BD 上，则山高 $AB=$　（ D ）



A. 100 m

B. $50\sqrt{3}$ m

C. $50\sqrt{2}$ m

D. $50(\sqrt{3}+1)$ m

【解析】设山高为 h，则由题意知 $CB=h$，$DB=\sqrt{3}h$，

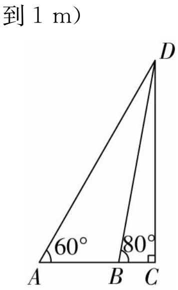
∴$\sqrt{3}h-h=100$，即 $h=50(\sqrt{3}+1)$m. 故选 D.

互动课堂

合作探究

探究 1　测量高度问题

【例 1】济南泉城广场上的泉标是具有篆书神韵的“泉”字，其造型流畅别致，成了济南的标志和象征. 李明同学想测量泉标的高度，于是他在广场的 A 点测得泉标顶端的仰角为 60°，他又沿着泉标底部方向前进 15.2 m，到达 B 点，测得泉标顶部仰角为 80°. 你能帮李明同学求出泉标的高度吗？（$\sqrt{3}\approx1.732\ 1$，$\sin 20°\approx0.342\ 0$；$\sin 80°\approx0.984\ 8$，结果精确到 1 m）



【解析】如图所示，点 C,D 分别为泉标的底部和顶端.

依题意得，$AB=15.2$ m，$\angle BAD=60°$，$\angle CBD=80°$，

则 $\angle ABD=100°$，

故 $\angle ADB=180°-(60°+100°)=20°$.

在 $\triangle ABD$ 中，根据正弦定理，

得$\dfrac{BD}{\sin 60^\circ}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$.

$\therefore BD=\dfrac{AB\cdot\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{15.2\cdot\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}\approx 38.5(\text{m})$.

在 Rt△BCD 中,$CD=BD\sin 80^\circ=38.5\cdot\sin 80^\circ\approx 38(\text{m})$,即泉城广场上泉标的高度约为 38 m.

点睛 测量高度的技巧:

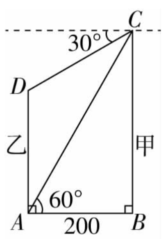
(1)在测量高度时,要理解仰角、俯角的概念,仰角和俯角都是在同一铅垂面内,视线与水平线的夹角;

(2)准确理解题意,分清已知条件与所求,画出示意图;

(3)运用正、余弦定理,有序地解相关的三角形,逐步求解问题的答案,注意方程思想的运用.

【变式训练 1】甲、乙两楼相距 200 m,从乙楼底望甲楼顶的仰角为 60°,从甲楼顶望乙楼顶的俯角为 30°,则甲、乙两楼的高分别是多少?

【解析】如图所示,AD 为乙楼高,BC 为甲楼高.



在△ABC 中,$BC=200\times\tan 60^\circ=200\sqrt{3}$,

$AC=200\div\sin 30^\circ=400$,

由题意可知$\angle ACD=\angle DAC=30^\circ$,

$\therefore$△ACD 为等腰三角形.

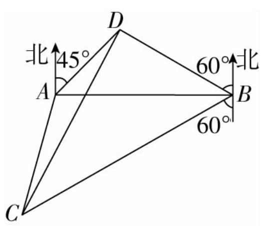
由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos 120^\circ$,

即 $400^2=AD^2+AD^2-2AD^2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3AD^2$,$AD^2=\dfrac{400^2}{3}$,

$AD=\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$. 故甲楼高为 $200\sqrt{3}$ m,乙楼高为$\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$ m.

探究 2 测量角度问题

【例 2】如图所示,A,B 是海面上位于东西方向相距 $5(3+\sqrt{3})$n mile 的两个观测点. 现位于 A 点北偏东 45°方向、B 点北偏西 60°方向的 D 点有一艘轮船发出求救信号,位于 B 点南偏西 60°且与 B 点相距 $20\sqrt{3}$ n mile 的 C 点的救援船立即前往营救,其航行速度为 30 n mile/h,则该救援船到达 D 点需要多长时间?



【解析】由题意知,$AB=5(3+\sqrt{3})$n mile,

$\angle DBA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$,$\angle DAB=90^\circ-45^\circ=45^\circ$,

$\therefore\angle ADB=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$.

在△DAB 中,由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin\angle DAB}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$,

即 $BD=\dfrac{AB\sin\angle DAB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{5(3+\sqrt{3})\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}$

$=\dfrac{5(3+\sqrt{3})\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ}=10\sqrt{3}(\text{n mile})$.

又$\angle DBC=\angle DBA+\angle ABC=60^\circ$,$BC=20\sqrt{3}$ n mile,

$\therefore$在△DBC 中,由余弦定理,得

$CD=\sqrt{BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos\angle DBC}$

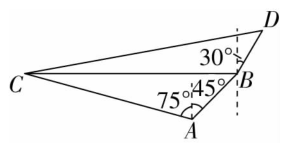
$=\sqrt{300+1\,200-2\times 10\sqrt{3}\times 20\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}}=30(\text{n mile})$,

则救援船到达 D 点需要的时间为$\dfrac{30}{30}=1$ h.

点睛 测量角度的技巧:测量角度问题的关键是根据题意和图形及有关概念,确定所求的角在哪个三角形中,该三角形中已知哪些量,需要求哪些量. 通常是根据题意,从实际问题中抽象出一个或几个三角形,然后通过解这些三角形,得到所求的量,从而得到实际问题的解.

【变式训练 2】在海岸 A 处,发现北偏东 45°方向,距离 A 处$(\sqrt{3}-1)$n mile 的 B 处有一艘走私船,在 A 处北偏西 75°的方向,距离 A 处 2 n mile 的 C 处的缉私船奉命以 $10\sqrt{3}$ n mile/h 的速度追截走私船. 此时,走私船正以 10 n mile/h 的速度从 B 处向北偏东 30°方向逃窜,问缉私船沿什么方向能最快追上走私船?

【解析】设缉私船用 t h 在 D 处追上走私船,画出示意图,则有 $CD=10\sqrt{3}t$,$BD=10t$,



在△ABC 中,$AB=\sqrt{3}-1$,$AC=2$,$\angle BAC=120^\circ$,

由余弦定理,得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$

$=(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2\cdot\cos 120^\circ=6$,

$\therefore BC=\sqrt{6}$,且 $\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{BC}\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\angle ABC=45^\circ$,$\therefore BC$ 与正北方向成 90°角.

$\therefore\angle CBD=90^\circ+30^\circ=120^\circ$,

在△BCD 中,由正弦定理,得

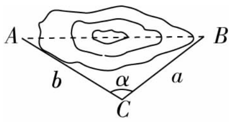
$\sin\angle BCD=\dfrac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\dfrac{10t\sin 120^\circ}{10\sqrt{3}t}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\angle BCD=30^\circ$,即缉私船沿北偏东 60°方向能最快追上走私船.

探究 3 测量距离问题

【例 3】如图所示,要测量一水塘两侧 A,B 两点间的距离,先选定适当的位置 C,用经纬仪测出角 α,再分别测出 AC,BC

的长b,a,则可求出A,B两点间的距离.若测得$CA=400$ m,$CB=600$ m,$\angle ACB=60°$,试计算AB的长.



【解析】在$\triangle ABC$中,由余弦定理得

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB$,

$\therefore AB^2=400^2+600^2-2\times400\times600\cos 60°=280\ 000$.

$\therefore AB=200\sqrt{7}$(m).

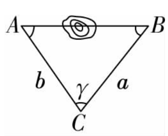
即A,B两点间的距离为$200\sqrt{7}$ m.

点睛 测量距离的技巧:当A,B两点之间的距离不能直接测量时,求AB的距离的方法分为以下三类.

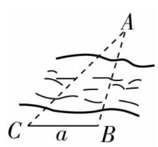
(1)两点间不可通又不可视(如图①):可取某点C,使得A,B与C之间的距离可直接测量,测出$AC=b$,$BC=a$以及$\angle ACB=\gamma$,利用余弦定理得$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$.

(2)两点间可视但不可到达(如图②):可选取与B同侧的点C,测出$BC=a$以及$\angle ABC$和$\angle ACB$,先使用内角和定理求出$\angle BAC$,再利用正弦定理求出AB.

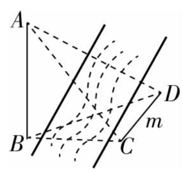
(3)两点都不可到达(如图③):在河边测量对岸两个建筑物之间的距离,可先在一侧选取两点C,D,测出$CD=m$,$\angle ACB$,$\angle BCD$,$\angle ADC$,$\angle ADB$,再在$\triangle BCD$中求出BC,在$\triangle ADC$中求出AC,最后在$\triangle ABC$中,由余弦定理求出AB.



图①

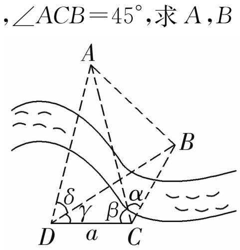


图②



图③

【变式训练3】如图,A,B两点在河的同侧,且A,B两点均不可到达,要测出A,B的距离,测量者可以在河岸另一侧选定两点C,D,测得$CD=a$,同时在C,D两点分别测得$\angle ACB=\alpha$,$\angle ACD=\beta$,$\angle CDB=\gamma$,$\angle ADB=\delta$.在$\triangle ADC$和$\triangle BDC$中,由正弦定理分别计算出AC和BC,再在$\triangle ABC$中,应用余弦定理计算出AB.若测得$CD=2$ km,$\angle ADB=45°$,$\angle CDB=30°$,$\angle ACD=75°$,$\angle ACB=45°$,求A,B两点间的距离.



【解析】$\because\angle ADC=\angle ADB+\angle CDB=75°$,$\angle ACD=75°$,

$\therefore\angle DAC=30°$,由正弦定理,

得$AC=\dfrac{DC\cdot\sin\angle ADC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{2\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{2}}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})$km,

在$\triangle BCD$中,$\angle DBC=180°-\angle ACB-\angle ACD-\angle CDB=30°$,$\therefore\angle CDB=\angle CBD$,

$\therefore BC=CD=2$(km).

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos 45°=8+4\sqrt{3}+4-2\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=8$.

$\therefore AB=2\sqrt{2}$(km).

即A,B两点间的距离为$2\sqrt{2}$ km.

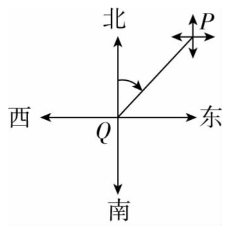
随堂小练

1. 若点P在点Q的北偏东$44°50'$方向上,则点Q在点P的 (C)

A. 东偏北$45°10'$方向上 B. 北偏东$45°50'$方向上

C. 南偏西$44°50'$方向上 D. 西偏南$44°50'$方向上

【解析】如图所示,点Q在点P的南偏西$44°50'$方向上.故选C.

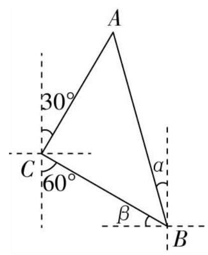


2. 若点A在点C的北偏东$30°$方向上,点B在点C的南偏东$60°$方向上,且$AC=BC$,则点A在点B的 (B)

A. 北偏东$15°$方向上 B. 北偏西$15°$方向上

C. 北偏东$10°$方向上 D. 北偏西$10°$方向上

【解析】如图所示,$\angle ACB=90°$.又$\because AC=BC$,$\therefore\angle CBA=45°$.$\because\beta=30°$,$\therefore\alpha=90°-45°-30°=15°$.$\therefore$点$A$在点$B$的北偏西$15°$方向上.故选B.



3. 在200 m高的山顶上,测得山下一塔的塔顶A与塔底B的俯角分别是$30°$,$60°$,则塔高$AB=$ (C)

A. 200 m B. $\dfrac{200}{3}$ m

C. $\dfrac{400}{3}$ m D. 100 m

【解析】设$AB=x$,则$(200-x)\tan 60°=200\tan 30°$,

解得$x=\dfrac{400}{3}$.故选C.

4. 一轮船从A处出发,以每小时40 n mile的速度沿南偏东$40°$的方向直线航行,30 min后到达B处.在C处有一座灯塔,轮船在A处观察灯塔,其方向是南偏东$70°$,在B处观察灯塔,其方向是北偏东$65°$,那么B,C两点间的距离是 (B)

A. $10\sqrt{3}$ n mile B. $10\sqrt{2}$ n mile

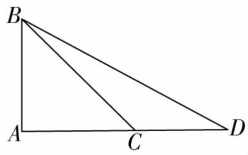
C. $20\sqrt{3}$ n mile D. $20\sqrt{2}$ n mile

【解析】根据已知条件可知，$\triangle ABC$ 中，$AB=20$，$\angle BAC=30°$，$\angle ABC=105°$，所以 $\angle BCA=45°$，

由正弦定理，有 $\dfrac{BC}{\sin 30°}=\dfrac{20}{\sin 45°}$，所以 $BC=\dfrac{20\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10\sqrt{2}$.

故选 B.

5. 如图，为测塔 AB 的高度，某人在与塔底 A 同一水平线上的 C 点测得 $\angle ACB=45°$，再沿 AC 方向前行 $20(\sqrt{3}-1)$ m 到达 D 点，测得 $\angle ADB=30°$，则塔高 AB 为　　(D)



A. $40\sqrt{3}$ m　　B. $20\sqrt{3}$ m

C. 40 m　　D. 20 m

【解析】在 $Rt\triangle ABC$ 中，设 $AB=x$，则由 $\angle ACB=45°$ 可知 $AC=x$，在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AD=x+20(\sqrt{3}-1)$，$\angle ADB=30°$，所以 $\dfrac{x}{x+20(\sqrt{3}-1)}=\tan 30°$，即 $\dfrac{x+20(\sqrt{3}-1)}{x}=\sqrt{3}$，解得 $x=20$，即塔高为 20 m.

故选 D.

温馨提示：请自主完成课后作业(十四)

课后作业·单独成册

三、知能拓展

平面向量及其应用复习

核心梳理

1. 五种常见的向量

(1)单位向量:模为 1 的向量.

(2)零向量:模为 0 的向量.

(3)平行(共线)向量:方向相同或相反的非零向量.

(4)相等向量:模相等,方向相同的向量.

(5)相反向量:模相等,方向相反的向量.

2. 两个重要定理

(1)向量共线定理:向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是:存在唯一一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(2)平面向量基本定理:如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一个平面内的两个不共线向量,那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$,有且只有一对实数 λ_1,λ_2,使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 其中,$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$是表示这一平面内所有向量的一个基底.

3. 两个非零向量平行、垂直的等价条件

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\neq0)\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

4. 平面向量的三个性质

(1)若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2)若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(3)若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

5. 向量的运算律

(1)交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2)结合律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

(3)分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(4)重要公式:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$,$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

6. 余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

7. 正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

8. 正弦定理、余弦定理的实际应用

正弦定理、余弦定理在实际生产生活中有着非常广泛的应用. 常见题涉及距离问题、高度问题、角度问题以及求平面图形的面积问题等. 解决这些问题时,首先要认真分析题意,找出各量之间的关系,根据题意画出示意图,将要求的问题抽象为三角形模型,然后利用正弦定理、余弦定理求解,最后将结果还原为实际问题,可用框图表示如下:

$\boxed{\text{实际问题}}\xrightarrow[\text{概括}]{\text{抽象}}\boxed{\text{解三角形问题}}\xrightarrow[\text{演算}]{\text{推理}}\boxed{\text{三角形问题的解}}\xrightarrow[\text{说明}]{\text{还原}}\boxed{\text{实际问题的解}}$

重难突破

要点 1 向量的共线问题

证明向量平行(共线)常用的方法有:

(1)向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$与 $\boldsymbol{b}$共线$\Leftrightarrow$存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$;

(2)向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$与 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$共线$\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$;

(3)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线$\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;

(4)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数 λ_1,λ_2,使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

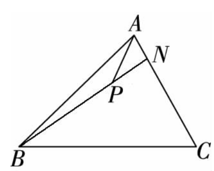
【例 1】设坐标平面上有三点 A,B,C,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别是坐标平面上 x 轴、y 轴正方向的单位向量. 若向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}$,那么是否存在实数 m,使 A,B,C 三点共线?

【解析】方法一:假设满足条件的 m 存在,$\because A,B,C$ 三点共线,即 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$,$\therefore$存在实数 λ,使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$,即 $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}=\lambda(\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j})$,$\therefore\begin{cases}\lambda=1,\\\lambda m=-2,\end{cases}$ $\therefore m=-2$,即当 $m=-2$ 时,A,B,C 三点共线.

方法二:假设满足条件的 m 存在,根据题意可知 $\boldsymbol{i}=(1,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1)$,$\therefore\overrightarrow{AB}=(1,0)-2(0,1)=(1,-2)$,$\overrightarrow{BC}=(1,0)+m(0,1)=(1,m)$,$\because A,B,C$ 三点共线,即 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$,$\therefore 1\cdot m-1\cdot(-2)=0$,解得 $m=-2$,$\therefore$当 $m=-2$ 时,A,B,C 三点共线.

点睛 证明两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,只需证明 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$,这就要求选用同一基底来表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$.

【变式训练 1】如图所示,在$\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{NC}$,$P$ 是 BN 上的一点. 若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{11}\overrightarrow{AC}$,则实数 $m=$ $\underline{\dfrac{3}{11}}$.



【解析】由已知得 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{11}\overrightarrow{AC}$

$=(m-1)\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{11}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

$\because\overrightarrow{BP}$ 与 $\overrightarrow{BN}$ 共线，$\therefore\frac{1}{4}(m-1)+\frac{2}{11}=0$，$\therefore m=\frac{3}{11}$.

要点 2 向量的夹角及垂直问题

1. 求两个向量的夹角主要利用两个公式：

(1)$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，求解的前提是求出这两个向量的数量积和模；

(2)$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$，求解的前提是求出这两个向量的坐标.

2. 解决垂直问题，其关键在于将问题转化为判断它们的数量积是否为零. 与求夹角一样，若向量能用坐标表示，将它转化为“$x_1x_2+y_1y_2=0$”较为简单.

3. 用向量方法解决平面几何中的夹角与垂直问题的关键在于：选用适当向量作为基底，把所要研究的问题转化为两向量的夹角与垂直问题，再利用向量知识求角.

【例 2】已知点 $A(2,1)$，$B(3,2)$，$D(-1,4)$.

(1)求证：$AB\perp AD$.

(2)若四边形 $ABCD$ 为矩形，求点 C 的坐标以及矩形 $ABCD$ 两条对角线所夹锐角的余弦值.

【解析】(1)证明：$\because A(2,1)$，$B(3,2)$，$D(-1,4)$，

$\therefore\overrightarrow{AB}=(1,1)$，$\overrightarrow{AD}=(-3,3)$.

$\because\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times(-3)+1\times3=0$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，即 $AB\perp AD$.

(2)$\because\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

设点 C 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{DC}=(x+1,y-4)$，

$\therefore\begin{cases}x+1=1,\\y-4=1.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=5.\end{cases}$$\therefore$点 C 的坐标为 $(0,5)$.

从而 $\overrightarrow{AC}=(-2,4)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$，

$\therefore|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{5}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=8+8=16$，

设 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 的夹角为 θ，

则 $|\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$.

$\therefore$矩形 $ABCD$ 的两条对角线所夹锐角的余弦值为 $\frac{4}{5}$.

点睛 向量的数量积中蕴含了向量的夹角，向量数量积的几何意义，其中也包含向量位置关系等丰富的信息，解题时要注意如何挖掘这些信息.

【变式训练 2】已知 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA}=(3\sin\alpha,\cos\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(2\sin\alpha,5\sin\alpha-4\cos\alpha)$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则 $\tan\alpha=$ (A)

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{3}{4}$

【解析】由题意知 $6\sin^2\alpha+\cos\alpha\cdot(5\sin\alpha-4\cos\alpha)=0$，即 $6\sin^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha=0$，上述等式两边同时除以 $\cos^2\alpha$，得 $6\tan^2\alpha+5\tan\alpha-4=0$，由于 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，所以 $\tan\alpha<0$，解得 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，故选 A.

要点 3 向量的长度(模)与距离的问题

向量的模不仅是研究向量的一个重要量，而且是利用向量的方法解决几何问题的一个交汇点. 一般地，求向量的模主要利用公式 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$，将它转化为向量的数量积问题，再利用数量积的运算律和运算性质进行展开、合并，使问题得以解决，或利用公式 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$，将它转化为实数问题，使问题得以解决.

【例 3】设 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，求 $|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值.

【解析】方法一：$\because|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，

$\therefore 9\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=9$.

又$\because|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}$.

$\therefore|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=9\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

$=9+6\times\frac{1}{3}+1=12$.

$\therefore|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$.

方法二：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$.

$\because|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\therefore x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=1$.

$\because 3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3x_1-2x_2,3y_1-2y_2)$，

$\therefore|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3x_1-2x_2)^2+(3y_1-2y_2)^2}=3$.

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{3}$.

$\therefore|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3x_1+x_2)^2+(3y_1+y_2)^2}$

$=\sqrt{9+1+6\times\frac{1}{3}}=2\sqrt{3}$.

点睛 向量的模的问题实质是实数与向量知识交汇的桥梁，合理运用模的平方与向量平方相等的关系求解问题.

【变式训练 3】设 $0<|\boldsymbol{a}|\leqslant2$，$f(x)=\cos^2x-|\boldsymbol{a}|\sin x-|\boldsymbol{b}|$ 的最大值为 0，最小值为 -4，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $45°$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值.

【解析】$f(x)=1-\sin^2x-|\boldsymbol{a}|\sin x-|\boldsymbol{b}|$

$=-\left(\sin x+\frac{|\boldsymbol{a}|}{2}\right)^2+\frac{|\boldsymbol{a}|^2}{4}-|\boldsymbol{b}|+1$.

$\because 0<|\boldsymbol{a}|\leqslant2$，$\therefore$当 $\sin x=-\frac{|\boldsymbol{a}|}{2}$ 时，$\frac{|\boldsymbol{a}|^2}{4}-|\boldsymbol{b}|+1=0$；

当 $\sin x=1$ 时，$-|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=-4$.

由$\begin{cases}\frac{|\boldsymbol{a}|^2}{4}-|\boldsymbol{b}|+1=0,\\-|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=-4,\end{cases}$得$\begin{cases}|\boldsymbol{a}|=2,\\|\boldsymbol{b}|=2.\end{cases}$

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

$=2^2+2\times2\times2\cos45°+2^2=8+4\sqrt{2}$，

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{8+4\sqrt{2}}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

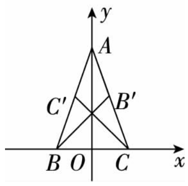
要点 4 向量在平面几何中的应用

1. “基底思想”是平面向量基本定理的核心，可以把所研究的所有向量通过基底表示，建立它们之间的关系. 体现了转化与化归的数学思想方法.

2. 向量的坐标表示是特殊基底(正交基底)的体现. 选择适当坐标系，将向量用坐标表示，从而实现了几何问题向量化，向量问题坐标化，使问题解决思路更加明晰.

【例 4】已知在等腰△ABC 中，BB'，CC'是两腰上的中线，且 $BB'\perp CC'$，求顶角 A 的余弦值的大小.

【解析】建立如图所示的平面直角坐标系，设 $A(0,a)$，$C(c,0)$，则 $B(-c,0)$，



$\therefore \overrightarrow{OA}=(0,a)$，$\overrightarrow{BA}=(c,a)$，$\overrightarrow{OC}=(c,0)$，$\overrightarrow{BC}=(2c,0)$.

$\because BB'$，CC'为 AC，AB 边的中线，

$\therefore \overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\left(\frac{3c}{2},\frac{a}{2}\right)$，

同理 $\overrightarrow{CC'}=\left(-\frac{3c}{2},\frac{a}{2}\right)$.

$\because \overrightarrow{BB'}\perp\overrightarrow{CC'}$，所以 $\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CC'}=0$，

即 $-\frac{9c^2}{4}+\frac{a^2}{4}=0$，$a^2=9c^2$，

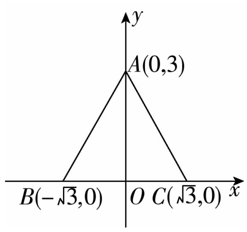
$\therefore \cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}=\frac{9c^2-c^2}{9c^2+c^2}=\frac{4}{5}$.

即顶角 A 的余弦值为 $\frac{4}{5}$.

点睛 把几何图形放到适当的坐标系中，就赋予了有关点与向量具体的坐标，这样就能进行相应的代数运算和向量运算，从而解决问题. 这种解题方法具有普遍性.

【变式训练 4】若等边△ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$，平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$ <u>-2</u>.

【解析】建立如图所示的平面直角坐标系，知 $A(0,3)$，$B(-\sqrt{3},0)$，$C(\sqrt{3},0)$，



设 $M(x,y)$，由 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，

得 $(x-\sqrt{3},y)=\frac{1}{6}(-2\sqrt{3},0)+\frac{2}{3}(-\sqrt{3},3)$，解得 $x=0$，$y=2$.

$\therefore M(0,2)$，$\therefore \overrightarrow{MA}=(0,1)$，

$\overrightarrow{MB}=(-\sqrt{3},-2)$.

$\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-2$.

要点 5 余弦定理和正弦定理

1. 余弦定理主要解决以下两类解三角形问题：

(1)已知三角形的两边和它们的夹角，由余弦定理求出第三边进而求出其余两角.

(2)已知三角形的三边，利用余弦定理直接求出三角形的三个角. 另外，在应用余弦定理解决问题时，要特别注意定理的变式，做到灵活应用.

2. 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 体现了三角形中的边角关系，是边与角的和谐统一，用正弦定理可以解决解三角形的两类问题：

(1)已知三角形的任意两个角与一边，由三角形内角和定理，可以计算出三角形的另一个角，由正弦定理可以计算出三角形的另两边.

(2)已知三角形的任意两边与其中一边的对角，应用正弦定理，可以计算出另一边的对角的正弦值，进而确定这个角和三角形其他的边和角.

3. 值得注意的是已知三角形的任意两边与其中一边的对角，运用正弦定理解三角形时，解不唯一，可结合三角形中大边对大角的性质去判断解的个数.

【例 5】在△ABC 中，$B=45^\circ$，$AC=\sqrt{10}$，$\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 求：

(1)BC 边的长；

(2)AB 边上的中线 CD 的长.

【解析】(1)由 $\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，得 $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sin A=\sin(180^\circ-45^\circ-C)=\sin(135^\circ-C)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos C+\sin C)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

由正弦定理，得 $BC=\frac{AC}{\sin B}\cdot\sin A=\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=3\sqrt{2}$.

(2)由正弦定理，得 $AB=\frac{AC}{\sin B}\cdot\sin C=\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=2$.

$BD=\frac{1}{2}AB=1$.

由余弦定理，得 $CD=\sqrt{BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos B}$

$=\sqrt{1+18-2\times1\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{13}$.

点睛 1. 应用正弦、余弦定理解三角形的关键是边角互化.

2. 在解决几何图形的有关问题时要依据题意构建相关的三角形.

【变式训练 5】在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，设 a，b，c 满足条件 $b^2+c^2-bc=a^2$ 和 $\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$，求角 A 和 $\tan B$ 的值.

【解析】由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，$\therefore A=60^\circ$.

在△ABC 中，$C=180^\circ-A-B=120^\circ-B$.

由已知条件，应用正弦定理得

$\frac{1}{2}+\sqrt{3}=\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin(120^\circ-B)}{\sin B}$

$=\frac{\sin 120^\circ\cos B-\cos 120^\circ\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\frac{1}{2}$，

$\therefore \tan B=\frac{1}{2}$.

拓展提升

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ （ A ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

【解析】$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2-3+1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(4,5)$. 若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则实数 $\lambda=$ （ C ）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，
所以 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1-2\lambda,2+3\lambda)$，
又 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，所以 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，
即 $4(1-2\lambda)+5(2+3\lambda)=0$，解得 $\lambda=-2$. 故选 C.

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，则“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$”的 （ D ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，

则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{1+1+2\times1\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}}=1$，

因此，由“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$”不能推出“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$”；

若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{1+1+2\times1\times1\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}=\sqrt{3}$，

解得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，

所以，由“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$”不能推出“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$”，

因此，“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{0}$. 若 $\overrightarrow{EB}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 （ D ）

A. $y=3x$　　B. $x=3y$

C. $y=-3x$　　D. $x=-3y$

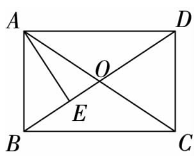
【解析】因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，所以点 D 是 BC 的中点，又因为 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{0}$，所以点 E 是 AD 的中点，

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{BE}$，因此 $x=\frac{3}{4}$，$y=-\frac{1}{4}\Rightarrow x=-3y$，故选 D.

5. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，AC 与 BD 相交于点 O，过点 A 作 $AE\perp BD$，垂足为 E，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EC}=$ （ B ）

A. $\frac{72}{5}$　　B. $\frac{144}{25}$　　C. $\frac{12}{5}$　　D. $\frac{12}{25}$

【解析】如图，



由 $AB=3$，$AD=4$，得 $BD=\sqrt{9+16}=5$，$AE=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{12}{5}$，

由题意得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OC})$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AO}$，

$\because AE\perp BD$，$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EO}=0$，

又 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle EAO=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AO}|\cdot\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AO}|}$

$=|\overrightarrow{AE}|^2=\frac{144}{25}$，

$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EC}=\frac{144}{25}$. 故选 B.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,3)$，$\boldsymbol{b}=(6,m)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$ <u>8</u>.

【解析】$\because$ 向量 $\boldsymbol{a}=(-4,3)$，$\boldsymbol{b}=(6,m)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，
$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4\times6+3m=0$，$m=8$.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\frac{1}{2}$. 求：

(1) b,c 的值；

(2) $\sin(B-C)$ 的值.

【解析】(1) 由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

得 $b^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

$\because b=c+2$，$\therefore(c+2)^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

解得 $c=5$. $\therefore b=7$.

(2) 由 $\cos B=-\frac{1}{2}$ 得 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理得 $\sin C=\frac{c}{b}\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 是钝角，$\therefore\angle C$ 为锐角.

$\therefore\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{11}{14}$.

$\therefore\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十五）

课后作业 · 单独成册

第七章 复数

一、课标导向

课标要求

1. 复数的概念

(1)通过方程的解,认识复数.

(2)理解复数的代数表示及其几何意义,理解两个复数相等的含义.

2. 复数的运算

掌握复数代数表示式的四则运算,了解复数加、减运算的几何意义.

3. 复数的三角表示(选学内容,不作为考试要求)

通过复数的几何意义,了解复数的三角表示,了解复数的代数表示与三角表示之间的关系,了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

学习建议

1. 理解复数的概念,了解从自然数集逐步扩充到复数集的过程,数系的每一次扩充,都解决了某些运算不能解决的矛盾.掌握复数的代数形式,并能通过复数与复平面内的点的一一对应理解复数的几何意义.

2. 对于四则运算法则,应按先加减后乘除的内容顺序深入学习.

3. 对于复数的三角表示,掌握基础概念,了解与复数代数形式的关系即可.

知识网络

- 数系的扩充—复数
  - 复数的概念
    - 复数的有关概念
    - 复数相等的充要条件
  - 复数的几何意义
    - 复平面的概念
    - 复数的向量表示法
    - 共轭复数和复数的模
  - 复数的加法与减法
    - 复数加法与减法的运算法则
    - 复数加减法的几何意义
  - 复数的乘法与除法
    - 复数乘法与除法的运算法则
    - 公式$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$的应用

二、精讲精练

7.1 复数的概念

第 1 课时 数系的扩充和复数的概念

学习目标	核心素养
1. 了解引进复数的必要性,理解并掌握虚数单位 i. 2. 理解复数的基本概念及复数相等的充要条件.(重点、难点)	通过复数概念的学习,逐步形成数学抽象素养.

自主预习

情景导思

数的概念的发展:从正整数扩充到整数,从整数扩充到有理数,从有理数扩充到实数,数的概念是不断发展的,其发展的动力来自两个方面.

(1)解决实际问题的需要.由于计数的需要产生了自然数,为了刻画具有相反意义的量产生了负数,由于测量等需要产生了分数,为了解决度量正方形对角线长的问题产生了无理数.

(2)解方程的需要.为了使方程 $x+4=0$ 有解,就引进了负数,数系扩充到了整数集;为了使方程 $3x-2=0$ 有解,就引进了分数,数系扩充到了有理数集;为了使方程 $x^2=2$ 有解,就引进了无理数,数系扩充到了实数集.引进无理数以后,我们已经能使方程 $x^2=a(a\geqslant 0)$ 永远有解.但是,这并没有彻底解决问题,当 $a<0$ 时,方程 $x^2=a$ 在实数范围内无解.为了使方程 $x^2=a(a<0)$ 有解,就必须把实数概念进一步扩大,因此引进了复数.

知新预学

1. 复数的有关概念

(1)复数的概念:形如 $a+bi$ 的数叫做复数,其中 $a,b\in\mathbf{R}$,i 叫做<u>虚数单位</u>,a 叫做复数的<u>实部</u>,b 叫做复数的<u>虚部</u>.

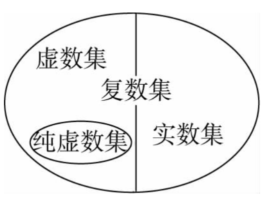
(2)复数的表示方法:复数通常用字母<u>z</u>表示,即<u>$z=a+bi$</u>.

(3)复数集的概念:全体复数所构成的集合 $\mathbf{C}=$<u>$\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{R}\}$</u>叫做复数集.

2. 复数的分类及包含关系.

(1)复数$(z=a+bi,a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}实数(b=0),\\ 虚数(b\neq 0)\begin{cases}纯虚数(a=0),\\ 非纯虚数(a\neq 0).\end{cases}\end{cases}$

(2)集合表示:



3. 复数相等

复数相等的充要条件:设 a,b,c,d 都是实数,那么 $a+bi=c+di\Leftrightarrow$<u>$a=c$ 且 $b=d$</u>.即它们的实部与虚部分别对应相等.

小试牛刀

1. 以 $3i-1$ 的虚部为实部,以 $-2+i$ 的实部为虚部的复数是 (B)

A. $-2+3i$　　B. $3-2i$

C. $-3+i$　　D. $1-3i$

【解析】$\because 3i-1$ 的虚部为 3,$-2+i$ 的实部为 -2,

$\therefore$所求复数为 $3-2i$.故选 B.

2. 已知复数 $z=a^2-(2-b)i$ 的实部和虚部分别是 2 和 3,则实数 a,b 的值分别是 (C)

A. $\sqrt{2},1$　　B. $\sqrt{2},5$　　C. $\pm\sqrt{2},5$　　D. $\pm\sqrt{2},1$

【解析】令$\begin{cases}a^2=2,\\ -2+b=3,\end{cases}$得 $a=\pm\sqrt{2},b=5$.

3. 已知 $M=\{2,m^2-2m+(m^2+m-2)i\}$,$N=\{-1,2,4i\}$,若 $M\cup N=N$,则实数 m 的值为<u>1 或 2</u>.

【解析】$\because M\cup N=N$,$\therefore M\subsetneqq N$,

$\therefore m^2-2m+(m^2+m-2)i=-1$ 或 $m^2-2m+(m^2+m-2)i=4i$.

由复数相等的充要条件,得

$\begin{cases}m^2-2m=-1,\\ m^2+m-2=0\end{cases}$或$\begin{cases}m^2-2m=0,\\ m^2+m-2=4,\end{cases}$

解得 $m=1$ 或 $m=2$.故实数 m 的值是 1 或 2.

互动课堂

合作探究

探究 1 复数的概念

【例 1】写出下列复数的实部和虚部,并判断它们是实数,虚数,还是纯虚数.

①$2+3i$;②$-3+\frac{1}{2}i$;③$\sqrt{2}+i$;④π;⑤$-\sqrt{3}i$;⑥0.

【解析】①的实部为 2,虚部为 3,是虚数;②的实部为 -3,

虚部为$\frac{1}{2}$，是虚数；③的实部为$\sqrt{2}$，虚部为1，是虚数；④的实部为π，虚部为0，是实数；⑤的实部为0，虚部为$-\sqrt{3}$，是纯虚数；⑥的实部为0，虚部为0，是实数.

点睛 复数$a+bi(a,b\in\mathbf{R})$中，实数a和b分别叫做复数的实部和虚部.特别注意，b为复数的虚部而不是虚部的系数.

【变式训练1】下列命题中，正确命题的个数是 (A)

①若$x,y\in\mathbf{C}$，则$x+yi=1+i$的充要条件是$x=y=1$；

②若$a,b\in\mathbf{R}$且$a>b$，则$a+i>b+i$；

③若$x,y\in\mathbf{C}$且$x^2+y^2=0$，则$x=y=0$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】①由于$x,y\in\mathbf{C}$，所以$x+yi$不一定是复数的代数形式，不符合复数相等的充要条件，所以①是假命题.②由于两个虚数不能比较大小，所以②是假命题.③当$x=1,y=i$时，$x^2+y^2=0$成立，所以③是假命题.故选A.

探究2　复数的分类

【例2】设$z=\log_{\frac{1}{2}}(m-1)+i\log_2(5-m)(m\in\mathbf{R})$.

(1)若z是虚数，求m的取值范围；

(2)若z是纯虚数，求m的值.

【解析】(1)因为z是虚数，故其虚部$\log_2(5-m)\neq0$，

m应满足的条件是$\begin{cases}m-1>0,\\5-m>0,\\5-m\neq1,\end{cases}$解得$1<m<5$，且$m\neq4$.

即m的取值范围是$(1,4)\cup(4,5)$.

(2)因为z是纯虚数，故其实部$\log_{\frac{1}{2}}(m-1)=0$，虚部$\log_2(5-m)\neq0$，

m应满足的条件是$\begin{cases}m-1=1,\\5-m>0,\\5-m\neq1,\end{cases}$解得$m=2$.

点睛 将复数化成代数形式$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，根据复数的分类：当$b=0$时，z为实数；当$b\neq0$时，z为虚数；特别地，当$b\neq0$，$a=0$时，z为纯虚数.由此解决有关复数分类的参数求解问题.

【变式训练2】求当实数k为何值时，复数$z=(1+i)k^2-(3+5i)k-2(2+3i)$分别是(1)实数；(2)虚数；(3)纯虚数；(4)零.

【解析】$z=(1+i)k^2-(3+5i)k-2(2+3i)=(k^2-3k-4)+(k^2-5k-6)i$.

(1)当$k^2-5k-6=0$时，$z\in\mathbf{R}$，即$k=6$或$k=-1$.

(2)当$k^2-5k-6\neq0$时，z是虚数，即$k\neq6$且$k\neq-1$.

(3)当$\begin{cases}k^2-3k-4=0,\\k^2-5k-6\neq0\end{cases}$时，$z$是纯虚数，解得$k=4$.

(4)当$\begin{cases}k^2-3k-4=0,\\k^2-5k-6=0\end{cases}$时，$z=0$，解得$k=-1$.

探究3　两个复数相等

【例3】(1)已知$x^2-y^2+2xyi=2i$，求实数x,y的值；

(2)关于x的方程$3x^2-\frac{a}{2}x-1=(10-x-2x^2)i$有实根，求实数$a$的值.

【解析】(1)$\because x^2-y^2+2xyi=2i$，

$\therefore\begin{cases}x^2-y^2=0,\\2xy=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

(2)设方程的实数根为$x=m$，则原方程可变为

$3m^2-\frac{a}{2}m-1=(10-m-2m^2)i$，

$\therefore\begin{cases}3m^2-\frac{a}{2}m-1=0,\\10-m-2m^2=0,\end{cases}$解得$a=11$或$a=-\frac{71}{5}$.

点睛 两个复数相等，首先要分清两个复数的实部与虚部，然后利用两个复数相等的充要条件得到两个等式，从而可以确定参数的值.

【变式训练3】已知关于实数x,y的方程组$\begin{cases}(2x-1)+i=y-(3-y)i\ ①,\\(2x+ay)-(4x-y+b)i=9-8i\ ②\end{cases}$有实数解，则$a=$__1__，$b=$__2__.

【解析】由①可得$\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y),\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\y=4\end{cases}$③，

把③代入②得$5+4a-(6+b)i=9-8i$，且$a,b\in\mathbf{R}$，

$\therefore\begin{cases}5+4a=9,\\6+b=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$

随堂小练

1. 设$a,b\in\mathbf{R}$，i是虚数单位，则“$ab=0$”是“复数$a-bi$为纯虚数”的 (B)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】若复数$a-bi$为纯虚数，则$a=0$且$b\neq0$，故$ab=0$.而由$ab=0$不一定能得到复数$a-bi$是纯虚数，故“$ab=0$”是“复数$a-bi$为纯虚数”的必要不充分条件.

2. 若$(x+y)i=x-1(x,y\in\mathbf{R})$，则$2^{x+y}$的值为 (D)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. 0　　D. 1

【解析】由复数相等的充要条件知$\begin{cases}x+y=0,\\x-1=0,\end{cases}\therefore 2^{x+y}=2^0=1$.

3. 如果$z=m(m+1)+(m^2-1)i$为纯虚数，则实数m的值为 (B)

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. -1或1

【解析】由题意知$\begin{cases}m(m+1)=0,\\m^2-1\neq0,\end{cases}\therefore m=0$.

4. 在给出的下列几个命题中，正确命题的个数为__1__.

①若x是实数，则x可能不是复数；

②若z是虚数，则z不是实数；

③一个复数为纯虚数的充要条件是这个复数的实部等于零；

④-1没有平方根.

【解析】因为实数是复数，故①错误；②正确；因为复数为纯虚数要求实部为零，虚部不为零，故③错误；因为-1的平方根为$\pm i$，故④错误.

温馨提示：请自主完成课后作业(十六)

课后作业·单独成册

第 2 课时　复数的几何意义

学习目标	核心素养
1. 理解复数的几何意义，理解复数与复平面上的点一一对应.（重点） 2. 类比实数的绝对值，理解复数的模的概念.（重点） 3. 理解复数对应的几类特殊点的位置关系.	了解数系扩充的一般“规律”，了解从实数系扩充到复数系的过程，感受数系扩充过程中人类理性思维的作用，提升数学抽象、逻辑推理素养.

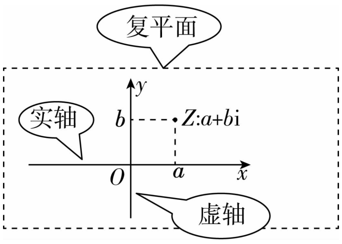
自主预习

情景导思

实数的几何意义是：实数与数轴上的点是一一对应的，因此，实数可以用数轴上的点来表示，那么，复数是否也可以用点来表示呢？

知新预学

1. 复平面



2. 复数的几何意义

（1）复数集中的数与复平面内的点一一对应：

复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$复平面内的点__$Z(a,b)$__.

（2）复数集中的数与复平面内以原点为起点的向量一一对应：

复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$平面向量__$\overrightarrow{OZ}$__.

3. 复数的模

复数 $z=a+bi$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫做复数 $z=a+bi$ 的模或绝对值，记作 $|z|$ 或 $|a+bi|$，即 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. 如果 $b=0$，那么 $z=a+bi$ 是一个实数 a，它的模等于 $|a|$（a 的绝对值）.

4. 共轭复数

当两个复数的实部__相等__，虚部__互为相反数__时，这两个复数叫做互为共轭复数. 虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做共轭虚数. 复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示，即如果 $z=a+bi$，那么 $\bar{z}=$__$a-bi$__.

小试牛刀

1. 复数 $z=3-5i$ 在复平面内对应的点的坐标是　（ A ）

A. $(3,-5)$　　B. $(3,5)$
C. $(3,-5i)$　　D. $(3,5i)$

【解析】根据复平面的几何意义知对应的点的坐标是 $(3,-5)$.

2. 在复平面内，复数 $-2+3i$ 对应的点位于　（ B ）

A. 第一象限　　B. 第二象限
C. 第三象限　　D. 第四象限

【解析】复数 $-2+3i$ 在复平面内对应的点为 $(-2,3)$，故复数 $-2+3i$ 对应的点位于第二象限. 故选 B.

3. 如果 z 是 $3+4i$ 的共轭复数，则 z 对应的向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模是　（ D ）

A. 1　　B. $\sqrt{7}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. 5

【解析】由题意得，$z=3-4i$，

$\therefore z$ 对应的向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标为 $(3,-4)$，其模为 $\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$. 故选 D.

互动课堂

合作探究

探究 1　复数与复平面内的点

【例 1】在复平面内，若复数 $z=(m^2-2m-8)+(m^2+3m-10)i$ 对应的点：(1) 在虚轴上；(2) 在第二象限；(3) 在第二、四象限；(4) 在直线 $y=x$ 上，分别求实数 m 的值或取值范围.

【解析】复数 $z=(m^2-2m-8)+(m^2+3m-10)i$ 的实部为 m^2-2m-8，虚部为 $m^2+3m-10$.

(1) 由题意得 $m^2-2m-8=0$.

解得 $m=-2$ 或 $m=4$.

(2) 由题意得 $\begin{cases} m^2-2m-8<0, \\ m^2+3m-10>0, \end{cases}$ $\therefore 2<m<4$，

即 m 的取值范围是 $(2,4)$.

(3) 由题意得 $(m^2-2m-8)(m^2+3m-10)<0$，

$\therefore 2<m<4$ 或 $-5<m<-2$，

即 m 的取值范围是 $(2,4)$ 或 $(-5,-2)$.

(4) 由已知得 $m^2-2m-8=m^2+3m-10$，故 $m=\dfrac{2}{5}$.

点睛 复数的实部和虚部分别对应了复平面内相应点的横坐标和纵坐标. 在复平面内，复数所表示的点所处的位置决定了复数的实部和虚部的取值特征.

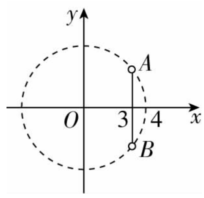
【变式训练 1】已知 $z=(m+3)+(m-1)i$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是　（ A ）

A. $(-3,1)$　　B. $(-1,3)$
C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)$

【解析】由复数 $z=(m+3)+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点在第四象限得 $\begin{cases}m+3>0,\\m-1<0,\end{cases}$ 解得 $-3<m<1$，故选 A.

探究 2 复数的模及其应用

【例 2】已知复数 $z=3+a\mathrm{i}$，且 $|z|<4$，求实数 a 的取值范围.



【解析】方法一：∵ $z=3+a\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，

∴ $|z|=\sqrt{3^2+a^2}$，

由已知得 $3^2+a^2<4^2$，

∴ $a^2<7$，∴ $a\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$.

方法二：利用复数的几何意义，由 $|z|<4$ 知，z 在复平面内对应的点在以原点为圆心，以 4 为半径的圆内（不包括边界），

由 $z=3+a\mathrm{i}$ 知 z 对应的点在直线 $x=3$ 上，

所以线段 AB（除去端点）为动点 Z 的集合.

由图可知 $-\sqrt{7}<a<\sqrt{7}$.

点睛 与复数的模相关的解题技巧：

(1)复数的模是非负实数，因此复数的模可以比较大小；

(2)根据复数模的计算公式 $|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$ 可把复数模的问题转化为实数问题解决；

(3)根据复数模的定义 $|z|=|\overrightarrow{OZ}|$，可把复数模的问题转化为向量的模（即两点间的距离）的问题解决.

【变式训练 2】已知复数 z 对应的点在虚轴上，且满足 $|z-1|=3$，则 $z=$ （ C ）

A. $\pm2\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$

C. $\pm2\sqrt{2}\mathrm{i}$　　D. $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$

【解析】设 $z=b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R})$，则 $z-1=-1+b\mathrm{i}$，

∴ $|z-1|=\sqrt{(-1)^2+b^2}=3$，

解得 $b=\pm2\sqrt{2}$，故 $z=\pm2\sqrt{2}\mathrm{i}$，选 C.

随堂小练

1. 在复平面内，复数 $6+5\mathrm{i}$，$-2+3\mathrm{i}$ 对应的点分别为 A，B. 若 C 为线段 AB 的中点，则点 C 对应的复数是 （ C ）

A. $4+8\mathrm{i}$　B. $8+2\mathrm{i}$　C. $2+4\mathrm{i}$　D. $4+\mathrm{i}$

【解析】复数 $6+5\mathrm{i}$ 对应的点为 $A(6,5)$，复数 $-2+3\mathrm{i}$ 对应的点为 $B(-2,3)$. 利用中点坐标公式得线段 AB 的中点 $C(2,4)$，故点 C 对应的复数为 $2+4\mathrm{i}$. 故选 C.

2. 已知 $0<a<2$，复数 $z=a+\mathrm{i}$，则 $|z|$ 的取值范围是 （ B ）

A. $(1,\sqrt{3})$　B. $(1,\sqrt{5})$　C. $(1,3)$　D. $(1,5)$

【解析】$|z|=\sqrt{a^2+1}$，∵ $0<a<2$，∴ $1<a^2+1<5$，

∴ $|z|\in(1,\sqrt{5})$. 故选 B.

3. 已知复数 z 满足 $|z|^2-2|z|-8=0$，则复数 z 对应点的轨迹为 （ A ）

A. 一个圆　　B. 一条线段

C. 两个点　　D. 两个圆

【解析】∵ $|z|^2-2|z|-8=0$，

∴ $(|z|-4)(|z|+2)=0$，

∴ $|z|=4$，表示一个圆，故选 A.

4. 已知复数 $z_1=a+\mathrm{i}$，$z_2=2-\mathrm{i}$，且 $|z_1|=|z_2|$，则实数 $a=$ ___±2___.

【解析】依题意，得 $a^2+1=4+1$，∴ $a=\pm2$.

5. 若复数 $z=(m^2+m-2)+(4m^2-8m+3)\mathrm{i}(m\in\mathbf{R})$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 对应的点在第一象限，求实数 m 的取值范围.

【解析】由题意得 $\bar{z}=(m^2+m-2)-(4m^2-8m+3)\mathrm{i}$，

∵ $\bar{z}$ 对应的点位于第一象限，

∴ $\begin{cases}m^2+m-2>0,\\-4m^2+8m-3>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m^2+m-2>0,\\4m^2-8m+3<0,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}m<-2\text{ 或 }m>1,\\\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2},\end{cases}$

即 $1<m<\frac{3}{2}$，故 m 的取值范围是 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十七）

课后作业 · 单独成册

7.2 复数的四则运算

第 1 课时 复数的加、减运算及其几何意义

学习目标	核心素养
1. 熟练掌握复数的代数形式的加、减法运算法则.(重点) 2. 理解复数加、减法的几何意义,能够利用数形结合思想解题.(重点、难点)	1. 通过学习复数加、减法的几何意义,培养数学抽象素养. 2. 借助复数加、减法的运算性质,培养数学运算素养.

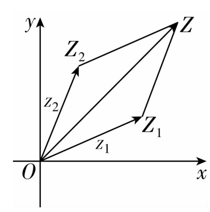
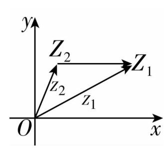
自主预习

情景导思

从实数系到复数系的扩充过程中,我们学习了复数的一些基本知识,感受到人类理性思维在数系扩充中的作用,那么实数系中的加减运算在复数系中怎么运算呢?类比向量坐标形式的加减运算,思考如何进行复数的加减运算.

知新预学

复数的加、减法运算法则及几何意义与运算律

<table>
<tr><td colspan="4">$z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$,设 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $z_1=a+bi$,$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 相对应,且 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线</td></tr>
<tr><td>运算</td><td colspan="2">加法</td><td>减法</td></tr>
<tr><td>运算法则</td><td colspan="2">$z_1+z_2=$ <u>$(a+c)+(b+d)i$</u></td><td>$z_1-z_2=$ <u>$(a-c)+(b-d)i$</u></td></tr>
<tr><td>几何意义</td><td colspan="2">
复数的和 z_1+z_2 与向量 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=\overrightarrow{OZ}$ 的坐标对应</td><td>
复数的差 z_1-z_2 与向量 $\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}=\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 的坐标对应</td></tr>
<tr><td rowspan="2">运算律</td><td>交换律</td><td>$z_1+z_2=z_2+z_1$</td><td rowspan="2">—</td></tr>
<tr><td>结合律</td><td>$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$</td></tr>
</table>

小试牛刀

1. 若复数 z 满足 $z+i-3=3-i$,则 $z=$ (D)

A. 0　　B. 2i　　C. 6　　D. 6−2i

【解析】$z=3-i-(i-3)=6-2i$.

2. 复数 $i+i^2$ 在复平面内表示的点在 (B)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【解析】$i+i^2=-1+i$,在复平面内表示的点在第二象限.故选 B.

3. 在复平面内,O 是原点,$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{AB}$ 表示的复数分别为 $-2+i$,$3+2i$,$1+5i$,则 $\overrightarrow{BC}$ 表示的复数为 (C)

A. $2+8i$　　B. $-6-6i$

C. $4-4i$　　D. $-4+2i$

【解析】$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA})=3+2i-(1+5i-2+i)=4-4i$.

$\therefore \overrightarrow{BC}$ 表示的复数为 $4-4i$.故选 C.

4. 若 $|z-1|=|z+1|$,则复数 z 对应的点在 (B)

A. 实轴上　　B. 虚轴上

C. 第一象限　　D. 第二象限

【解析】$\because |z-1|=|z+1|$,$\therefore$ 点 Z 到 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 的距离相等,即点 Z 在以 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 为端点的线段的中垂线上.故选 B.

5. 已知复数 $z_1=(a^2-2)+(a-4)i$,$z_2=a-(a^2-2)i(a\in\mathbf{R})$,且 z_1-z_2 为纯虚数,则 $a=$ <u>-1</u>.

【解析】$\because z_1-z_2=(a^2-a-2)+(a-4+a^2-2)i(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数,$\therefore \begin{cases}a^2-a-2=0,\\a^2+a-6\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

互动课堂

合作探究

探究 1　复数加、减法的运算

【例 1】计算:$(-3+4i)+(2+i)-(1+5i)$.

【解析】原式 $=(-3+2-1)+(4+1-5)i=-2$.

点睛 复数的加、减法运算,就是实部与实部相加减作实部,虚部与虚部相加减作虚部,同时把 i 看作字母,类比多项式加减中的合并同类项.

【变式训练 1】计算$(1-2i)-(2-3i)+(3-4i)-(4-5i)+\cdots+(2\,021-2\,022i)-(2\,022-2\,023i)$.

【解析】方法一：原式$=(1-2+3-4+\cdots+2\,021-2\,022)+(-2+3-4+5-\cdots-2\,022+2\,023)i=-1\,011+1\,011i$.

方法二：$(1-2i)-(2-3i)=-1+i$，

$(3-4i)-(4-5i)=-1+i,\cdots$，

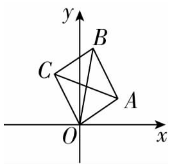
$(2\,021-2\,022i)-(2\,022-2\,023i)=-1+i$.

将上述 1 011 个式子累加可得，

原式$=1\,011(-1+i)=-1\,011+1\,011i$.

探究 2 复数加、减法的几何意义

【例 2】如图所示，在平行四边形 $OABC$ 中，顶点 O,A,C 分别表示 $0,3+2i,-2+4i$. 求：



(1)$\overrightarrow{AO}$ 所表示的复数，$\overrightarrow{BC}$ 所表示的复数；

(2)对角线 $\overrightarrow{CA}$ 所表示的复数；

(3)对角线 $\overrightarrow{OB}$ 所表示的复数及 $\overrightarrow{OB}$ 的长度.

【解析】(1)$\because\overrightarrow{AO}=0-(3+2i)=-3-2i$，

$\therefore\overrightarrow{AO}$ 所表示的复数为$-3-2i$.

$\because\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$，

$\therefore\overrightarrow{BC}$ 所表示的复数为$-3-2i$.

(2)$\because\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，

$\therefore\overrightarrow{CA}$ 所表示的复数为$(3+2i)-(-2+4i)=5-2i$.

(3)$\because$对角线 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，

$\therefore\overrightarrow{OB}$ 所表示的复数为$(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$，

$\therefore|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

点睛 1. 复数 z 与复平面内的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是一一对应的关系，复数的加法可以按照向量的加法来进行，即复数的加法符合向量加法的三角形法则、平行四边形法则.

2. 类比实数减法的意义，复数的减法也是加法的逆运算：减去一个复数等于加上这个复数的相反数.

3. 若用 d 表示平面内点 Z_1 和 Z_2 之间的距离，则 $d=|\overrightarrow{Z_1Z_2}|=|z_1-z_2|$，其中 z_1,z_2 是复平面内的两点 Z_1,Z_2 对应的复数. 这就是复平面内两点间的距离公式.

【变式训练 2】满足条件$|z+1-i|=|4-3i|$的复数 z 在复平面内对应的点的轨迹是 (C)

A. 一条直线　　B. 两条直线

C. 一个圆　　D. 一个圆环

【解析】根据复数减法的几何意义，$|z+1-i|$表示复平面内复数 z 对应的点 Z 到点$(-1,1)$的距离，而$|4-3i|$表示复数 $4-3i$ 的模，等于 5，故满足$|z+1-i|=5$的复数 z 在复平面内对应的点的轨迹是以点$(-1,1)$为圆心，5 为半径的圆.

探究 3 复数加、减法的综合应用

【例 3】已知$|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=1$，求$|z_1+z_2|$的值.

【解析】方法一：设 $z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，

$\because|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=1$，

$\therefore a^2+b^2=c^2+d^2=1$，①

$(a-c)^2+(b-d)^2=1$，②

由①②得 $2ac+2bd=1$，

$\therefore|z_1+z_2|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

$=\sqrt{a^2+c^2+b^2+d^2+2ac+2bd}=\sqrt{3}$.

方法二：设 O 为坐标原点，

z_1,z_2,z_1+z_2 对应的点分别为 A,B,C.

$\because|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=1$，

$\therefore\triangle OAB$ 是边长为 1 的正三角形，

$\therefore$四边形 $OACB$ 是一个内角为 $60°$，边长为 1 的菱形，

且$|z_1+z_2|$是菱形的较长的对角线 OC 的长，

$\therefore|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OC}|=$

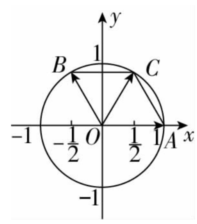
$\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AC}|\cos 120°}=\sqrt{3}$.

点睛 1. 设复数 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，利用复数相等或模的概念，可把条件转化为关于 x,y 满足的关系式，利用方程思想求解，这是“复数问题实数化”思想的应用.

2. 在复平面内，z_1,z_2 对应的点为 A,B,z_1+z_2 对应的点为 C,O 为坐标原点，则四边形 $OACB$：(1)为平行四边形；(2)若$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则四边形 $OACB$ 为矩形；(3)若$|z_1|=|z_2|$，则四边形 $OACB$ 为菱形；(4)若$|z_1|=|z_2|$且$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则四边形 $OACB$ 为正方形.

【变式训练 3】已知$|z_1|=|z_2|=1,z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求复数 z_1,z_2 及$|z_1-z_2|$的值.

【解析】由于$|z_1+z_2|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$，设 z_1,z_2,z_1+z_2 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$，则$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，故 A,B,C 三点均在以原点为圆心，1 为半径的圆上，如图所示，由平行四边形法则和余弦定理易得



$\cos\angle AOC=\frac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2}{2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{1}{2}$，

故$\angle AOC=60°$，所以平行四边形 $OACB$ 为菱形，且$\triangle BOC,\triangle COA$ 都是等边三角形，即$\angle AOB=120°$.

又$\because\overrightarrow{OC}$ 与 x 轴正半轴的夹角为 $60°$，故点 A 在 x 轴上，即 $A(1,0)$.

而 $x_B=|\overrightarrow{OB}|\cos 120°=-\frac{1}{2},y_B=|\overrightarrow{OB}|\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$点 B 的坐标为$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\therefore \begin{cases} z_1=1, \\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \\ z_2=1. \end{cases}$

$\therefore |z_1-z_2|=\left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{3}.$

随堂小练

1. 复数 $z_1=2-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$z_2=\frac{1}{2}-2\mathrm{i}$，则 $z_1+z_2=$ （ C ）

A. 0　　B. $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$

C. $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$

【解析】$z_1+z_2=\left(2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)\mathrm{i}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}$. 故选 C.

2. 若 $z+3-2\mathrm{i}=4+\mathrm{i}$，则 $z=$ （ B ）

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $1+3\mathrm{i}$

C. $-1-\mathrm{i}$　　D. $-1-3\mathrm{i}$

【解析】$z=4+\mathrm{i}-(3-2\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$. 故选 B.

3. 设 $z_1=2+b\mathrm{i}$，$z_2=a+\mathrm{i}$，当 $z_1+z_2=0$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$为 （ D ）

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $2+\mathrm{i}$

C. 3　　D. $-2-\mathrm{i}$

【解析】由 $\begin{cases} 2+a=0, \\ b+1=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=-2, \\ b=-1. \end{cases}$ $\therefore a+b\mathrm{i}=-2-\mathrm{i}$. 故选 D.

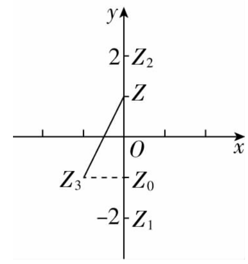
4. 如果复数 z 满足 $|z+2\mathrm{i}|+|z-2\mathrm{i}|=4$，那么 $|z+\mathrm{i}+1|$ 的最小值是 （ A ）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　D. $\sqrt{5}$

【解析】设复数 $-2\mathrm{i}$，$2\mathrm{i}$，$-(1+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点分别为 Z_1，Z_2，Z_3，因为 $|z+2\mathrm{i}|+|z-2\mathrm{i}|=4$，$Z_1Z_2=4$，所以复数 z 的几何意义为线段 Z_1Z_2，如图所示，问题转化为：动点 Z 在线段 Z_1Z_2 上移动，求 ZZ_3 的最小值.

因此作 $Z_3Z_0\perp Z_1Z_2$ 于 Z_0，则 Z_3 与 Z_0 的距离即为所求的最小值，$Z_0Z_3=1$. 故选 A.



5. 若复数 $z_1+z_2=3+4\mathrm{i}$，$z_1-z_2=5-2\mathrm{i}$，则 $z_1=$ __$4+\mathrm{i}$__.

【解析】两式相加得 $2z_1=8+2\mathrm{i}$，$\therefore z_1=4+\mathrm{i}$.

6. 若 $|z-2|=|z+2|$，则 $|z-1|$ 的最小值是 __1__.

【解析】由 $|z-2|=|z+2|$，知 z 对应点的轨迹是到 $(2,0)$ 与到 $(-2,0)$ 距离相等的点，即虚轴. $|z-1|$ 表示 z 对应的点与 $(1,0)$ 的距离. $\therefore |z-1|_{\min}=1$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十八）

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　复数的乘、除运算

学习目标	核心素养
1. 掌握复数代数形式的乘法和除法运算.(重点) 2. 理解复数乘法的交换律、结合律和乘法对加法的分配律.(重点、难点)	1. 通过学习复数的乘法与除法,培养数学抽象素养. 2. 借助复数的乘法与除法运算,培养数学运算与逻辑推理素养.

自主预习

情景导思

上节课我们学习了复数的加、减运算,类比多项式的乘法运算,思考如何进行复数的乘法运算.

知新预学

1. 复数的乘法

(1)复数的乘法法则

设 $z_1=a+bi$,$z_2=c+di$($a,b,c,d\in\mathbf{R}$)是任意两个复数,

则 $z_1z_2=(a+bi)(c+di)=$ $\underline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$.

(2)复数乘法的运算律

对任意 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$,有

交换律	$z_1z_2=\underline{z_2z_1}$
结合律	$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$
分配律	$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

2. 复数的除法

设 $z_1=a+bi$,$z_2=c+di$($a,b,c,d\in\mathbf{R}$,且 $c+di\neq0$),

则 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

小试牛刀

1. 设 a 是实数,且 $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{1+i}{2}$ 是实数,则 $a=$　　(B)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1

C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

【解析】$\because \dfrac{a}{1+i}+\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{a(1-i)}{2}+\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1+a}{2}+\dfrac{1-a}{2}i$,

又 $\because \left(\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{1+i}{2}\right)\in\mathbf{R}$,$\therefore \dfrac{1-a}{2}=0$,解得 $a=1$.

2. 若 $z=1+2i$,则 $\dfrac{4i}{z\overline{z}-1}=$　　(C)

A. 1　　B. -1

C. i　　D. $-i$

【解析】$\because z=1+2i$,$\therefore z\overline{z}=5$,$\therefore \dfrac{4i}{z\overline{z}-1}=i$.

3. 设复数 $z_1=2-i$,$z_2=1-3i$,则复数 $\dfrac{i}{z_1}+\dfrac{\overline{z_2}}{5}$ 的虚部等于 $\underline{1}$.

【解析】$\because \dfrac{i}{z_1}+\dfrac{\overline{z_2}}{5}=\dfrac{i}{2-i}+\dfrac{1+3i}{5}=\dfrac{i(2+i)}{5}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

$=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i+\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i=i$,$\therefore$ 虚部为 1.

4. 若复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$,则 $\overline{z}=$ $\underline{i}$.

【解析】$\because z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$,$\therefore \overline{z}=i$.

互动课堂

合作探究

探究 1　复数的乘法运算

【例 1】计算:(1)$(2+i)(2-i)$;(2)$(1+2i)^2$.

【解析】(1)$(2+i)(2-i)=4-i^2=4-(-1)=5$;

(2)$(1+2i)^2=1+4i+(2i)^2=1+4i+4i^2=-3+4i$.

点睛 1. 复数的乘法运算可以按照多项式的乘法法则进行,注意选用恰当的乘法公式进行简便运算,例如平方差公式、完全平方公式等.

2. 像 $2+i$ 和 $2-i$ 这样的两个复数叫做互为共轭复数,其形态特征为 $a+bi$ 和 $a-bi$,其数值特征为 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

【变式训练 1】计算:(1)$(1+i)^2$;

(2)$(3+4i)(3-4i)$;

(3)$(1-2i)(3+4i)(-2+i)$.

【解析】(1)$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$;

(2)$(3+4i)(3-4i)=3^2-(4i)^2=9-(-16)=25$;

(3)$(1-2i)(3+4i)(-2+i)=(11-2i)(-2+i)$

$=-20+15i$.

探究 2　复数的除法运算

【例 2】计算:(1)$(1+2i)\div(3-4i)$;

(2)$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^6+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}$.

【解析】(1)$(1+2i)\div(3-4i)=\dfrac{1+2i}{3-4i}=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$=\dfrac{-5+10i}{25}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$;

(2)原式 $=\left[\dfrac{(1+i)^2}{2}\right]^6+\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}$

$=i^6+\frac{\sqrt{6}+2i+3i-\sqrt{6}}{5}=-1+i.$

点睛 复数的除法先写成分式的形式，再把分母实数化．方法是分母与分子同时乘以分母的共轭复数，若分母是纯虚数，则只需同时乘以 i．

【变式训练 2】 计算：(1) $\frac{7+i}{3+4i}$；

(2) $\frac{(-1+i)(2+i)}{-i}$．

【解析】(1) $\frac{7+i}{3+4i}=\frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{25-25i}{25}=1-i$；

(2) $\frac{(-1+i)(2+i)}{-i}=\frac{-3+i}{-i}=\frac{(-3+i)\cdot i}{-i\cdot i}=-1-3i.$

探究 3 共轭复数及其应用

【例 3】 已知 $z\in\mathbf{C}$，若 $f(z)=2z+\overline{z}-3i$，$f(\overline{z}+i)=6-3i$，求 $f(-z)$．

【解析】 ∵ $f(z)=2z+\overline{z}-3i$，

∴ $f(\overline{z}+i)=2(\overline{z}+i)+(\overline{\overline{z}+i})-3i$

$=2\overline{z}+2i+z-i-3i=2\overline{z}+z-2i.$

又 $f(\overline{z}+i)=6-3i$，

∴ $2\overline{z}+z-2i=6-3i.$

设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-bi$，

∴ $2(a-bi)+(a+bi)=6-i$，

即 $3a-bi=6-i.$

由复数相等的定义，得 $\begin{cases}3a=6,\\-b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$

∴ $z=2+i$，

故 $f(-z)=2(-2-i)+(-2+i)-3i=-6-4i.$

点睛 共轭复数有如下几个性质：

(1)若复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2=a^2+b^2$；

(2)实数的共轭复数是它本身，即 $z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$，利用此性质可以证明一个复数是实数；

(3)若 $z\neq0$，且 $z+\overline{z}=0$，则 z 为纯虚数，利用此性质可以证明一个复数是纯虚数；

(4)若干个复数进行加减运算后的共轭复数等于这些复数的共轭复数进行相同的加减运算．

【变式训练 3】 已知 $z\in\mathbf{C}$，解方程 $z\overline{z}-3i\overline{z}=1+3i$．

【解析】 将 $z\cdot\overline{z}-3i\overline{z}=1+3i$，①

两边取共轭复数，得 $\overline{z}\cdot z+3iz=1-3i$，②

②－①得 $\overline{z}=-2-z$，代入①得 $z^2+(2-3i)z+1-3i=0$，即 $(z+1)(z+1-3i)=0$，∴ $z=-1$ 或 $z=-1+3i$．

随堂小练

1. 设复数 z 满足 $iz=1$，则 $z=$ （ A ）

A. $-i$　　B. i

C. -1　　D. 1

【解析】 $z=\frac{1}{i}=-i$．故选 A．

2. 计算 $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^7}=$ （ A ）

A. 0　　B. 2i

C. $-2i$　　D. 4i

【解析】 $\frac{1}{i}=-i$，$\frac{1}{i^3}=i$，$\frac{1}{i^5}=-i$，$\frac{1}{i^7}=i$，

∴ $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^7}=0$．故选 A．

3. 已知复数 z 满足 $(3+4i)z=25$，则 $z=$ （ D ）

A. $-3+4i$　　B. $-3-4i$

C. $3+4i$　　D. $3-4i$

【解析】 方法一：由 $(3+4i)z=25$，

得 $z=\frac{25}{3+4i}=\frac{25(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=3-4i.$

方法二：设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $(3+4i)(a+bi)=25$，

即 $3a-4b+(4a+3b)i=25$，所以 $\begin{cases}3a-4b=25,\\4a+3b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-4,\end{cases}$ 故 $z=3-4i$．故选 D．

4. 在复平面内，复数 $\frac{i}{1+i}+(1+\sqrt{3}i)^2$ 对应的点位于 （ B ）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【解析】 $\frac{i}{1+i}+(1+\sqrt{3}i)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+(-2+2\sqrt{3}i)=-\frac{3}{2}+\left(2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)i$，在复平面内对应的点的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)$，在第二象限．故选 B．

5. 已知复数 $z=(1+2i)(3-i)$，则 z 的实部是 _5_．

【解析】 $z=(1+2i)(3-i)=5+5i$．故 z 的实部为 5．

温馨提示：请自主完成课后作业（十九）

课后作业·单独成册

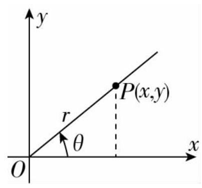
7.3* 复数的三角表示

学习目标	核心素养
1. 掌握复数的三角形式，熟练进行复数的代数形式与三角形式之间的转化.(重点) 2. 掌握复数三角形式的乘、除运算并了解复数的三角形式的乘、除运算的三角表示的几何意义.	1. 通过学习复数的三角表示与复数的辐角及辐角的主值的含义，培养数学抽象与直观想象素养. 2. 学习复数的代数形式与三角形式之间的转化及三角形式的乘、除运算，可以培养数学运算素养.

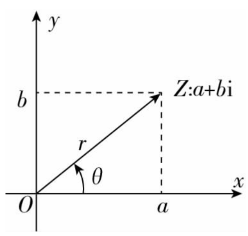
自主预习

情景导思

1. 如图，角 θ 的终边上一点 $P(x,y)$，设 P 到原点 O 的距离 $|OP|=r$，则怎样利用角 θ 和 r 表示 x,y?



2. 我们知道，复数可以用 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式来表示，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 一一对应，与平面向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 也是一一对应的，如图，你能用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模 r 和以 x 轴的非负半轴为始边，以向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线(射线 OZ)为终边的角 θ 来表示复数 z 吗?



知新预学

1. 复数的辐角

以 x 轴的非负半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线为终边的角，叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的辐角.

在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 范围内的辐角 θ 的值 为辐角的主值. 记作：$\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$.

2. 复数的三角表示式

一般地，任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 都可以表示成 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的形式. 其中，r 是复数 z 的模，θ 是复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的辐角. $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的三角表示式，简称三角形式. 为了与三角形式区分开来，$a+b\mathrm{i}$ 叫做复数的代数表示式，简称代数形式.

3. 两个用三角形式表示的复数相等的充要条件

两个非零复数相等当且仅当它们的 模与辐角的主值 分别相等.

4. 复数三角形式的乘法

设复数 z_1,z_2 的三角形式分别是：$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，

则 $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$.

5. 复数三角形式的除法

设复数 z_1,z_2 的三角形式分别是：$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，且 $z_2\neq0$，

则 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

小试牛刀

1. 复数 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化成三角形式，正确的是 (B)

A. $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　B. $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

C. $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$　　D. $2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

2. “两个复数 z_1,z_2 的模与辐角分别相等”是“$z_1=z_2$”成立的 (A)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. $4(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)\div2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=$ (C)

A. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

4. 复数 $-2(\sin10^\circ+\mathrm{i}\cos10^\circ)$ 的三角形式为 $2(\cos260^\circ+\mathrm{i}\sin260^\circ)$.

5. $2(\cos210^\circ+\mathrm{i}\sin210^\circ)\times5(-\sin30^\circ+\mathrm{i}\sin60^\circ)=$ $5\sqrt{3}-5\mathrm{i}$ (用代数形式表示).

互动课堂

合作探究

探究1 复数的三角形式的概念

【例1】下列复数是不是三角形式? 若不是，把它们表示成三角形式：

(1) $z_1=\cos60^\circ+\mathrm{i}\sin30^\circ$；

(2) $z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$；

(3)$z_3=-\sin\theta+i\cos\theta$.

【解析】(1)不是三角形式.

$z_1=\cos 60°+i\sin 30°=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\theta=\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$z_1$ 在复平面上对应的点在第一象限，所以取 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

即 $z_1=\cos 60°+i\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)不是三角形式. 其在复平面上对应的点 $Z_2\left(2\cos\frac{\pi}{5},-2\sin\frac{\pi}{5}\right)$在第四象限，且不需要改变三角函数名称，

所以 $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$=2\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$.

(3)不是三角形式. 其在复平面上对应的点 $Z_3(-\sin\theta,\cos\theta)$在第二象限(假定 θ 为锐角)，需要改变三角函数名称，

所以 $z_3=-\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$.

点睛 复数三角形式的判断依据和变形步骤.

(1)判断依据：三角形式的结构特征为模非负、角相同、余弦前、加号连.

(2)变形步骤：首先确定复数 z 在复平面上的对应点所在象限(此处可假定 θ 为锐角)，其次判断是否要变换三角函数名称，最后确定辐角. 此步骤可简称为"定点→定名→定角".

【变式训练 1】下列复数是不是三角形式？若不是，把它们表示成三角形式：

(1)$z_1=2\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$；

(2)$z_2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$；

(3)$z_3=-2(\cos\theta+i\sin\theta)$.

【解析】(1)$z_1=2\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$符合复数三角形式的结构特征，是三角形式.

(2)z_2 不是三角形式.

$z_2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$，

$r=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 复数在复平面上对应的点在第三象限，所以取 $\theta=\frac{4}{3}\pi$，

即 $z_2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

(3)z_3 不是三角形式.

其对应复平面上的点 $Z(-2\cos\theta,-2\sin\theta)$在第三象限(假定 θ 为锐角)，余弦"$-\cos\theta$"已在前，不需要变换三角函数名称，所以 $z_3=-2(\cos\theta+i\sin\theta)=2[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$.

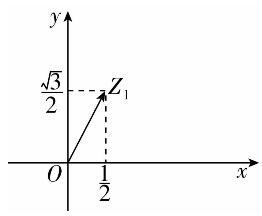
探究 2 将复数的代数形式表示成三角形式

【例 2】画出下列复数在复平面内的对应向量，并把这些复数表示成三角形式：

(1)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$；

(2)$1-i$.

【解析】(1)复数 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 在复平面内对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 如图所示，



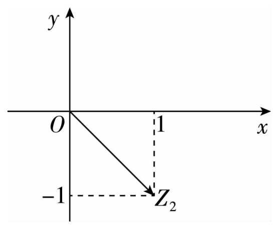
则 $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 在复平面上对应的点在第一象限，

$\therefore \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

(2)复数 $1-i$ 在复平面内对应的向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 如图所示，



则 $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because 1-i$ 在复平面上对应的点在第四象限，所以 $\arg(1-i)=\frac{7\pi}{4}$.

$\therefore 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

点睛 将复数的代数形式化为三角形式的步骤：

(1)先求复数的模；

(2)确定辐角所在的象限；

(3)根据象限求出辐角(常取它的主值)；

(4)写出复数的三角形式.

【变式训练 2】把下列复数表示成三角形式：

(1)1；(2)$-2i$；(3)$\sqrt{3}-i$.

【解析】(1)$r=1$，在复平面内对应的点在 x 轴的正半轴上，$\therefore \arg 1=0$. $\therefore 1=\cos 0+i\sin 0$.

(2)$r=2$，在复平面内对应的点在 y 轴的负半轴上，$\therefore \arg(-2i)=\frac{3\pi}{2}$，$\therefore -2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

(3)$r=2$，在复平面内对应的点在第四象限，且 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴取辐角 $\theta=\frac{11\pi}{6}$．∴$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$．

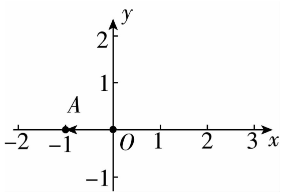
探究 3 将复数的三角形式表示成代数形式

【例 3】分别指出下列复数的模和一个辐角，画出它们在复平面内对应的向量，并把这些复数表示成代数形式：

(1)$\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$；

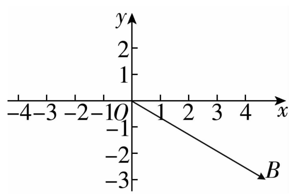
(2)$6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$．

【解析】(1)复数 $\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$ 的模 $r=1$，一个辐角 $\theta=\pi$，在复平面内对应的向量如图 $\overrightarrow{OA}$ 所示．



且 $\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1+0\cdot\mathrm{i}=-1$．

(2)复数 $6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ 的模 $r=6$，一个辐角 $\theta=\frac{11\pi}{6}$，在复平面内对应的向量如图 $\overrightarrow{OB}$ 所示．



且 $6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)=6\cos\frac{11\pi}{6}+\left(6\sin\frac{11\pi}{6}\right)\mathrm{i}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}+6\times\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{i}=3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$．

点睛 将复数的三角形式表示成代数形式时，直接求出三角函数值，化简即可．

【变式训练 3】把下列复数表示成代数形式：

(1)$z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(2)$z_2=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$；

(3)$z_3=5(\cos 135^\circ+\mathrm{i}\sin 135^\circ)$．

【解析】(1)$z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times\frac{1}{2}\mathrm{i}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$．

(2)$z_2=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$=2\times0+2\times(-1)\mathrm{i}$

$=-2\mathrm{i}$．

(3)$z_3=5(\cos 135^\circ+\mathrm{i}\sin 135^\circ)$

$=5\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}=-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$．

探究 4 复数的三角形式的乘法运算

【例 4】已知 $z_1=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$，求 z_1z_2，请把结果化为代数形式，并作出几何解释．

【解析】$z_1z_2=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\times2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{3}{4}\times2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$=\frac{3}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}\mathrm{i}$．

首先作与 z_1，z_2 在复平面内对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，然后把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，再将其长度伸长为原来的 2 倍，这样得到一个长度为 $\frac{3}{2}$，辐角为 $\frac{5\pi}{6}$ 的向量 $\overrightarrow{OZ}$．

点睛 复数的三角形式的乘法运算的注意事项．

两个复数相乘，积还是一个复数，它的模等于各复数的模的积，它的辐角等于各复数的辐角之和．简单地说，两个复数的三角形式的乘法运算法则为：模数相乘，辐角相加．

【变式训练 4】计算下列各式：

(1)$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\times2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$；

(2)$2(\cos 15^\circ+\mathrm{i}\sin 15^\circ)\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$．

【解析】(1)$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\times2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$=6(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-6$．

(2)$2(\cos 15^\circ+\mathrm{i}\sin15^\circ)\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

$=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$．

探究 5 复数的三角形式的除法运算

【例 5】计算：

$3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$．

【解析】原式$=\frac{3}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\frac{3}{2}\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}=-\frac{3}{2}\mathrm{i}$．

点睛 复数的三角形式的除法运算的注意事项.

两个复数相除,商还是一个复数,它的模等于被除数的模除以除数的模,它的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角.简单地说,两个复数三角形式的除法运算法则为:模数相除,辐角相减.

【变式训练5】计算下列各式:

(1)$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\div[\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)]$;

(2)$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

【解析】(1)$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\div[\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)]$

$=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$=\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

$=\sqrt{2}\times\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$=\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)$

$=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$.

(2)$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}i$.

随堂小练

1. 下列复数是三角形式的是 (D)

A. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ B. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

C. $-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ D. $2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$

【解析】复数的三角形式是$r(\cos\theta+i\sin\theta)$,其中$r>0$,A,B,C均不是这种形式,故选D.

2. 已知$z_1=\sqrt{2}(\cos 60°+i\sin 60°)$,$z_2=2\sqrt{2}(\sin 30°-i\cos 30°)$,则$z_1z_2=$ (D)

A. $4(\cos 90°+i\sin 90°)$ B. $4(\cos 30°+i\sin 30°)$

C. $4(\cos 30°-i\sin 30°)$ D. $4(\cos 0°+i\sin 0°)$

【解析】$\because z_2=2\sqrt{2}(\sin 30°-i\cos 30°)=2\sqrt{2}(\cos 300°+i\sin 300°)$,

$\therefore z_1z_2=\sqrt{2}(\cos 60°+i\sin 60°)\cdot 2\sqrt{2}(\cos 300°+i\sin 300°)=4(\cos 360°+i\sin 360°)=4(\cos 0°+i\sin 0°)$.

故选D.

3. $2\div 2(\cos 60°+i\sin 60°)=$ (B)

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

【解析】$2\div 2(\cos 60°+i\sin 60°)$

$=2(\cos 0°+i\sin 0°)\div 2(\cos 60°+i\sin 60°)$

$=\cos(0°-60°)+i\sin(0°-60°)$

$=\cos(-60°)+i\sin(-60°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

故选B.

4. 把复数$\sqrt{3}-i$化为三角形式(辐角取辐角主值)为 $\underline{2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}$.

【解析】复数$\sqrt{3}-i$的模为2,设复数的辐角主值为$\theta\in[0,2\pi)$,

由复数的三角形式得,$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin\theta=-\frac{1}{2}$,

$\therefore\theta=\frac{11\pi}{6}$,$\therefore$复数表示为三角形式为$2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

5. 在复平面内,把与复数$-i$对应的向量绕原点O按逆时针方向旋转45°,所得向量对应的复数为z,则复数$z=$ $\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$ (用代数形式表示).

【解析】由题意得$z=(\cos 45°+i\sin 45°)\times(-i)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\times(-i)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十)

课后作业·单独成册

三、知能拓展

复数复习

核心梳理

1. 复数的有关概念

(1)虚数单位 i;

(2)复数的代数形式 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$;

(3)复数的实部、虚部,虚数与纯虚数.

2. 复数集

$$\text{复数 }a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}\text{实数}(b=0)\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}\\ \text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

3. 复数的四则运算

若两个复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$,$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}(a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbf{R})$.

(1)加法:$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}$;

(2)减法:$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i}$;

(3)乘法:$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}$;

(4)除法:$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\mathrm{i}}{a_2^2+b_2^2}$

$=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\mathrm{i}(z_2\neq0)$;

(5)实数四则运算的交换律、结合律、分配律都适合于复数的情况;

(6)特殊复数的运算:i^n(n 为正整数)的周期性运算;$(1\pm\mathrm{i})^2=\pm2\mathrm{i}$;若 $\omega=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则 $\omega^3=1,1+\omega+\omega^2=0$.

4. 共轭复数与复数的模

(1)若 $z=a+b\mathrm{i}$,则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$,$z+\overline{z}$ 为实数,$z-\overline{z}$ 为纯虚数($b\neq0$).

(2)复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$,且 $z\overline{z}=|z|^2=a^2+b^2$.

5. 复数的几何形式

任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$一一对应着复平面内的一个点$Z(a,b)$,也一一对应着一个从原点出发的向量 $\overrightarrow{OZ}$(坐标原点对应实数 0).

$$\begin{tikzcd}
 & z=a+bi \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\
Z(a,b) \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left] & & \overrightarrow{OZ} \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left]
\end{tikzcd}$$

6. 复数加、减法的几何意义

(1)复数加法的几何意义

若复数 z_1,z_2 在复平面内对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线,则复数 z_1+z_2 是以 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数.

(2)复数减法的几何意义

复数 z_1-z_2 是连接向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 的终点,并指向点 Z_1 的向量所对应的复数.

重难突破

要点 1 复数的基本概念

【例 1】满足 $z+\dfrac{5}{z}$ 是实数,且 $z+3$ 的实部与虚部是相反数的虚数 z 是否存在?若存在,求出虚数 z;若不存在,请说明理由.

【解析】存在,理由如下:

设虚数 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R}$,且 $y\neq0)$,

则 $z+\dfrac{5}{z}=x+y\mathrm{i}+\dfrac{5}{x+y\mathrm{i}}=x+\dfrac{5x}{x^2+y^2}+\left(y-\dfrac{5y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{i}$,$z+3=(x+3)+y\mathrm{i}$.

由题意得$\begin{cases}y-\dfrac{5y}{x^2+y^2}=0,\\ x+3=-y,\end{cases}$

$\because y\neq0$,$\therefore\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ x+y=-3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=-1,\\ y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\ y=-1.\end{cases}$

$\therefore$存在虚数 $z=-1-2\mathrm{i}$ 或 $z=-2-\mathrm{i}$ 满足条件.

点睛 复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$是由它的实部和虚部唯一确定的,把复数问题转化为实数问题是解决复数问题的主要方法和途径.在两个复数相等的充要条件中,注意当 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 时,才能由 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$ 推出 $a=c$ 且 $b=d$,否则不成立.

【变式训练 1】设 $z\in\mathbf{C}$,满足 $z+\dfrac{1}{z}\in\mathbf{R}$,$z-\dfrac{1}{4}$ 是纯虚数,求 z.

【解析】设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,

则 $z+\dfrac{1}{z}=(x+y\mathrm{i})+\dfrac{1}{x+y\mathrm{i}}=\left(x+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)+\left(y-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{i}$.

$\because z+\dfrac{1}{z}\in\mathbf{R}$,$\therefore y-\dfrac{y}{x^2+y^2}=0$,

解得 $y=0$ 或 $x^2+y^2=1$.

又$\because z-\dfrac{1}{4}=\left(x-\dfrac{1}{4}\right)+y\mathrm{i}$ 是纯虚数,

$\therefore x-\dfrac{1}{4}=0$ 且 $y\neq0$.

$\therefore x=\dfrac{1}{4}$,$y=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,$\therefore$复数 $z=\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}$.

要点2 复数的四则运算

【例2】计算：$\dfrac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2020}+\dfrac{(4-8i)^2-(-4+8i)^2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}i}$.

【解析】原式$=\dfrac{i(1+2\sqrt{3}i)}{1+2\sqrt{3}i}+\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right]^{1010}+$

$\dfrac{(4-8i+8i-4)(4-8i+4-8i)}{\sqrt{11}-\sqrt{7}i}$

$=i+(-i)^{1010}+0=-1+i$.

点睛 1. 复数的运算包括加、减、乘、除，复数的四则运算一般用代数形式，加、减、乘运算按多项式运算法则计算，除法运算需把分母实数化. 复数的代数运算与实数有密切联系，但又有区别，在运算中要特别注意实数范围内的运算法则在复数范围内是否适用. 在解题时应遵循"先定性、后解题"的原则，化虚为实，充分利用复数的概念及运算性质实施等价转化.

2. 运算过程常用的公式有：

(1)$i^{4n}=1,i^{4n+1}=i,i^{4n+2}=-1,i^{4n+3}=-i(n\in\mathbf{N}^*)$；

(2)$(1\pm i)^2=\pm 2i$；

(3)$\left(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-1$.

3. 在解答与复数的模有关的问题时，重视应用下列公式：

(1)$z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$；

(2)$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|,|z^n|=|z|^n$；

(3)$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

【变式训练2】已知复数$z=(1+2i)(-2+i)-\dfrac{3+i}{1+i}$.

(1)计算复数z；

(2)若$z^2+(2a-1)z-(1-i)b-16=0$，求实数a,b的值.

【解析】(1)$z=(1+2i)(-2+i)-\dfrac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-4-3i-\dfrac{4-2i}{2}=-4-3i-(2-i)=-6-2i$.

(2)$\because(-6-2i)^2+(2a-1)(-6-2i)-(1-i)b-16=0$,

$\therefore 32+24i-6(2a-1)-2(2a-1)i-b+bi-16=0$,

$\because a,b\in\mathbf{R}$,

$\therefore 22-12a-b+(26-4a+b)i=0$,

$\therefore\begin{cases}22-12a-b=0,\\26-4a+b=0.\end{cases}$

解得$a=3,b=-14$.

要点3 复数与其他知识的综合应用

【例3】设复数z的共轭复数为$\overline{z}$，且$4z+2\overline{z}=3\sqrt{3}+i$，$\omega=\sin\theta-i\cos\theta$，复数$z-\omega$对应复平面内的向量为$\overrightarrow{OM}$. 求复数$z$和$|\overrightarrow{OM}|$的取值范围.

【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$\overline{z}=a-bi$，

代入$4z+2\overline{z}=3\sqrt{3}+i$，得$4(a+bi)+2(a-bi)=3\sqrt{3}+i$，

即$6a+2bi=3\sqrt{3}+i$，$\therefore\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\b=\dfrac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

$|z-\omega|=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i-(\sin\theta-i\cos\theta)\right|$

$=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}+\cos\theta\right)^2}$

$=\sqrt{2-2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

$\because -1\leqslant\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,

$\therefore 0\leqslant 2-2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 4$.

$\therefore 0\leqslant|z-\omega|\leqslant 2$，即$|\overrightarrow{OM}|$的取值范围是$[0,2]$.

点睛 复数具有代数形式，且复数$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$与复平面内的点$Z(a,b)$之间建立了一一对应关系，复数又是数形结合的桥梁，要注意复数与方程、函数等知识的交汇.

【变式训练3】复数z满足$|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$，求$|z|$的最大值和最小值.

【解析】方法一：$|z+3-\sqrt{3}i|\geqslant||z|-|3-\sqrt{3}i||$，

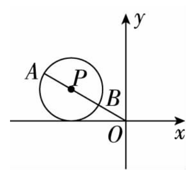
又$\because|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$，$|3-\sqrt{3}i|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，

$\therefore||z|-2\sqrt{3}|\leqslant\sqrt{3}$，

即$\sqrt{3}\leqslant|z|\leqslant 3\sqrt{3}$，

$\therefore|z|$的最大值为$3\sqrt{3}$，最小值为$\sqrt{3}$.

方法二：$|z+3-\sqrt{3}i|=|z-(-3+\sqrt{3}i)|=\sqrt{3}$表示以复数$-3+\sqrt{3}i$在复平面内对应的点$P$为圆心，以$\sqrt{3}$为半径的圆，如图所示，



则$|OP|=|-3+\sqrt{3}i|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，

显然，$|z|_{max}=|OA|=|OP|+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，

$|z|_{min}=|OB|=|OP|-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

拓展提升

1. 在复平面内，复数$i(2+i)$对应的点的坐标为 (C)

A. $(1,2)$　　B. $(2,1)$

C. $(-1,2)$　　D. $(2,-1)$

【解析】复数$i(2+i)=2i-1$对应的点的坐标为$(-1,2)$，故选C.

2. 已知复数$z=\dfrac{1-i}{i}$，则复数z的虚部是 (B)

A. 1　　B. -1

C. i　　D. $-i$

【解析】$\because z=\dfrac{1-i}{i}=\dfrac{i+1}{-1}=-1-i$，

$\therefore$复数z的虚部是-1，故选B.

3. $(1-i)(3-i)$在复平面内对应的点位于 (D)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【解析】因为$(1-i)(3-i)=2-4i$，

所以其在复平面内对应的点位于第四象限，故选D.

4. 若复数 $z=\frac{a}{1-2i}+i(a\in\mathbf{R})$ 的实部与虚部互为相反数，则 $a=$ （ A ）

A. $-\frac{5}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. -1　　D. -5

【解析】复数 $z=\frac{a}{1-2i}+i=\frac{a(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}+i=\frac{a}{5}+\left(\frac{2a}{5}+1\right)i$，由题意可知，$\frac{a}{5}+\left(\frac{2a}{5}+1\right)=0$，解得 $a=-\frac{5}{3}$，故选 A.

5. 若 $iz=1-2i$，则 $|z|=$ （ B ）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$

C. 3　　D. 5

【解析】$\because i\cdot z=1-2i$，$\therefore z=\frac{1-2i}{i}=\frac{(1-2i)(-i)}{-i^2}=-2-i$，

$\therefore |z|=\sqrt{5}$，故选 B.

6. 复数 $(1+i)^2+\frac{2}{1+i}$ 的共轭复数是 （ B ）

A. $1+i$　　B. $1-i$

C. $-1+i$　　D. $-1-i$

【解析】因为 $(1+i)^2+\frac{2}{1+i}=1+2i-1+\frac{2\cdot(1-i)}{2}=1+i$，故其共轭复数是 $1-i$，故选 B.

7. 复数 $z=(1-mi)^2$ 为纯虚数，则实数 $m=$ （ A ）

A. ±1　　B. -1

C. 1　　D. 0

【解析】复数 $z=m^2i^2-2mi+1=1-m^2-2mi$.

因为复数 z 为纯虚数，则 $1-m^2=0$，$2m\neq0$，

解得 $m=\pm1$，故选 A.

8. 定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，若复数 z 满足 $\begin{vmatrix} z & 1 \\ -i & i \end{vmatrix}=1+2i$，则 $z=$ （ B ）

A. $1+i$　　B. $1-i$

C. $3+i$　　D. $3-i$

【解析】根据题意知，$\begin{vmatrix} z & 1 \\ -i & i \end{vmatrix}=zi+i=1+2i$，

$\therefore z=\frac{1+i}{i}=1-i$. 故选 B.

温馨提示：请自主完成课后作业（二十一）

课后作业 · 单独成册

第八章 立体几何初步

一、课标导向

课标要求

1. 基本立体图形

(1)利用实物、计算机软件等观察空间图形,认识柱、锥、台、球及简单组合体的结构特征,能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

(2)知道球、棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积的计算公式,能用公式解决简单的实际问题.

(3)能用斜二测画法画出简单空间图形(长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱及其简单组合体)的直观图.

2. 基本图形的位置关系

(1)借助长方体,在直观认识空间点、直线、平面的位置关系的基础上,抽象出空间点、直线、平面的位置关系的定义,了解以下基本事实和定理.

基本事实1:过不在一条直线上的三个点,有且只有一个平面.

基本事实2:如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线在这个平面内.

基本事实3:如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

基本事实4:平行于同一条直线的两条直线平行.

定理:如果空间中两个角的两条边分别对应平行,那么这两个角相等或互补.

(2)从上述定义和基本事实出发,借助长方体,通过直观感知,了解空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直的关系,归纳出以下性质定理,并加以证明.

①一条直线与一个平面平行,如果过该直线的平面与此平面相交,那么该直线与交线平行.

②两个平面平行,如果另一个平面与这两个平面相交,那么两条交线平行.

③垂直于同一个平面的两条直线平行.

④两个平面垂直,如果一个平面内有一条直线垂直于这两个平面的交线,那么这条直线与另一个平面垂直.

(3)从上述定义和基本事实出发,借助长方体,通过直观感知,了解空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直的关系,归纳出以下判定定理.

①如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行,那么该直线与此平面平行.

②如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行,那么这两个平面平行.

③如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直,那么该直线与此平面垂直.

④如果一个平面过另一个平面的垂线,那么这两个平面垂直.

(4)能用已获得的结论证明空间基本图形位置关系的简单命题.

3. 几何学的发展(选学内容,不作为考试要求)

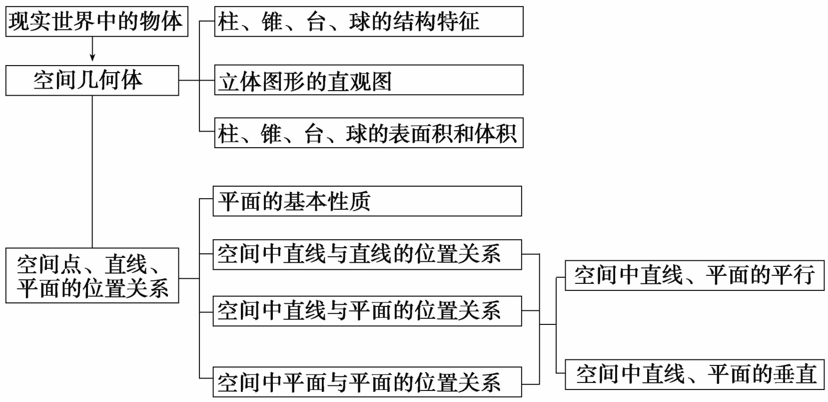
收集、阅读几何学发展的历史资料,撰写小论文,论述几何学发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

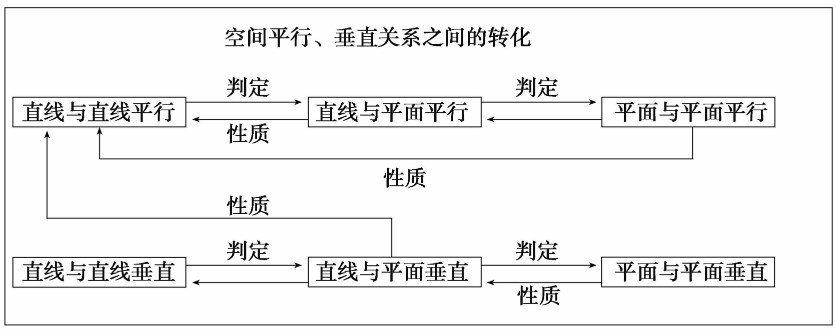
学习建议

1. 了解基本立体图形及简单组合体的结构特征,掌握简单几何体的表面积及体积的计算方法,会用斜二测画法画出简单空间图形的直观图.

2. 以长方体为载体,认识和理解空间点、直线、平面的位置关系,熟练用文字、图形、符号等语言表述有关平行、垂直的性质与判定,并对某些结论进行证明.

知识网络


现实世界中的物体
空间几何体
柱、锥、台、球的结构特征
立体图形的直观图
柱、锥、台、球的表面积和体积
空间点、直线、平面的位置关系
平面的基本性质
空间中直线与直线的位置关系
空间中直线与平面的位置关系
空间中平面与平面的位置关系
空间中直线、平面的平行
空间中直线、平面的垂直


空间平行、垂直关系之间的转化
直线与直线平行
判定
性质
直线与平面平行
判定
平面与平面平行
性质
性质
直线与直线垂直
判定
直线与平面垂直
判定
性质
平面与平面垂直

二、精讲精练

8.1 基本立体图形

第1课时 棱柱、棱锥、棱台

学习目标	核心素养
1. 通过对实物模型的观察，归纳认知简单多面体——棱柱、棱锥、棱台的结构特征.（重点） 2. 能运用棱柱、棱锥、棱台的结构特征解决简单多面体的有关计算.（重点、难点）	1. 通过对多面体概念的学习，逐步形成数学抽象素养. 2. 对简单多面体的结构特征进行认识和学习，培养数学直观想象的素养.

自主预习

情景导思

上海世博园中国馆建筑外观以“东方之冠，鼎盛中华，天下粮仓，富庶百姓”为构思主题，表达了中国文化的精神与气质. 它是建筑师们集体智慧的结晶. 那么，我们如何从几何的角度来看待这个标志性建筑呢？

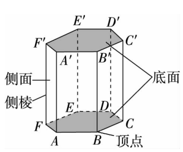
知新预学

1. 多面体与旋转体

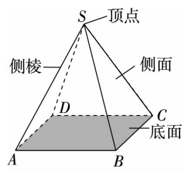
(1)多面体：我们把若干个平面多边形围成的几何体叫做<u>多面体</u>. 其中棱柱、棱锥、棱台都是<u>简单多面体</u>. 围成多面体的各个多边形叫做多面体的<u>面</u>. 两个面的公共边叫做多面体的<u>棱</u>. 棱与棱的交点叫做多面体的<u>顶点</u>.

(2)旋转体：一条平面曲线绕它所在平面内的<u>一条定直线</u>旋转所形成的曲面叫做旋转面，<u>封闭的旋转面</u>围成的几何体叫做旋转体.

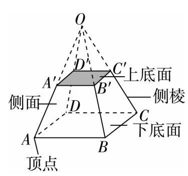
2. 棱柱的结构特征

定义	图形及表示	相关概念	分类
两个面互相<u>平行</u>，其余各面都是<u>四边形</u>，并且相邻两个四边形的公共边都互相<u>平行</u>，由这些面围成的多面体叫做棱柱	 如图可记作：棱柱 $ABCDEF$-$A'B'C'D'E'F'$	棱柱的底面：两个互相平行的面. 棱柱的侧面：其余各面. 棱柱的侧棱：两个相邻侧面的公共边. 棱柱的顶点：底面多边形与侧面的公共顶点	按底面多边形的边数分：三棱柱、四棱柱…… 按侧棱与底面位置关系分：直棱柱与斜棱柱

3. 棱锥的结构特征

定义	图形及表示	相关概念	分类
有一个面是<u>多边形</u>，其余各面都是有一个公共顶点的<u>三角形</u>，由这些面围成的多面体叫做棱锥	 如图可记作：棱锥 S-$ABCD$	棱锥的底面：多边形面. 棱锥的侧面：有公共顶点的各个三角形面. 棱锥的侧棱：相邻侧面的公共边. 棱锥的顶点：各侧面的公共顶点	按底面多边形的边数分：三棱锥、四棱锥……

4. 棱台的结构特征

定义	图形及表示	相关概念	分类
用一个<u>平行于棱锥底面</u>的平面去截棱锥，底面与截面之间的那部分多面体叫做棱台	 如图可记作：棱台 $ABCD$-$A'B'C'D'$	棱台的上底面：原棱锥的截面. 棱台的下底面：原棱锥的底面. 棱台的侧面：其余各面. 棱台的侧棱：相邻侧面的公共边. 棱台的顶点：侧面与上(下)底面的公共顶点	由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台……

小试牛刀

1. (多选题)下列说法正确的是 (ABC)

A. 多面体至少有四个面

B. 九棱柱有 9 条侧棱,9 个侧面,侧面为平行四边形

C. 长方体、正方体都是棱柱

D. 三棱柱的侧面为三角形

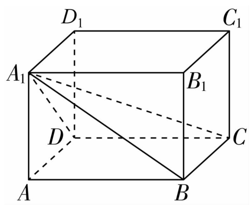
【解析】由于三棱柱的侧面为平行四边形,选项 D 错误. 故选 ABC.

2. 在四棱锥的四个侧面中,直角三角形最多可有 (D)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

【解析】如图所示,在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,取四棱锥 $A_1\text{-}ABCD$,则此四棱锥的四个侧面都是直角三角形. 故选 D.



3. 有一个正三棱锥和一个正四棱锥,它们所有的棱长都相等,把这个正三棱锥的一个侧面重合在正四棱锥的一个侧面上,所得到的组合体是 (D)

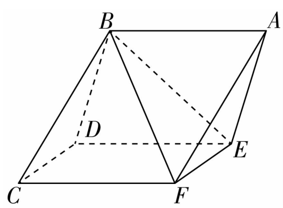
A. 底面为平行四边形的四棱柱

B. 五棱锥

C. 无平行平面的六面体

D. 斜三棱柱

【解析】如图,正三棱锥 $A\text{-}BEF$ 和正四棱锥 $B\text{-}CDEF$ 的一个侧面重合后,平面 BCD 和平面 AEF 平行,其余各面都是平行四边形,故该组合体是斜三棱柱. 故选 D.



4. 对棱柱而言,下列说法正确的是<u> ①③ </u>.

①有两个平面互相平行,其余各面都是平行四边形;

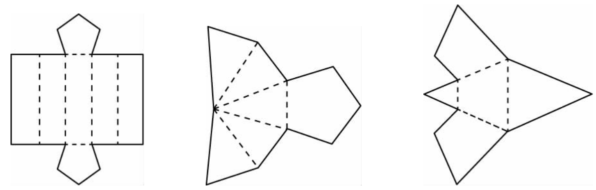
②所有的棱长都相等;

③棱柱中至少有两个面的形状完全相同;

④相邻两个面的交线叫做侧棱.

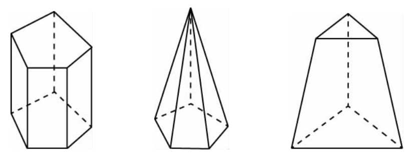
【解析】①正确,根据棱柱的定义可知;②错误,因为侧棱长与底面上的棱长不一定相等;③正确,根据棱柱的特征知,棱柱中上下两个底面一定是全等的,即棱柱中至少有两个面的形状完全相同;④错误,因为底面和侧面的交线不是侧棱.

5. 如图是三个几何体的侧面展开图,请问它们各是什么几何体?



(1)　　(2)　　(3)

【解析】由几何体的侧面展开图的特点,结合棱柱、棱锥、棱台的定义,可把侧面展开图还原为原几何体,如图所示:



(1)　　(2)　　(3)

所以(1)为五棱柱,(2)为五棱锥,(3)为三棱台.

互动课堂

合作探究

探究 1　棱柱的结构特征

【例 1】下列说法中,正确的是 (D)

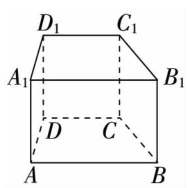
A. 棱柱中所有的侧棱都相交于一点

B. 棱柱中互相平行的两个面叫做棱柱的底面

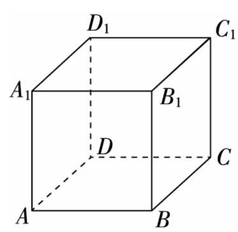
C. 棱柱的侧面是平行四边形,而底面不是平行四边形

D. 棱柱的侧棱相等,侧面是平行四边形

【解析】A 选项不符合棱柱的特点;B 选项中,如图①,构造四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,令四边形 $ABCD$ 是梯形,可知平面 ABB_1A_1 // 平面 DCC_1D_1,但这两个面不能作为棱柱的底面;C 选项中,如图②,底面四边形 $ABCD$ 可以是平行四边形;D 选项是棱柱的特点. 故选 D.



图①



图②

点睛 棱柱的结构特征:

(1)两底面互相平行;

(2)侧面都是平行四边形;

(3)每相邻两个四边形的公共边即侧棱都互相平行且长度相等.

【变式训练 1】根据下列关于空间几何体的描述,说出几何体的名称:

(1)由 6 个平行四边形围成的几何体;

(2)由 8 个面围成,其中两个面是平行且全等的六边形,其余 6 个面都是平行四边形.

【解析】(1)这是一个上、下底面是平行四边形,四个侧面也

是平行四边形的四棱柱.

(2)该几何体是六棱柱.

探究 2 棱锥、棱台的结构特征

【例 2】下列关于棱锥、棱台的说法中,正确的是<u>①②</u>.

①棱台的侧面一定不会是平行四边形;

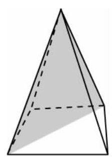
②由四个平面围成的封闭图形只能是三棱锥;

③棱锥被平面截成的两部分不可能都是棱锥.

【解析】①正确,棱台的侧面一定是梯形,而不是平行四边形;

②正确,由四个平面围成的封闭图形只能是三棱锥;

③错误,如图所示的四棱锥被平面截成的两部分都是棱锥.



点睛 判断棱锥、棱台形状的两个方法.

(1)举反例法:结合棱锥、棱台的定义举反例,直接判断关于棱锥、棱台结构特征的某些说法不正确.

(2)直接法:

名称	棱锥	棱台
定底面	只有一个面是多边形,此面即为底面	两个互相平行的面,即为底面
看侧棱	相交于一点	延长后相交于一点

【变式训练 2】下列命题中正确的是 (C)

A. 有两个面平行,其余各面都是四边形的几何体叫棱柱

B. 有两个面平行,其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱

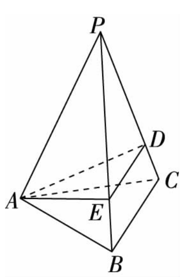
C. 一个棱柱至少有五个面、六个顶点、九条棱

D. 棱柱的侧棱长有的都相等,有的不都相等

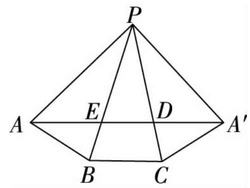
【解析】A,B都不能保证侧棱平行这个结构特征,对于D,由棱柱的结构特征知侧棱都相等,故A,B,D都不正确. 最简单的棱柱是三棱柱,有五个面、六个顶点、九条棱. 故选C.

探究 3 多面体的表面展开图问题

【例 3】如图所示,已知三棱锥 P-ABC 的底面是正三角形且三条侧棱两两成 $30°$角,侧棱长为 18 cm,从点 A 引一条丝带绕侧面一周回到 A 点,设 D,E 分别为丝带经过 PC,PB 时的交点,则△ADE 周长的最小值为多少?



【解析】把三棱锥 P-ABC 的侧面沿侧棱 PA 剪开,并展开在平面上,得到平面图形 $PABCA'$,如图所示,则当 A,E,D,A'四点共线时,△ADE 的周长取得最小值,即线段 AA'的长度.



$\because \angle APB=\angle BPC=\angle CPA'=30°$,

$\therefore \angle APA'=90°$.

又 $AP=A'P=18$ (cm),$\therefore AA'=18\sqrt{2}$ (cm).

则△ADE 周长的最小值为 $18\sqrt{2}$ cm.

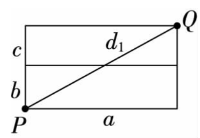
点睛 多面体表面展开图问题的解题策略.

(1)绘制展开图:绘制多面体的表面展开图要结合多面体的几何特征,发挥空间想象能力或者亲手制作多面体模型. 在解题过程中,常常给多面体的顶点标上字母,先把多面体的底面画出来,然后依次画出各侧面,便可得到其表面展开图.

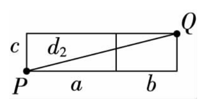
(2)已知展开图:若是给出多面体的表面展开图,来判断是由哪一个多面体展开的,则可把上述过程逆推. 同一个几何体的表面展开图可能是不一样的,也就是说,一个多面体可有多个表面展开图.

【变式训练 3】长方体中,a,b,c 为棱长,且 $a>b>c$,求沿长方体表面从 P 到 Q 的最小距离(其中 P,Q 是长方体体对角线的两个端点).

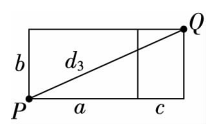
【解析】将长方体展开,有三种情况(如图).



图①



图②



图③

$d_1=\sqrt{a^2+(b+c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$,

$d_2=\sqrt{c^2+(a+b)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$,

$d_3=\sqrt{b^2+(a+c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$,

因为 $a>b>c$,故 $d_{min}=d_1=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$.

随堂小练

1. 一般棱台不具有的性质是 (C)

A. 两底面相似　　B. 侧面都是梯形

C. 侧棱都相等　　D. 侧棱延长后都交于一点

【解析】当棱台是斜棱台时其侧棱不全相等. 故选C.

2. (多选题)下列关于棱柱的说法正确的是 (ABD)

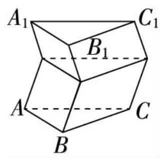
A. 所有的棱柱两个底面都平行

B. 所有的棱柱一定有两个面互相平行，其余各面每相邻两个面的公共边互相平行

C. 有两个面互相平行，其余各面都是四边形的几何体一定是棱柱

D. 棱柱至少有五个面

【解析】对于 A，B，D，显然是正确的；对于 C，棱柱的定义是这样的：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，这些面围成的几何体叫做棱柱，显然题中漏掉了“并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行”这一条件，因此所围成的几何体不一定是棱柱. 如图所示的几何体就不是棱柱，所以 C 错误. 故选 ABD.



3. 若棱台上、下底面的对应边之比为 1∶2，则上、下底面的面积之比是 (B)

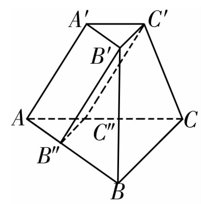
A. 1∶2 B. 1∶4 C. 2∶1 D. 4∶1

【解析】由棱台的结构特征知，棱台的上、下底面是相似多边形，面积之比为对应边之比的平方，故选 B.

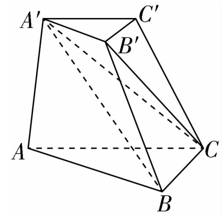
4. 画一个三棱台，再把它分成：(1)一个三棱柱和另一个多面体；(2)三个三棱锥，并用字母表示.

【解析】(1)如图①所示，三棱柱是棱柱 $A'B'C'$-$AB''C''$.

(2)如图②所示，三个三棱锥分别是 A'-ABC，B'-$A'BC$，C'-$A'B'C$.



图①



图②

温馨提示：请自主完成课后作业(二十二)

课后作业·单独成册

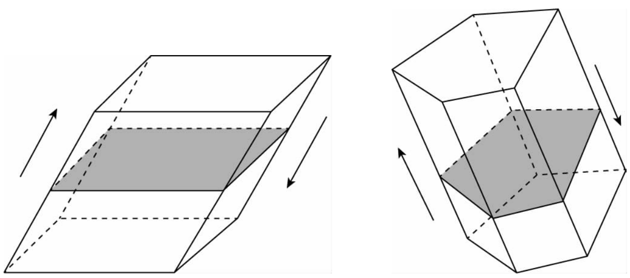
第 2 课时 圆柱、圆锥、圆台、球及简单组合体

学习目标	核心素养
1. 理解圆柱、圆锥、圆台、球的定义，了解简单组合体的概念和基本形式.（重点） 2. 会用语言概述圆柱、圆锥、圆台、球的结构特征. 能认识和区分这些几何体，了解柱体、锥体、台体之间的关系.（重点、难点）	1. 通过学习旋转体培养数学抽象素养. 2. 借助旋转体的图象特征培养直观想象素养.

自主预习

情景导思

如下图所示，将下面的平面多边形按一定的方向平移可以得到一个棱柱.



将一个平面图形绕平面内的一条直线旋转一圈可以得到什么样的几何体呢?

知新预学

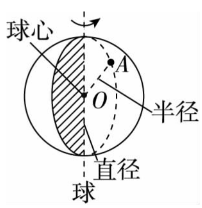
1. 圆柱、圆锥、圆台

分别以__矩形的一边__、__直角三角形的一条直角边__、__直角梯形垂直于底边的腰__所在的直线为旋转轴，其余各边旋转一周而形成的曲面所围成的旋转体分别叫做圆柱、圆锥、圆台.

2. 球的结构特征

(1)定义：以半圆的__直径__所在的直线为旋转轴，将半圆旋转一周所形成的曲面叫做__球面__. 球面所围成的旋转体叫做__球体__，简称球.

(2)相关概念如图所示.



(3)表示法：球常用__表示球心__的字母表示，图中的球表示为__球 O__.

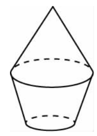
3. 构成简单组合体的两种基本形式

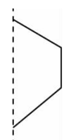
(1)由简单几何体拼接而成.

(2)由简单几何体截去或挖去一部分而成.

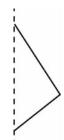
小试牛刀

1. 下面四个选项中的图形绕直线旋转一周后能得到如图所示的组合体的是 (D)

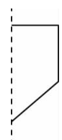




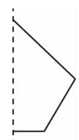
A



B



C



D

【解析】观察这个组合体，是由上面的一个圆锥和下面的一个圆台组合而成，故选 D.

2. 过球面上任意两点 A,B 作大圆，可能的个数是 (B)

A. 有且只有一个

B. 一个或无穷多个

C. 无数个

D. 以上均不正确

【解析】当过 A,B 的直线经过球心时，经过 A,B 的截面所得的圆都是球的大圆，这时过 A,B 作球的大圆有无数个；当直线 AB 不经过球心 O 时，经过 A,B,O 的截面就是一个大圆，这时只能作出一个大圆. 故选 B.

3. 下列说法正确的是 (D)

A. 圆锥的母线长等于底面圆的直径长

B. 圆柱的母线与轴垂直

C. 圆台的母线与轴平行

D. 球的直径必过球心

【解析】圆锥的母线长与底面直径无联系；圆柱的母线与轴平行；圆台的母线与轴不平行. 故选 D.

4. 正方形绕其一条对角线所在的直线旋转一周，所得几何体是__两个同底的圆锥组成的几何体__.

【解析】连接正方形的两条对角线知，对角线互相垂直平分，

故绕对角线所在的直线旋转一周形成的是两个底面相接的形状相同的圆锥.

5. 圆台的轴截面中，上、下底边长分别为 2 cm，10 cm，高为 3 cm，则圆台母线的长为__5__cm.

【解析】圆台母线的长为 $l=\sqrt{3^2+(5-1)^2}=5(\text{cm})$.

互动课堂

合作探究

探究1 旋转体的结构特征

【例 1】判断下列各命题是否正确：

(1)圆柱上底面圆上任一点与下底面圆上任一点的连线都是圆柱的母线；

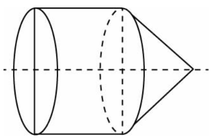
(2)一直角梯形绕下底所在直线旋转一周，所形成的曲面围成的旋转体是圆台；

(3)圆锥、圆台中过轴的截面是轴截面，圆锥的轴截面是等腰三角形，圆台的轴截面是等腰梯形；

(4)到定点的距离等于定长的点的集合是球.

【解析】(1)错. 由圆柱母线的定义知，圆柱的母线应平行于轴.

(2)错. 直角梯形绕下底所在直线旋转一周所形成的几何体是由一个圆柱和一个圆锥组成的简单组合体，如图所示.



(3)正确.

(4)错. 应为球面.

点睛 1. 圆柱、圆锥、圆台和球都是由一个平面图形绕其特定边(弦)旋转而成的旋转体，必须准确认识各旋转体对旋转轴的具体要求.

2. 只有理解了各旋转体的生成过程，才能明确由此产生的母线、轴、底面等概念，进而判断与这些概念有关的命题的正误.

【变式训练 1】下列命题正确的是__④⑥⑦__.

①以直角三角形的一边所在的直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆锥；

②以直角梯形的一腰所在的直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆台；

③圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆；

④以等腰三角形的底边上的高所在的直线为旋转轴，其余各边旋转 180°形成的曲面围成的几何体是圆锥；

⑤球面上四个不同的点一定不在同一平面内；

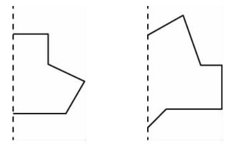
⑥球的半径是球面上任意一点和球心的连线段；

⑦用一个平面去截球，得到的截面是一个圆面.

【解析】①以直角三角形的一条直角边所在的直线为轴旋转一周才可以得到圆锥，故错误；②以直角梯形垂直于底边的一腰所在的直线为轴旋转一周才可以得到圆台，故错误；③它们的底面为圆面，故错误；④正确；作球的一个截面，在截面的圆周上任意取四个不同的点，则这四点就在同一个平面上，故⑤错误；根据球的半径定义，知⑥正确；用一个平面去截球，一定截得一个圆面，故⑦正确.

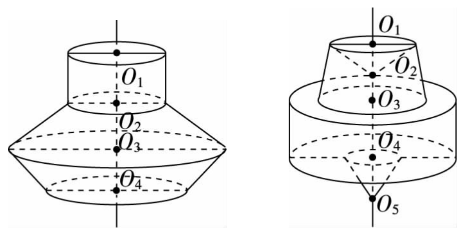
探究2 简单组合体的结构特征

【例 2】如图①、②所示的图形绕虚线旋转一周后形成的立体图形分别是由哪些简单几何体组成的？



图①　　图②

【解析】旋转后的图形如图所示. 其中图①是由一个圆柱 O_1O_2 和两个圆台 O_2O_3，O_3O_4 组成的；图②是由一个圆锥 O_5O_4，一个圆柱 O_3O_4 及一个圆台 O_1O_3 中挖去圆锥 O_2O_1 组成的.

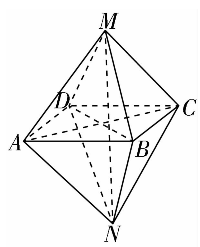


图①　　图②

点睛 1. 平面图形以一边所在直线为轴旋转时，要过有关顶点向轴作垂线，然后想象所得旋转体的结构和组成.

2. 必要时做模型培养动手能力.

【变式训练 2】如图所示的几何体，关于其结构特征，下列说法不正确的是 (D)



A. 该几何体是由两个同底的四棱锥组成的几何体

B. 该几何体有 12 条棱、6 个顶点

C. 该几何体有 8 个面，并且各面均为三角形

D. 该几何体有 9 个面，其中一个面是四边形，其余均为三角形

【解析】根据几何体的直观图，得该几何体是由两个同底的四棱锥组成的几何体，且有棱 MA，MB，MC，MD，AB，BC，CD，DA，NA，NB，NC 和 ND，共 12 条；

顶点是 M，A，B，C，D 和 N，共 6 个；

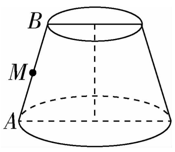
且有平面 MAB，平面 MBC，平面 MCD，平面 MDA，平面 NAB，平面 NBC，平面 NCD 和平面 NDA，共 8 个，且每个面都是三角形. 所以选项 A，B，C 正确，选项 D 错误.

探究3 旋转体上的最短距离问题

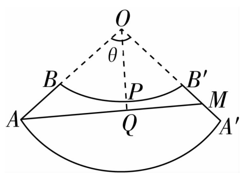
【例3】 如图，圆台的上、下底面半径分别为 5 cm，10 cm，母线长 $AB=20$ cm，从圆台的母线 AB 的中点 M 拉一条绳子绕圆台侧面转到点 A，求：

(1)绳子的最短长度；

(2)当绳子最短时，上底圆周上的点到绳子的最短距离.



【解析】(1)如图所示，将侧面展开，绳子的最短距离为侧面展开图中 AM 的长度. 设展开后扇面的圆心角为 $\angle AOA'=\theta$.



设 $OB=L$，$\because \theta=\frac{10\pi}{2\pi L}\times 360°$，$\theta=\frac{20\pi}{2\pi(L+20)}\times 360°$，

$\therefore L=20(\text{cm})$，$\theta=\frac{20\pi}{2\pi\times 40}\times 360°=90°$，

$\therefore OA=40$ cm，$OM=30(\text{cm})$.

$\therefore AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=50(\text{cm})$.

即绳子的最短长度为 50 cm.

(2)作 $OQ\perp AM$ 于点 Q，交弧 BB' 于点 P，

则 PQ 为所求的最短距离.

$\because OA\cdot OM=AM\cdot OQ$，$\therefore OQ=24(\text{cm})$.

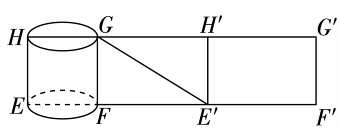
故 $PQ=OQ-OP=24-20=4(\text{cm})$，

即上底圆周上的点到绳子的最短距离为 4 cm.

点睛 求旋转体侧面上两点间距离的最小值是一种常见的问题，常利用侧面展开图转化为平面上两点间线段最短问题. 求解时，注意图形特征，常构造直角三角形，利用勾股定理等知识求解. 这正是将空间几何问题转化为平面几何问题的体现.

【变式训练3】 圆柱的轴截面是边长为 5 cm 的正方形 $EFGH$，则从点 E 沿圆柱的侧面到相对顶点 G 的最短距离为 $\underline{\frac{5}{2}\sqrt{\pi^2+4}}$ cm.

【解析】 圆柱的侧面展开图如图所示，展开后 $E'F=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\pi(\text{cm})$，



$\therefore E'G=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{\pi^2+4}(\text{cm})$.

随堂小练

1. 用一个平面去截一个几何体，得到的截面是三角形，这个几何体可能是 (D)

A. 圆柱　　B. 圆台

C. 球体　　D. 圆锥

【解析】 圆柱、圆台和球无论怎样截，截面不可能是三角形. 只有圆锥可以截出三角形面，故选 D.

2. 有下列四种说法：

①圆柱是将矩形旋转一周所得的几何体；

②以直角三角形的一边为旋转轴，旋转所得几何体是圆锥；

③圆台的任意两条母线的延长线，可能相交也可能不相交；

④圆锥的底面是圆面，侧面是个曲面.

其中错误的有 (C)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

【解析】 圆柱是矩形绕其一条边所在的直线旋转形成的几何体，故①错；以直角三角形的一条直角边所在的直线为轴旋转一周才能得到圆锥，故②错；圆台是由圆锥截得的，故其任意两条母线延长后一定交于一点，故③错；④是圆锥的性质，故④正确. 故选 C.

3. 一平面截球 O 得到半径为 $\sqrt{5}$ cm 的圆面，球心到这个平面的距离是 2 cm，则球的半径是 (B)

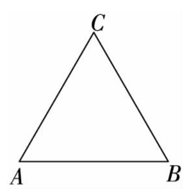
A. 9 cm　　B. 3 cm

C. 1 cm　　D. 2 cm

【解析】 设球的半径为 R. 根据勾股定理，

有 $R=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3(\text{cm})$. 故选 B.

4. 如图，将等边三角形绕它的一条中线旋转 180°，形成的几何体是__圆锥__.



温馨提示：请自主完成课后作业(二十三)

课后作业 · 单独成册

8.2　立体图形的直观图

学习目标	核心素养
1. 掌握斜二测画法的作图规则.(重点) 2. 会用斜二测画法画出简单几何体的直观图.(重点、难点)	斜二测画法的学习有利于培养数学抽象和直观想象的素养.

自主预习

情景导思

在绘制三视图时,我们会使用正投影方法,这在工程制图中被广泛采用,但三视图的立体感较差,因此绘制物体的直观图一般采用斜投影或中心投影.中心投影虽然可以显示空间图形的直观形象,但作图方法比较复杂,又不易度量,因此在立体几何中人们利用平行投影,采用斜二测画法来画空间图形的直观图.

知新预学

1. 用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图的步骤

(1)画轴.在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴,两轴相交于点 O.画直观图时,把它们画成对应的 x' 轴与 y' 轴,两轴交于点 O',且使 $\angle x'O'y'=$ 45°(或 135°) ,它们确定的平面表示 水平面 .

(2)画线.已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x' 轴 或 y' 轴 的线段.

(3)取长度.已知图形中平行于 x 轴的线段,在直观图中保持 原长度不变 ,平行于 y 轴的线段,在直观图中长度变为原来的 一半 .

2. 空间几何体直观图的斜二测画法

(1)画轴.画 x 轴、y 轴、z 轴,三轴交于点 O,使 $\angle xOy=45°$,$\angle xOz=90°$.

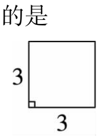
(2)画底面.平面 xOy 表示水平平面,平面 yOz 和 xOz 表示直立平面.

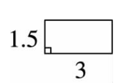
(3)画侧棱.已知图形中平行于 z 轴的线段,在直观图中 平行性 和 长度 都不变.

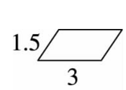
(4)成图.去掉辅助线,将被遮挡的部分改为虚线.

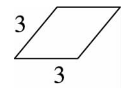
小试牛刀

1. 利用斜二测画法画出边长为 3 cm 的正方形的直观图,正确的是　　(C)


A


B


C


D

【解析】正方形的直观图应是一个角为 45°的平行四边形,且相邻两边的边长之比为 2∶1.故选 C.

2. (多选题)用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图,对其中的线段说法正确的是　　(ACD)

A. 原来相交的仍相交

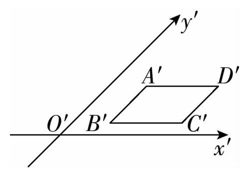
B. 原来垂直的仍垂直

C. 原来平行的仍平行

D. 原来共点的仍共点

【解析】根据斜二测画法,原来垂直的未必垂直.故选 ACD.

3. 如图,平行四边形 $A'B'C'D'$ 是水平放置的四边形 $ABCD$ 的直观图,$A'B'/\!/y'$ 轴,$B'C'/\!/x'$ 轴,则四边形 $ABCD$ 是 矩形 .



【解析】$\because A'B'/\!/y'$ 轴,$B'C'/\!/x'$ 轴,

$\therefore$ 在原图形中,$AB/\!/y$ 轴,$BC/\!/x$ 轴,

$\therefore AB\perp BC$.

易得 $AB/\!/CD$,$AD/\!/BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形.

4. 有一个长为 5 cm,宽为 4 cm 的矩形,其直观图的面积为 $5\sqrt{2}$ cm^2.

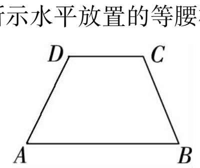
【解析】由于该矩形的面积为 $S=5\times4=20(cm^2)$,所以其直观图的面积为 $S'=\frac{\sqrt{2}}{4}S=\frac{\sqrt{2}}{4}\times20=5\sqrt{2}(cm^2)$.

互动课堂

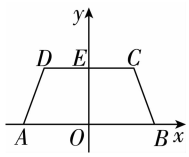
合作探究

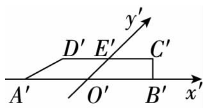
探究 1　画水平放置的平面图形的直观图

【例 1】画出如图所示水平放置的等腰梯形的直观图.



【解析】画法:(1)如图所示,取 AB 所在直线为 x 轴,AB 的中点 O 为原点,建立平面直角坐标系 xOy,画对应的坐标系 $x'O'y'$,使 $\angle x'O'y'=45°$.





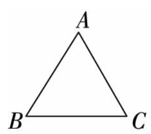
(2)以 O' 为中点在 x' 轴上取 $A'B'=AB$,在 y 轴上取 $O'E'=\frac{1}{2}OE$,以 E' 为中点画 $C'D'/\!/x'$ 轴,并使 $C'D'=CD$.

(3)连接 $B'C'$,$D'A'$,所得的四边形 $A'B'C'D'$ 就是水平放置的等腰梯形 $ABCD$ 的直观图.

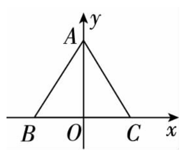
点睛 1. 巧借等腰梯形的对称性建立坐标系,使"定点""画图"简便易行.

2. 在画水平放置的平面图形的直观图时,选取适当的直角坐标系是关键,一般要使平面多边形尽可能多的顶点在坐标轴上,以便于画点.原图中不平行于坐标轴的线段可以通过作平行于坐标轴的线段来完成.

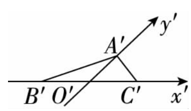
【变式训练 1】用斜二测画法画边长为 4 cm 的水平放置的正$\triangle ABC$ 的直观图.



【解析】(1)如图①所示,以 BC 边所在的直线为 x 轴,以 BC 边上的高线 AO 所在的直线为 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy.



图①



图②

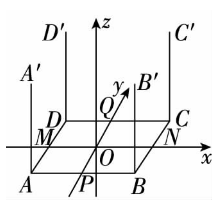
(2)画对应的 x' 轴、y' 轴,使 $\angle x'O'y'=45°$.

在 x' 轴上截取 $O'B'=O'C'=2$(cm),在 y' 轴上截取 $O'A'=\frac{1}{2}OA$,连接 $A'B'$,$A'C'$,则$\triangle A'B'C'$即为边长为 4 cm 的正$\triangle ABC$ 的直观图,如图②所示.

探究 2 简单几何体的直观图

【例 2】用斜二测画法画长、宽、高分别为 4 cm,3 cm,2 cm 的长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$的直观图.

【解析】画法步骤:(1)画轴.如图,画 x 轴、y 轴、z 轴,三轴相交于点 O,使$\angle xOy=45°$,$\angle xOz=90°$.

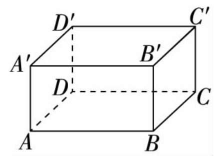


(2)画底面.以点 O 为中点,在 x 轴上取线段 MN,使 $MN=4$(cm);在 y 轴上取线段 PQ,使 $PQ=\frac{3}{2}$(cm).

分别过点 M 和 N 作 y 轴的平行线,过点 P 和 Q 作 x 轴的平行线,设它们的交点分别为 A,B,C,D,四边形 $ABCD$ 就是长方体的底面 $ABCD$.

(3)画侧棱.过 A,B,C,D 各点分别作 z 轴的平行线,并在这些平行线上分别截取 2 cm 长的线段 AA',BB',CC',DD'.

(4)成图.顺次连接 A',B',C',D',并加以整理(去掉辅助线,将被遮挡的部分改为虚线),就得到长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 的直观图.



点睛 画直观图时应遵循的基本原则:

(1)用斜二测画法画空间图形的直观图时,图形中平行于 x 轴、y 轴、z 轴的线段在直观图中应分别画成平行于 x'轴、y'轴、z'轴的线段;

(2)平行于 x 轴、z 轴的线段在直观图中长度保持不变,平行于 y 轴的线段长度变为原来的$\frac{1}{2}$;

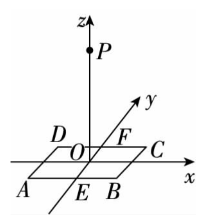
(3)直观图画法口诀"一斜、二半、三不变".

【变式训练 2】画出底面是边长为 1.2 cm 的正方形,侧棱均相等且高为 1.5 cm 的四棱锥的直观图.

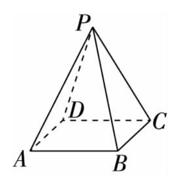
【解析】(1)如图①,画轴.画 x 轴、y 轴、z 轴,$\angle xOy=45°$(或 135°),$\angle xOz=90°$.

(2)画底面.以 O 为中心,在 xOy 平面内,画出底面的直观图,使 $AB=1.2$(cm),$EF=0.6$(cm).

(3)画顶点,在 Oz 轴上截取 OP,使 $OP=1.5$(cm).



图①

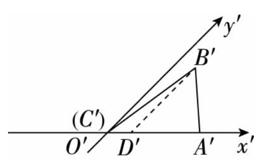


图②

(4)成图.顺次连接 PA,PB,PC,PD,并擦去辅助线,将被遮住的部分改为虚线,就得到四棱锥的直观图,如图②.

探究 3 直观图的还原与计算问题

【例 3】如图所示,$\triangle A'B'C'$是水平放置的平面图形的直观图,其中 $B'D'/\!/y'$轴,将其还原成平面图形.

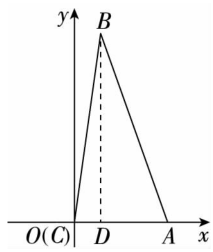


【解析】①画直角坐标系 xOy,在 x 轴的正方向上取 $OA=O'A'$,即 $CA=C'A'$;

②在 OA 上取 $OD=O'D'$，过 D 作 $DB//y$ 轴，且使 $DB=2D'B'$；

③连接 AB，BC，得$\triangle ABC$.

则$\triangle ABC$ 即为$\triangle A'B'C'$对应的平面图形，如下图所示.



点睛 1. 由直观图还原平面图形的关键有两点：

(1)平行于 x'轴的线段长度不变，平行于 y'轴的线段伸长为原来的 2 倍；

(2)若相邻两边不与 x'轴、y'轴平行，可通过作 x'轴、y'轴的平行线变换确定其在 xOy 中的位置.

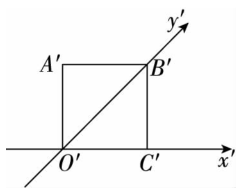
2. 由于斜二测画法中平行于 x 轴的线段的长度在直观图中长度不变，而平行于 y 轴的线段在直观图中长度要减半，同时要倾斜 45°，因此平面多边形的直观图中的计算需注意两点：

(1)直观图中任何一点距 x'轴的距离都为原图形中相应点距 x 轴距离的$\frac{\sqrt{2}}{4}$倍；

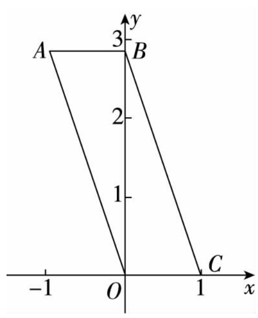
(2)$S_{直观图}=\frac{\sqrt{2}}{4}S_{原图}$.

由直观图计算原图形中的量时，注意上述两个结论的转换.

【变式训练 3】如图所示，正方形 $O'A'B'C'$的边长为 1 cm，它是水平放置的一个平面图形的直观图，求原图形的周长.



【解析】如图为原平面图形.



由斜二测画法可知，

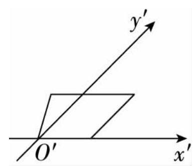
$OB=2O'B'=2\sqrt{2}$ cm，$OC=O'C'=AB=A'B'=1$(cm)，且 $AB//OC$，$\angle BOC=90°$.

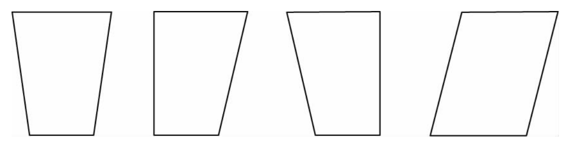
所以四边形 $OABC$ 为平行四边形，且 $BC=\sqrt{OC^2+OB^2}=\sqrt{1+8}=3$(cm)，

故平行四边形 $OABC$ 的周长为 $2(OC+BC)=8$(cm).

随堂小练

1. 如图所示为某一平面图形的直观图，则此平面图形可能是 (C)





A　　B　　C　　D

【解析】根据斜二测画法可知，此直观图的平面图形可能是 C.

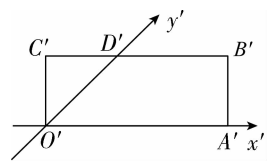
2. 已知一个正方形的直观图是一个平行四边形，其中有一边长为 4，则此正方形的面积为 (C)

A. 16　　B. 64

C. 16 或 64　　D. 无法确定

【解析】等于 4 的一边在原图形中可能等于 4，也可能等于 8，所以正方形的面积为 16 或 64. 故选 C.

3. 如图，矩形 $O'A'B'C'$是水平放置的一个平面图形的斜二测画法画出的直观图，其中 $O'A'=6$ cm，$C'D'=2$ cm，则原图形是 (D)



A. 正方形　　B. 矩形

C. 梯形　　D. 菱形

【解析】由题意，直观图的两组对边分别平行，但邻边不垂直，故原图形中，$CD=2$，$OD=4\sqrt{2}$，$OC=6$，故选 D.

4. 斜二测画法中，位于平面直角坐标系中的点 $M(4,4)$在直观图中的对应点是 M'，则点 M'的坐标为<u>(4,2)</u>.

【解析】在 x'轴的正方向上取点 M_1，使 $O'M_1=4$，在 y'轴上取点 M_2，使 $O'M_2=2$，过 M_1 和 M_2 分别作平行于 y'轴和 x'轴的直线，则交点就是 M'.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十四)

课后作业 · 单独成册

8.3 简单几何体的表面积与体积

第 1 课时 棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

学习目标	核心素养
1. 了解棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积的计算公式.(重点) 2. 能运用棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积公式进行计算和解决有关实际问题.(重点、难点)	1. 通过对棱柱、棱锥、棱台的研究,培养数学抽象素养. 2. 借助计算棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积可以培养逻辑推理、数学运算素养.

自主预习

情景导思

被誉为世界古代七大奇迹之一的埃及胡夫金字塔,在 1889 年巴黎埃菲尔铁塔落成前的四千多年的漫长岁月中,一直是世界上最高的建筑物.在四千多年前生产工具很落后的中古时代,埃及人是怎样采集、搬运数量如此之多、每块又如此之重的巨石垒成如此宏伟的金字塔的,真是一个十分难解的谜.胡夫金字塔可看成是一个正四棱锥外形的建筑,塔底边长 230 米,塔高 146.5 米,你能计算出此金字塔的表面积和体积吗?

知新预学

1. 棱柱、棱锥、棱台的表面积

(1)多面体的表面积就是围成多面体各个面的<u>面积的和</u>.棱柱、棱锥、棱台的表面积就是<u>围成它们的各个面的面积的和</u>.

(2)将棱柱、棱锥、棱台的侧面展开,其侧面展开图分别是由若干个平行四边形、若干个三角形、若干个梯形组成的图形,侧面展开图的面积就是棱柱、棱锥、棱台的侧面积.

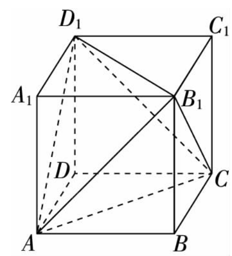
(3)棱柱、棱锥、棱台的表面积等于它们的侧面积与各自的底面积之和.

2. 棱柱、棱锥、棱台的体积公式

几何体	体积公式
棱柱	$V_{棱柱}=Sh$ S 为棱柱的底面积,h 为棱柱的高
棱锥	$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$ S 为棱锥的底面积,h 为棱锥的高
棱台	$V_{棱台}=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h$ $S_{上}$,$S_{下}$分别为棱台的上、下底面面积,h 为棱台的高

小试牛刀

1. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,三棱锥 $D_1\text{-}AB_1C$ 的表面积与正方体的表面积的比为 (C)



A. $1:1$　　B. $1:\sqrt{2}$

C. $1:\sqrt{3}$　　D. $1:2$

【解析】设正方体的棱长为 a,由题意知,三棱锥的各面都是正三角形,其表面积为 $4S_{\triangle AB_1D_1}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=2\sqrt{3}a^2$.正方体的表面积为 $6a^2$,所以三棱锥 $D_1\text{-}AB_1C$ 的表面积与正方体的表面积的比为 $2\sqrt{3}a^2:6a^2=1:\sqrt{3}$.故选 C.

2. 已知高为 3 的直棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 1 的正三角形,则三棱锥 $B_1\text{-}ABC$ 的体积为 (D)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】$S_{底}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以 $V_{B_1\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times3=\frac{\sqrt{3}}{4}$.故选 D.

3. 已知长方体的过一个顶点的三条棱长之比是 $1:2:3$,体对角线的长是 $2\sqrt{14}$,则这个长方体的体积是 (D)

A. 6　　B. 12

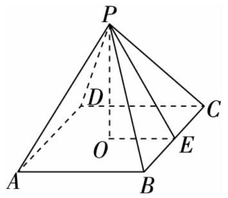
C. 24　　D. 48

【解析】设长方体的过一个顶点的三条棱长分别为 $x,2x,3x(x>0)$,又体对角线长为 $2\sqrt{14}$,则 $x^2+(2x)^2+(3x)^2=(2\sqrt{14})^2$,解得 $x=2$,∴三条棱长分别为 2,4,6,

∴$V_{长方体}=2\times4\times6=48$.故选 D.

4. 已知正四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍，高是 3，求它的表面积.

【解析】如图，设 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，$PO=3$，PE 是斜高，



$\because S_{侧}=2S_{底}$，$\therefore 4\times\frac{1}{2}\times BC\times PE=2BC^2$，$\therefore BC=PE$.

在 $Rt\triangle POE$ 中，$PO=3$，$OE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}PE$.

$\therefore 9+\left(\frac{PE}{2}\right)^2=PE^2$，$\therefore PE=2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{底}=BC^2=PE^2=(2\sqrt{3})^2=12$，$S_{侧}=2S_{底}=2\times12=24$.

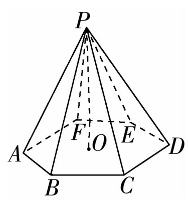
$\therefore S_{表}=S_{底}+S_{侧}=12+24=36$.

互动课堂

合作探究

探究 1 棱柱、棱锥、棱台的表面积

【例 1】如图，已知六棱锥 $P\text{-}ABCDEF$，其中底面$ABCDEF$ 是正六边形，点 P 在底面的投影是正六边形的中心点 O，底面边长为 2 cm，侧棱长为 3 cm. 求六棱锥 $P\text{-}ABCDEF$ 的表面积.



【解析】先求底面正六边形的面积：

$S_{六边形ABCDEF}=6S_{\triangle OBC}=6\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}(cm^2)$.

又 $S_{侧面}=6S_{\triangle PCD}=6\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{PC^2-\left(\frac{CD}{2}\right)^2}$

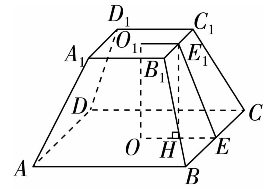
$=6\sqrt{3^2-1^2}=12\sqrt{2}(cm^2)$.

$\therefore S_{六棱锥表}=S_{六边形ABCDEF}+S_{侧面}=(6\sqrt{3}+12\sqrt{2})(cm^2)$.

点睛 多面体中的有关面积的计算通常转化为平面图形(三角形或特殊的四边形)来计算，对于棱锥中的计算问题往往要构造直角三角形，即棱锥的高、斜高以及斜高在底面上的投影构成的直角三角形，或者由棱锥的高、侧棱以及侧棱在底面上的投影构成的直角三角形.

【变式训练 1】已知正四棱台(上、下底面是正方形，上底面的中心在下底面的投影是下底面中心)上底面边长为 6，高和下底面边长都是 12，求它的侧面积.

【解析】方法一：如图，E，E_1 分别是 BC，B_1C_1 的中点，O，O_1 分别是下、上底面正方形的中心，则 O_1O 为正四棱台的高，则 $O_1O=12$.



连接 OE，O_1E_1，则 $OE=\frac{1}{2}AB=6$，$O_1E_1=\frac{1}{2}A_1B_1=3$.

过 E_1 作 $E_1H\perp OE$，垂足为 H，

则 $E_1H=O_1O=12$，$OH=O_1E_1=3$，

$HE=OE-O_1E_1=6-3=3$.

在 $Rt\triangle E_1HE$ 中，

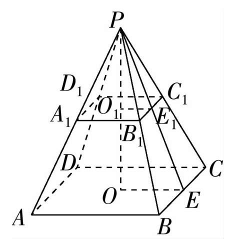
$E_1E^2=E_1H^2+HE^2=12^2+3^2=3^2\times17$，

$\therefore E_1E=3\sqrt{17}$.

$\therefore S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times(B_1C_1+BC)\times E_1E$

$=2\times(6+12)\times3\sqrt{17}=108\sqrt{17}$.

方法二：如图，正四棱台的侧棱延长交于一点 P.



取 B_1C_1，BC 的中点 E_1，E，则 EE_1 的延长线必过 P 点(可以证明). O_1，O 分别是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 与正方形 $ABCD$ 的中心. 由正棱锥的定义，OO_1 的延长线过 P 点，且有 $O_1E_1=\frac{1}{2}A_1B_1=3$，$OE=\frac{1}{2}AB=6$，

则有 $\frac{PO_1}{PO}=\frac{O_1E_1}{OE}=\frac{3}{6}$，

即 $\frac{PO_1}{PO_1+O_1O}=\frac{1}{2}$，所以 $PO_1=O_1O=12$.

在 $Rt\triangle PO_1E_1$ 中，

$PE_1^2=PO_1^2+O_1E_1^2=12^2+3^2=3^2\times17$，

在 $Rt\triangle POE$ 中，

$PE^2=PO^2+OE^2=24^2+6^2=6^2\times17$，

$\therefore E_1E=PE-PE_1=6\sqrt{17}-3\sqrt{17}=3\sqrt{17}$.

$\therefore S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times(BC+B_1C_1)\times E_1E$

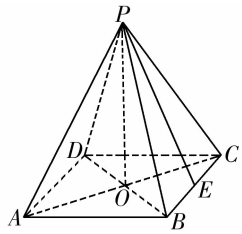
$=2\times(12+6)\times3\sqrt{17}=108\sqrt{17}$.

探究 2 棱柱、棱锥、棱台的体积

【例 2】如图，已知正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面是边长为 4 cm 的正方形，高 PO 与斜高 PE 的夹角为 30°. 求：

(1)正四棱锥的侧面积；

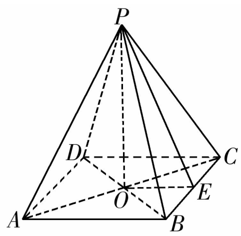
(2)正四棱锥的体积.



【解析】(1)如图,连接 OE,正四棱锥的高 PO、斜高 PE 和底面边心距 OE 组成 $\mathrm{Rt}\triangle POE$.

$\because OE=2\ \mathrm{cm}$,$\angle OPE=30^\circ$,

$\therefore$ 斜高 $PE=\dfrac{OE}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4(\mathrm{cm})$.



故 $S_{正四棱锥侧}=\dfrac{1}{2}\times BC\times PE\times 4=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times 4=32(\mathrm{cm}^2)$.

(2)正四棱锥的高 PO、斜高 PE 和底面边心距 OE 组成 $\mathrm{Rt}\triangle POE$.

$\because OE=2\ \mathrm{cm}$,$\angle OPE=30^\circ$,

$\therefore$ 高 $PO=\dfrac{OE}{\tan 30^\circ}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=2\sqrt{3}(\mathrm{cm})$.

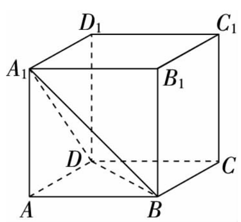
故 $V_{正四棱锥}=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times 4^2\times 2\sqrt{3}=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}(\mathrm{cm}^3)$.

点睛 1. 求棱柱的体积的关键在于求其底面积和高,底面积可利用平面图形面积的求法,常将底面转化为三角形及四边形,高常与侧棱或斜高及其在底面的投影组成直角三角形,进而求解.

2. 求解三棱锥的体积的步骤具有较强的灵活性,因为三棱锥的任何一个面都可以作为底面,所以常常需要根据题目条件对其顶点和底面进行转换,这一方法叫做等积法.

3. 棱台的体积计算公式是 $V=\dfrac{1}{3}(S_上+S_下+\sqrt{S_上S_下})h$,其中 $S_上$,$S_下$ 分别表示棱台的上、下底面的面积. 计算体积的关键是求出上、下底面的面积及高. 求解相关量时,应充分利用棱台中的直角梯形、直角三角形. 另外,棱台的体积还可以通过两个棱锥的体积差来计算.

【变式训练 2】如图所示,在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,求点 A 到平面 A_1BD 的距离 d.



【解析】在三棱锥 A_1-ABD 中,$AA_1\perp$ 平面 ABD,

$\because AB=AD=AA_1=a$,

$\therefore A_1B=BD=A_1D=\sqrt{2}a$,

$\because V_{A_1\text{-}ABD}=V_{A\text{-}A_1BD}$,

$\therefore \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}a^2\times a=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}a\times d$.

$\therefore d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

随堂小练

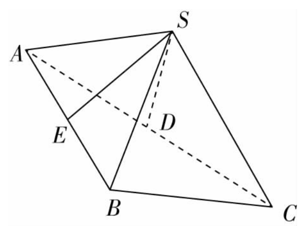
1. 正四棱台两底面面积分别为 $4\ \mathrm{cm}^2$,$64\ \mathrm{cm}^2$,侧棱长为 $3\sqrt{7}\ \mathrm{cm}$,则棱台的高为 (D)

A. $6\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$　　B. $12\ \mathrm{cm}$

C. $6\ \mathrm{cm}$　　D. $3\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$

【解析】由题可知,棱台上、下底面的边长分别为 $2\ \mathrm{cm}$,$8\ \mathrm{cm}$,由侧棱长为 $3\sqrt{7}\ \mathrm{cm}$ 知,高 $h=\sqrt{(3\sqrt{7})^2-(4\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{63-18}=3\sqrt{5}(\mathrm{cm})$,故选 D.

2. 如图所示,一个底面为直角三角形且顶点在底面上的投影为斜边的中点的三棱锥 S-ABC 中,$SE\perp AB$,$SE=5$,$SD=4$,$AC=6\sqrt{2}$,$AB=BC=6$,则该棱锥的表面积为 (A)



A. $48+12\sqrt{2}$　　B. $48+24\sqrt{2}$

C. $36+12\sqrt{2}$　　D. $36+24\sqrt{2}$

【解析】如图,$SE=5$,$SD=4$,$AC=6\sqrt{2}$,$AB=BC=6$,

$\therefore S_表=S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle SAB}+S_{\triangle ASC}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6+2\times\dfrac{1}{2}\times 5\times 6+\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 4=48+12\sqrt{2}$.

3. 正四棱台的斜高与上、下底面边长之比为 5∶2∶8,体积为 $14\ \mathrm{cm}^3$,则棱台的高为__2 cm__.

【解析】设正四棱台上底面边长为 $2a$,下底面边长为 $8a$,斜高为 $5a$,高为 h,则 $(5a)^2=h^2+9a^2$,

$\therefore h^2=16a^2$,$\therefore h=4a$,

由棱台的体积公式,得 $\dfrac{1}{3}[(2a)^2+(8a)^2+\sqrt{(2a\cdot 8a)^2}]h=14$,解得 $h=2(\mathrm{cm})$.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十五)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

学习目标	核心素养
1. 了解圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图，会用圆柱、圆锥、圆台和球的表面积和体积公式进行计算.（重点） 2. 掌握球的表面积和体积公式，会计算球的表面积和体积.（重点、难点）	1. 通过圆柱、圆锥、圆台和球的表面积和体积公式的学习，提高数学抽象素养. 2. 借助圆柱、圆锥、圆台和球的表面积和体积公式的应用，培养数学运算素养.

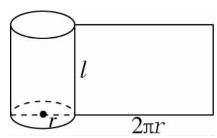
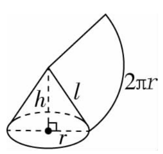
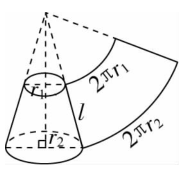
自主预习

情景导思

球既没有底面，也无法像柱体、锥体和台体那样展开成平面图形，那么怎样来求球的表面积与体积？球的体积大小取决于什么？如何用球的半径来表示球的体积和表面积？

知新预学

1. 圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及表面积公式

几何体	侧面展开图	表面积公式
圆柱		$S_{圆柱}=2\pi r(l+r)$ r：底面半径 l：圆柱母线长
圆锥		$S_{圆锥}=\pi r(l+r)$ r：底面半径 l：圆锥母线长
圆台		$S_{圆台}=\pi(r_1^2+r_2^2+r_1l+r_2l)$ r_1,r_2：上、下底面半径 l：圆台母线长

2. 圆柱、圆锥、圆台的体积公式

几何体	体积公式
圆柱	$V_{圆柱}=\pi r^2h$ r：圆柱底面半径 h：圆柱的高
圆锥	$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$ r：圆锥底面半径 h：圆锥的高
圆台	$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$ r_1,r_2：上、下底面半径 h：圆台的高

3. 球的体积公式与表面积公式

设球的半径为 R，则：

(1)球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

(2)球的表面积公式：$S=4\pi R^2$.

小试牛刀

1. 已知一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，则这个圆柱的表面积与侧面积的比是 （ A ）

A. $\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　B. $\frac{1+4\pi}{4\pi}$

C. $\frac{1+2\pi}{\pi}$　　D. $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

【解析】设圆柱底面半径、母线长分别为 r,l，由题意知 $l=2\pi r$，$S_侧=l^2=4\pi^2r^2$.

$S_表=S_侧+2\pi r^2=4\pi^2r^2+2\pi r^2=2\pi r^2(2\pi+1)$，

故 $\frac{S_表}{S_侧}=\frac{2\pi r^2(2\pi+1)}{4\pi^2r^2}=\frac{1+2\pi}{2\pi}$.

2. 设正方体的表面积为 24，那么其外接球的体积是 （ C ）

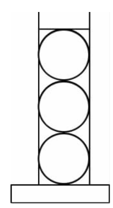
A. $\frac{4\pi}{3}$　　B. $\frac{8\pi}{3}$

C. $4\sqrt{3}\pi$　　D. $32\sqrt{3}\pi$

【解析】设正方体的棱长为 a，由题意可知，$6a^2=24$，∴$a=2$.

设正方体外接球的半径为 R，则$\sqrt{3}a=2R$，∴$R=\sqrt{3}$，∴$V_球=\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$.

3. 圆柱形容器内盛有高度为 8 cm 的水，若放入三个相同的球（球的半径与圆柱的底面半径相同）后，水恰好淹没最上面的球（如图所示），则球的半径是 __4__ cm.



【解析】设球的半径为 r，则圆柱形容器的高为 $6r$，容积为 $\pi r^2\times 6r=6\pi r^3$，高度为 8 cm 的水的体积为 $8\pi r^2$，3 个球的体积之和为 $3\times\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^3$，由题意得 $6\pi r^3-8\pi r^2=4\pi r^3$，解得 $r=4$(cm).

4. 一个圆柱和一个圆锥的轴截面分别是边长为 a 的正方形和正三角形，则它们的表面积之比为 __2∶1__.

【解析】$S_{圆柱}=2\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\pi\cdot\frac{a}{2}\cdot a=\frac{3}{2}\pi a^2$，

$S_{圆锥}=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\pi\cdot\frac{a}{2}\cdot a=\frac{3}{4}\pi a^2$，

∴$S_{圆柱}:S_{圆锥}=2:1$.

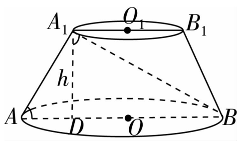
互动课堂

合作探究

探究 1 旋转体的表面积

【例 1】已知圆台的高为 3，在轴截面中，母线 AA_1 与底面圆直径 AB 的夹角为 60°，且轴截面的一条对角线垂直于腰，求圆台的表面积.

【解析】如图所示，作出轴截面 A_1ABB_1，设上、下底面半径、母线长分别为 r,R,l，作 $A_1D\perp AB$ 于 D，



则 $A_1D=3$，$\angle A_1AB=60°$.

$\because \angle BA_1A=90°$，

$\therefore \angle BA_1D=60°$，

$\therefore AD=A_1D\cdot\tan 30°=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}=R-r$，

$BD=A_1D\cdot\tan 60°=3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}=R+r$.

$\therefore R=2\sqrt{3}$，$r=\sqrt{3}$，$l=A_1A=\frac{A_1D}{\sin 60°}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$.

$\therefore$圆台的表面积 $S=\pi(r+R)l+\pi r^2+\pi R^2=\pi(2\sqrt{3}+\sqrt{3})\times 2\sqrt{3}+\pi(\sqrt{3})^2+\pi(2\sqrt{3})^2=33\pi$.

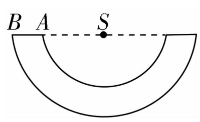
即圆台的表面积是 33π.

点睛 1. 旋转体表面积的计算一般通过轴截面寻找其中的数量关系.

2. 圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面，求侧面积时要注意侧面展开图的应用，圆台上、下底面圆的周长是展开图的两条弧长.

【变式训练 1】圆台的上、下底面半径分别为 10 cm 和 20 cm. 它的侧面展开图扇环的圆心角为 180°，那么圆台的表面积是 <u>$1\,100\pi$</u> cm^2(结果中保留 π).

【解析】如图所示，



设圆台的上底面周长为 c，

$\because$扇环的圆心角是 180°，

故 $c=\pi\cdot SA=20\pi(\text{cm})$，

$\therefore SA=20(\text{cm})$，同理可得 $SB=40(\text{cm})$，

$\therefore AB=SB-SA=20(\text{cm})$，

$\therefore S_{表面积}=S_{侧}+S_{上}+S_{下}$

$=\pi(r_1+r_2)\cdot AB+\pi r_1^2+\pi r_2^2$

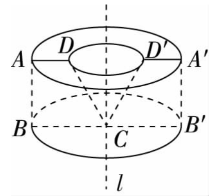
$=\pi(10+20)\times 20+\pi\times 10^2+\pi\times 20^2=1\,100\pi(\text{cm}^2)$.

故圆台的表面积为 $1\,100\pi\ \text{cm}^2$.

探究 2 组合体的表面积

【例 2】已知梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle ABC=90°$，$AD=a$，$BC=2a$，$\angle DCB=60°$，在平面 $ABCD$ 内，过点 C 作 $l\perp CB$，以 l 为轴将梯形 $ABCD$ 旋转一周，求该旋转体的表面积.

【解析】如图所示，所得几何体为一个圆柱除去一个圆锥.



在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD=a$，$BC=2a$，$AB=(2a-a)\cdot\tan 60°=\sqrt{3}a$，$DC=\frac{2a-a}{\cos 60°}=2a$.

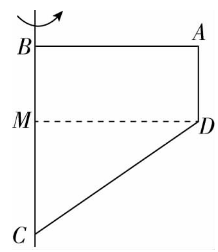
又 $DD'=DC=2a$.

$\therefore S_{表}=S_{圆环}+S_{圆柱侧}+S_{圆C}+S_{圆锥侧}=[\pi\cdot(2a)^2-\pi a^2]+2\pi\cdot 2a\cdot\sqrt{3}a+\pi\cdot(2a)^2+\pi\cdot a\cdot 2a=(9+4\sqrt{3})\pi a^2$.

点睛 求解组合体表面积的解题思路：首先要弄清楚它是由哪些简单几何体组成的，将所给组合体分割成基本的柱、锥、台体后，先求这些几何体与原组合体相关的表面的面积，再通过求和或作差，得到所求组合体的表面积. 若遇到与旋转体有关的问题，则应根据条件确定各个旋转体的底面半径和母线长，再代入公式求解.

【变式训练 2】一个直角梯形 $ABCD$ 的两底边长分别为 $AD=2$，$BC=5$，高 $AB=4$，将其绕较长的底边旋转一周，求所得旋转体的表面积.

【解析】如图，作 $DM\perp BC$ 于点 M，则 $DM=AB=4$，$MC=BC-AD=5-2=3$.



在 Rt$\triangle CMD$ 中，$CD=\sqrt{MC^2+DM^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

当梯形 $ABCD$ 绕底边 BC 旋转一周后，得到同底的圆柱与圆锥的组合体，其表面包含圆柱的一个底面和侧面，加上一个圆锥的侧面，将它们的面积分别设为 S_1,S_2,S_3，则所求旋转体的表面积为 $S=S_1+S_2+S_3$，即 $S=\pi\times 4^2+2\pi\times 4\times 2+\pi\times 4\times 5=16\pi+16\pi+20\pi=52\pi$. 故所求旋转体的表面积是 52π.

探究 3 圆柱、圆锥、圆台的体积

【例 3】直角梯形的一个内角为 45°，下底为上底长的 $\frac{3}{2}$ 倍，这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为 $(5+\sqrt{2})\pi$，则旋转体的体积为 (D)

A. 2π　　B. $\frac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$

C. $\frac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$　　D. $\frac{7\pi}{3}$

【解析】设该直角梯形的上底长为 r，下底长则为 $\frac{3}{2}r$. 该几何体为圆柱与圆锥的组合体.

$S_{全}=\pi\times\left(\frac{r}{2}\right)^2+\pi r^2+\frac{\pi}{2}r\times\frac{\sqrt{2}}{2}r=\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)r^2=(5$

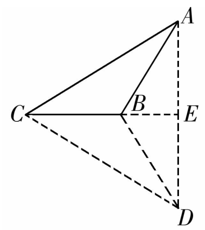
$+\sqrt{2})\pi$，∴$r=2$，∴$V=V_{圆柱}+V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\frac{r}{2}+\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi r=\frac{7}{3}\pi$. 故选 D.

点睛 求几何体的体积，要注意适当地运用分割与补形的辅助方法，将不规则的几何体通过分割或补形转化为规则的几何体求解.

【变式训练 3】在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$BC=\frac{3}{2}$，$\angle ABC=120°$. 若$\triangle ABC$绕直线BC旋转一周，则所形成的几何体的体积是（ A ）

A. $\frac{3\pi}{2}$　　B. $\frac{7\pi}{2}$　　C. $\frac{5\pi}{2}$　　D. $\frac{9\pi}{2}$

【解析】若$\triangle ABC$绕直线BC旋转一周，则所形成的几何体是以$\triangle ACD$为轴截面的圆锥中挖去一个以$\triangle ABD$为轴截面的小圆锥后剩下的部分，如图所示. 设AD与CB的延长线交于点E.



∵$AB=2$，$BC=\frac{3}{2}$，$\angle ABC=120°$，

∴$AE=AB\sin 60°=\sqrt{3}$，$BE=AB\cos 60°=1$，则所求体积为$\frac{1}{3}\pi\cdot AE^2\cdot CE-\frac{1}{3}\pi\cdot AE^2\cdot BE=\frac{1}{3}\pi\cdot AE^2\cdot CB=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\pi$. 故选 A.

探究 4 球的表面积和体积

【例 4】(1)已知球的表面积为64π，求它的体积；

(2)已知球的体积为$\frac{500\pi}{3}$，求它的表面积.

【解析】(1)设球的半径为R，则$4\pi R^2=64\pi$，解得$R=4$，

所以球的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3=\frac{256}{3}\pi$.

(2)设球的半径为R，则$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500}{3}\pi$，解得$R=5$，

所以球的表面积$S=4\pi R^2=4\pi\times 5^2=100\pi$.

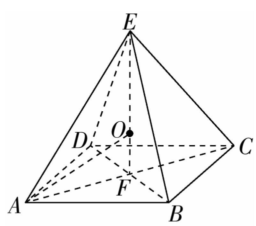
点睛 掌握球的表面积和体积公式是求解问题的关键，其中半径和球心是确定球的条件.

【变式训练 4】已知正四棱锥的顶点都在同一球面上，该棱锥的高为 4，底面边长为 2，求该球的表面积.

【解析】如图，设球心为O，半径为r，

则 Rt$\triangle AOF$中，$(4-r)^2+(\sqrt{2})^2=r^2$，解得$r=\frac{9}{4}$，

∴该球的表面积为$4\pi r^2=4\pi\times\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{4}\pi$.



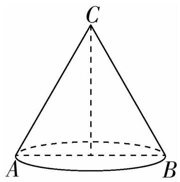
随堂小练

1. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，则这个圆锥的母线长为（ A ）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

【解析】如图所示，设等边三角形ABC为圆锥的轴截面，由题意知圆锥的母线长即为$\triangle ABC$的边长，且$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$，

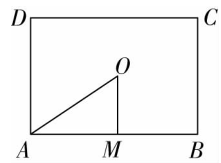
∴$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$，∴$AB=2$.



2. 已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为（ B ）

A. π　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

【解析】如图，画出圆柱的轴截面$ABCD$，O为球心. 球半径$R=OA=1$，球心到底面圆的距离为$OM=\frac{1}{2}$.



∴底面圆半径$r=\sqrt{OA^2-OM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴圆柱体积$V=\pi r^2\times 1=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 1=\frac{3\pi}{4}$. 故选 B.

3. 若圆台的上、下底面半径和母线长的比为 1∶4∶5，高为 8，则其侧面积为 ______100π______.

【解析】设圆台上、下底面半径分别为r和R，母线长为l，则$r=k$，$R=4k$，$l=5k(k>0)$，则$(5k)^2-(3k)^2=8^2$，解得$k=2$，从而$r=2$，$R=8$，$l=10$，$S_{侧}=\pi(2+8)\times 10=100\pi$.

4. 用一张 4 cm×8 cm 的矩形硬纸卷成圆柱的侧面，求该圆柱的表面积.

【解析】根据卷的方法不同，可分为两种情况：

①以矩形 8 cm 的边为母线，把矩形硬纸卷成圆柱侧面，设底面半径为r_1，则底面周长为$2\pi\cdot r_1=4$(cm)，

∴$r_1=\frac{2}{\pi}$(cm)，

∴两底面面积之和为$\frac{8}{\pi}$ cm²，$S_{表}=\left(32+\frac{8}{\pi}\right)$(cm²).

②以矩形 4 cm 的边为母线，把矩形硬纸卷成圆柱侧面，设底面半径为r_2，则底面周长为$2\pi\cdot r_2=8$(cm)，

∴$r_2=\frac{4}{\pi}$(cm)，

∴两底面面积之和为$\frac{32}{\pi}$ cm²，$S_{表}=\left(32+\frac{32}{\pi}\right)$(cm²).

温馨提示：请自主完成课后作业(二十六)

课后作业 · 单独成册

8.4　空间点、直线、平面之间的位置关系

第 1 课时　平面

学习目标	核心素养
1. 正确理解平面的概念.(重点) 2. 能用符号语言描述空间点、直线、平面之间的位置关系.(重点、难点) 3. 能用图形、文字、符号三种语言描述三个基本事实,理解三个基本事实和三个推论的地位与作用.(重点、难点)	1. 通过对平面概念的理解培养数学抽象素养. 2. 通过理清点线共面、多点共线、多线共点等之间的关系,培养逻辑推理素养. 3. 借助判断点、直线、平面之间的位置关系培养直观想象素养.

自主预习

情景导思

生活中常见的如黑板、平整的操场、桌面、平静的水面等等,都给我们以平面的印象,你能举出更多例子吗?平面的含义是什么呢?

知新预学

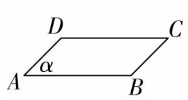
1. 平面

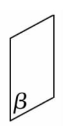
(1)平面的概念

几何里所说的"平面",是从课桌面、黑板面、平静的水面这样的一些物体中抽象出来的.类似于直线向两端无限延伸,平面是向四周无限延展的.

(2)平面的画法及表示

我们通常用矩形的直观图,即平行四边形表示平面.当平面水平放置时,常把平行四边形的一边画成横向;当平面竖直放置时,常把平行四边形的一边画成竖向.





平面通常用希腊字母 α,β,γ 等表示,如平面 α、平面 β 等,也可以用表示平面的平行四边形的四个顶点或者相对的两个顶点的大写英文字母来表示,如平面 $ABCD$、平面 AC 等.

2. 点、直线、平面之间的位置关系及语言表达

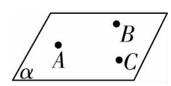
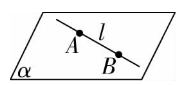
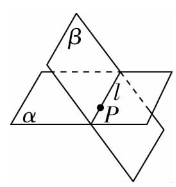
(1)点 A 在直线 l 上,记作 $A\in l$;点 B 在直线 l 外,记作 $B\notin l$.

(2)点 A 在平面 α 内,记作 $A\in\alpha$;点 B 在平面 α 外,记作 $B\notin\alpha$.

(3)直线 l 在平面 α 内,记作 $l\subset\alpha$;直线 l 在平面 α 外,记作 $l\not\subset\alpha$.

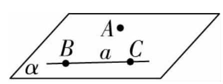
(4)平面 α 与平面 β 相交于直线 l,记作 $\alpha\cap\beta=l$.

3. 平面的基本事实

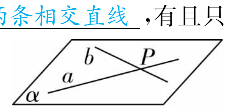
	文字语言	图形语言	符号语言
基本事实 1	过不在一条直线上的三个点,有且只有一个平面		A,B,C 三点不共线⇒存在唯一的平面 α,使 $A,B,C\in\alpha$
基本事实 2	如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线在这个平面内		$A\in l$,$B\in l$,且 $A\in\alpha$,$B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$
基本事实 3	如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条过该点的公共直线		$P\in\alpha$,且 $P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$,且$P\in l$

利用基本事实 1 和基本事实 2,再结合"两点确定一条直线",可以得到下面三个推论.

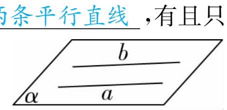
推论 1:经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.



推论 2:经过两条相交直线,有且只有一个平面.



推论 3:经过两条平行直线,有且只有一个平面.



小试牛刀

1. 如果点 A 在直线 a 上，而直线 a 又在平面 α 内，那么可以记作 (B)

A. $A\subset a,a\subset\alpha$　　B. $A\in a,a\subset\alpha$

C. $A\subset a,a\in\alpha$　　D. $A\in a,a\in\alpha$

【解析】直线上有无数个点，直线可看成点的集合，

点 A 在直线 a 上，可记作 $A\in a$，

直线 a 在平面 α 内，可记作 $a\subset\alpha$，故选 B.

2. 下列说法中正确的是 (C)

A. 三点确定一个平面

B. 四边形一定是平面图形

C. 梯形一定是平面图形

D. 两个不同平面有不在同一条直线上的三个公共点

【解析】对于选项 A，当三点共线时，无法确定一个平面，故 A 错误；

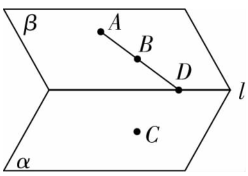
对于选项 B，一个四边形，若对边异面，则为一个立体图形，故 B 错误；

对于选项 C，因为梯形有一组对边平行，两条平行线可以确定一个平面，则梯形一定是平面图形，故 C 正确；

对于选项 D，若两个不同平面 α 和 β 有不在同一条直线上的三个公共点，由于三个不共线的点能确定一个平面，则平面 α 与平面 β 重合，与已知矛盾，故 D 错误.

故选 C.

3. 如图所示，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 l，点 $A,B\in\beta$，直线 $AB\cap l=$ 点 D，点 $C\in\alpha$，则平面 ABC 和平面 α 的交线是 (D)



A. 直线 AC　　B. 直线 BC

C. 直线 AB　　D. 直线 CD

【解析】$\because l\subset\alpha,D\in l,\therefore D\in\alpha$，又 $C\in\alpha,\therefore CD\subset\alpha$. 又 $CD\subset$ 平面 ABC，$\therefore CD$ 为平面 ABC 与平面 α 的交线. 故选 D.

4. 给出以下命题：已知点 A,B 都在直线 l 上，若 A,B 都在平面 α 上，则直线 l 在平面 α 上. 试用符号语言表述这个命题：已知 $A\in l,B\in l$，若 $A\in\alpha,B\in\alpha$，则 $l\subset\alpha$.

【解析】用符号语言表述这个命题为：已知 $A\in l,B\in l$，若 $A\in\alpha,B\in\alpha$，则 $l\subset\alpha$.

互动课堂

合作探究

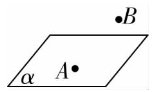
探究 1　文字语言、图形语言、符号语言之间的转换

【例 1】根据下列符号表示的语句，说明点、线、面之间的位置关系，并画出相应图形：

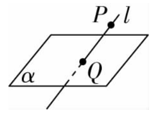
(1) $A\in\alpha,B\notin\alpha$；(2) $P\in l,P\notin\alpha,Q\in l,Q\in\alpha$.

【解析】(1) 点 A 在平面 α 内，点 B 不在平面 α 内. 如图①.

(2) 直线 l 经过平面 α 外一点 P 和平面 α 内一点 Q. 如图②.



图①



图②

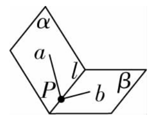
点睛 三种语言转换的注意事项：

(1) 用文字语言、符号语言表示一个图形时，首先仔细观察图形有几个平面、几条直线且相互之间的位置关系如何，试着用文字语言表示，再用符号语言表示.

(2) 符号语言的意义. 如点与直线的位置关系只能用"$\in$"或"$\notin$"，直线与平面的位置关系只能用"$\subset$"或"$\not\subset$".

(3) 由符号语言或文字语言画相应的图形时，要注意把被遮挡的部分画成虚线.

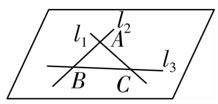
【变式训练 1】如图，用符号语言表示下面的图形.



【解析】上图可用符号语言表示为 $\alpha\cap\beta=l,a\subset\alpha,b\subset\beta,a\cap l=P,b\cap l=P,a\cap b=P$.

探究 2　点线共面

【例 2】如图，$l_1\cap l_2=A,l_2\cap l_3=B,l_1\cap l_3=C$，求证：直线 l_1,l_2,l_3 在同一平面内.



【证明】$\because l_1\cap l_2=A,\therefore l_1,l_2$ 确定一个平面 α.

$\because l_2\cap l_3=B,\therefore l_2,l_3$ 确定一个平面 β.

$\because A\in l_2,l_2\subset\alpha,\therefore A\in\alpha$.

$\because A\in l_2,l_2\subset\beta,\therefore A\in\beta$.

同理可证 $B\in\alpha,B\in\beta,C\in\alpha,C\in\beta$.

$\therefore$ 不共线的三个点 A,B,C 既在平面 α 内，又在平面 β 内.

$\therefore$ 平面 α 和 β 重合，即直线 l_1,l_2,l_3 在同一平面内.

点睛 证明点线共面问题的常用方法.

(1) 纳入法：先由部分直线确定一个平面，再证明其他直线在这个平面内.

(2) 重合法：先说明一些直线在一个平面内，另一些直线在另一个平面内，再证明两个平面重合.

【变式训练 2】空间中相交于一点的三条直线，可以确定的平面个数是 (D)

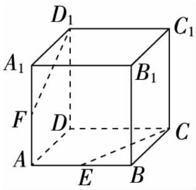
A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 1 或 3

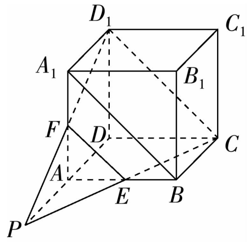
【解析】两两相交且共点的三条直线若在一个平面内，可确定一个平面，若不在一个平面内，每两条直线可确定一个平面，共可确定 3 个平面，故选 D.

探究 3　多点共线、多线共点问题

【例 3】如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 的中点，F 为 AA_1 的中点. 求证：CE,D_1F,DA 三线交于一点.



【证明】如图，连接 EF，D_1C，A_1B，



∵E 为 AB 的中点，F 为 AA_1 的中点，∴$EF\underset{=}{\parallel}\frac{1}{2}A_1B$.

又∵$A_1B\underset{=}{\parallel}D_1C$，∴$EF\underset{=}{\parallel}\frac{1}{2}D_1C$，

∴E，F，D_1，C 四点共面，

可设 $D_1F\cap CE=P$.

又 $D_1F\subset$平面 A_1D_1DA，$CE\subset$平面 $ABCD$，

∴点 P 为平面 A_1D_1DA 与平面 $ABCD$ 的公共点.

又∵平面 $A_1D_1DA\cap$平面 $ABCD=DA$，

∴根据公理 3 可得 $P\in DA$，即 CE，D_1F，DA 三线交于一点.

点睛 证明多点共线、多线共点的常用方法.

(1)证明三线共点常用的方法：

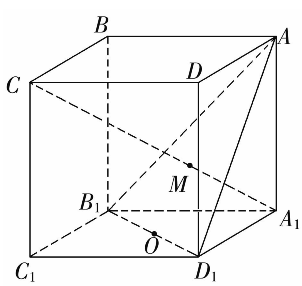
先证明两条直线相交于一点，然后证明这个点在两个平面内，第三条线是这两个平面的交线，于是该点在第三条直线上，从而得到三线共点. 也可以先证明 a，b 相交于一点 A，b 与 c 相交于一点 B，再证明 A，B 是同一点，从而得到 a，b，c 三线共点.

(2)类比三线共点的证明方法，可得到三点共线的证明方法：

①首先找出两个平面的交线，然后证明这三点都是这两个平面的公共点，根据基本事实 3，可推知这些点都在交线上，即三点共线.

②选择其中两点确定一条直线，然后证明第三个点也在这条直线上.

【变式训练 3】如图所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是 B_1D_1 的中点，直线 A_1C 交平面 AB_1D_1 于点 M，则下列结论正确的是 (A)



A. A，M，O 三点共线　　B. A，M，O，A_1 不共面

C. A，M，C，O 不共面　　D. B，B_1，O，M 共面

【解析】如图，连接 A_1C_1，AC，则 $A_1C_1/\!/AC$.

∴A_1，C_1，C，A 四点共面.

∴$A_1C\subset$平面 ACC_1A_1.

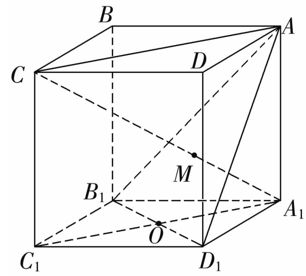
∵$M\in A_1C$，∴$M\in$平面 ACC_1A_1.

又 $M\in$平面 AB_1D_1，

∴M 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上，

同理点 A 与点 O 也在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上，

∴A，M，O 三点共线. 故选 A.



随堂小练

1. 三个互不重合的平面能把空间分成 n 部分，则 n 的所有可能值为 (B)

A. 4，6，8　　B. 4，6，7，8

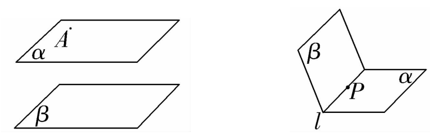
C. 4，6，7　　D. 4，5，7，8

【解析】若三个平面两两平行，则把空间分成 4 部分；若三个平面两两相交且共线，则把空间分成 6 部分；若三个平面两两相交，且有三条交线，则把空间分成 7 部分；当两个平面相交，第三个平面同时与两个平面垂直相交时，把空间分成 8 部分，所有共分成 4，6，7，8 部分，故选 B.

2. 如图所示的直观图，用符号语言表述为

(1) $A\in\alpha$，$A\notin\beta$；

(2) $\alpha\cap\beta=l$，$P\in l$.

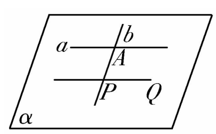


(1)　　(2)

【解析】(1)由图可知点 A 在平面 α 内，点 A 不在平面 β 内，则有 $A\in\alpha$，$A\notin\beta$.

(2)由图可知平面 α 与平面 β 相交于 l，且点 P 在 l 上，则有 $\alpha\cap\beta=l$，$P\in l$.

3. 如图，已知 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b=A$，$P\in b$，$PQ/\!/a$，求证：$PQ\subset\alpha$.



【证明】∵$PQ/\!/a$，∴PQ 与 a 确定一个平面 β，

∴直线 $a\subset\beta$，点 $P\in\beta$.

∵$P\in b$，$b\subset\alpha$，∴$P\in\alpha$.

∵$a\subset\alpha$，∴α 与 β 重合，

即 $PQ\subset\alpha$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十七)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　空间点、直线、平面之间的位置关系

学习目标	核心素养
1. 了解直线与直线之间的三种位置关系，理解异面直线的定义.（重点、难点） 2. 了解直线与平面之间的三种位置关系，会用图形语言和符号语言表示.（重点、难点） 3. 了解平面与平面之间的两种位置关系，会用图形语言和符号语言表示.（重点、难点）	1. 借助判断空间点、直线、平面之间的位置关系来培养逻辑推理素养. 2. 借助了解空间图形中点、直线、平面之间的位置关系来培养直观想象素养.

自主预习

情景导思

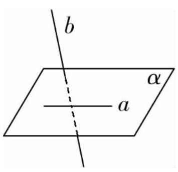
现在的城市，立交桥的数量越来越多，在如图所示的立交桥图片中，两条路既不平行也不相交，它们是一种什么样的位置关系呢？

知新预学

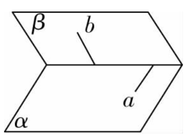
1. 异面直线

(1)定义：不同在<u>任何一个平面内</u>的两条直线叫做异面直线.

(2)画法：



①

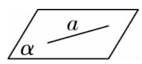
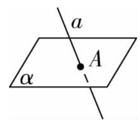
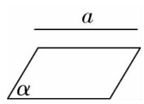


②

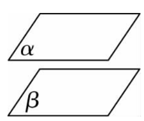
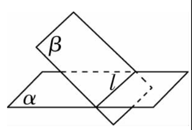
2. 空间中两条直线的位置关系

位置关系	共面情况	有无公共点
相交	在同一平面内	<u>有且只有一个公共点</u>
平行	在同一平面内	没有公共点
异面	不同在任何一个平面内	没有公共点

3. 直线与平面的位置关系

位置关系	图形表示	符号表示	公共点
直线 a 在平面 α 内		<u>$a\subset\alpha$</u>	有<u>无数</u>个公共点
直线 a 与平面 α 相交		<u>$a\cap\alpha=A$</u>	有且只有<u>一个</u>公共点
直线 a 与平面 α 平行		<u>$a/\!/\alpha$</u>	<u>没有</u>公共点

4. 平面与平面的位置关系

位置关系	图形表示	符号表示	公共点
两平面平行		<u>$\alpha/\!/\beta$</u>	<u>没有</u>公共点
两平面相交		<u>$\alpha\cap\beta=l$</u>	有无数个公共点，这些点<u>在一条直线上</u>

小试牛刀

1. 一条直线与两条平行线中的一条异面，则它与另一条（　C　）

A. 相交　　B. 异面

C. 相交或异面　　D. 平行

【解析】一条直线与两条平行线中的一条异面，则它与另一条可能相交，也可能异面. 故选 C.

2. 已知异面直线 a，b 分别在平面 α，β 内，且 $\alpha\cap\beta=c$，那么直线 c 一定（　C　）

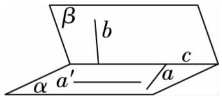
A. 与 a 或 b 没有平行的可能

B. 只能与 a，b 中的一条相交

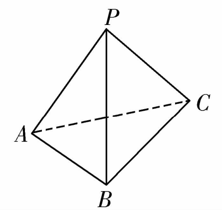
C. 至少与 a,b 中的一条相交

D. 与 a,b 都平行

【解析】如图,a'与 b 异面,但 $a'/\!/c$,故 A 错;a 与 b 异面,且都与 c 相交,故 B 错;若 $a/\!/c$,$b/\!/c$,则 $a/\!/b$,与 a,b 异面矛盾,故 D 错.故选 C.



3. 如图,在三棱锥 P-ABC 的六条棱所在的直线中,异面直线共有__3__对.



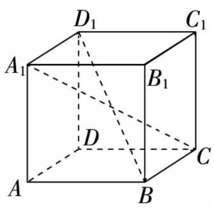
【解析】PB 与 AC 异面,PC 与 AB 异面,PA 与 BC 异面,共有 3 对.

互动课堂

合作探究

探究 1 直线与直线的位置关系

【例 1】如图,在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,试判断下列各对线段所在直线的位置关系:(1)AB 与 CC_1;(2)A_1B_1 与 DC;(3)A_1C 与 D_1B.



【解析】(1)因为 $C\in$ 平面 $ABCD$,$AB\subset$ 平面 $ABCD$,又 $C\notin AB$,$C_1\notin$ 平面 $ABCD$,所以 AB 与 CC_1 异面.

(2)因为 $A_1B_1/\!/AB$,$AB/\!/DC$,所以 $A_1B_1/\!/DC$.

(3)因为 $A_1D_1/\!/B_1C_1$,$B_1C_1/\!/BC$,所以 $A_1D_1/\!/BC$,则 A_1,B,C,D_1 在同一平面内.所以 A_1C 与 D_1B 相交.

点睛 判定两直线异面的常用方法.

(1)定义法:由定义判断两直线不可能在同一平面内;

(2)排除法(反证法):排除两直线共面(平行或相交)的情况.

【变式训练 1】在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,与棱 AB 异面的棱有 (C)

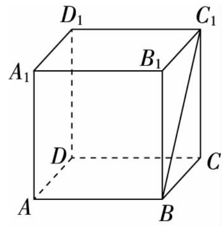
A. 8 条　　B. 6 条

C. 4 条　　D. 3 条

【解析】正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 一共有 12 条棱,其中有三条与 AB 平行,有四条与 AB 相交,还剩四条,CC_1,DD_1,A_1D_1,B_1C_1 都是与 AB 异面且垂直的关系.故选 C.

探究 2 直线与平面的位置关系

【例 2】如图所示,$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 为正方体,试判断 BC_1 与六个面的位置关系.



【解析】$\because B\in$ 平面 BCC_1B_1,$C_1\in$ 平面 BCC_1B_1,

$\therefore BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1.

又$\because BC_1$ 与平面 ADD_1A_1 无公共点,

$\therefore BC_1/\!/$平面 ADD_1A_1.

$\because C_1\in$ 平面 CDD_1C_1,$B\notin$ 平面 CDD_1C_1,

$\therefore BC_1$ 与平面 CDD_1C_1 相交,

同理 BC_1 与平面 ABB_1A 相交,BC_1 与平面 $ABCD$ 相交,BC_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 相交.

点睛 直线与平面位置关系的解题思路:

解决此类问题首先要搞清楚直线与平面各种位置关系的特征,利用其定义作出判断,要有画图意识,并借助空间想象能力进行细致的分析.

【变式训练 2】下列说法中,正确的个数是 (B)

①如果两条平行直线中的一条和一个平面相交,那么另一条也和这个平面相交;

②一条直线和另一条直线平行,它就和经过另一条直线的任何平面平行;

③若直线与平面不相交,则直线与平面平行.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

【解析】由直线与平面的位置关系可知①正确;这条直线可能在经过另一条直线的平面内,所以②不正确;对于③,包括两种情形,直线 $a/\!/\alpha$ 或直线 $a\subset\alpha$,故③不正确.故选 B.

探究 3 平面与平面的位置关系

【例 3】α,β 是两个不重合的平面,下列说法中正确的是 (D)

A. 若平面 α 内有两条直线 a,b 都与平面 β 平行,则 $\alpha/\!/\beta$

B. 若平面 α 内有无数条直线平行于平面 β,则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若直线 a 与平面 α 和平面 β 都平行,则 $\alpha/\!/\beta$

D. 若平面 α 内所有的直线都与平面 β 平行,则 $\alpha/\!/\beta$

【解析】对于选项 A,B,C,α 与 β 可能相交或平行;D 符合面面平行的定义,正确.故选 D.

点睛 平面与平面位置关系的解题思路:判断线线、线面、面面的位置关系,要牢牢地抓住其特征与定义,要有画图意

识，结合空间想象能力全方位、多角度地去考虑问题. 常借助长方体模型进行判断.

【变式训练 3】已知平面 α//平面 β 且 $a\subset\alpha$，有下列说法：①a 与 β 内的所有直线都平行；②a 与 β 平行；③a 与 β 内的无数条直线平行. 其中正确说法的个数是 (C)

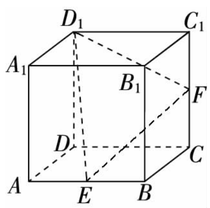
A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

【解析】因为 $\alpha//\beta$，$a\subset\alpha$，所以 a 与 β 无公共点，所以 $a//\beta$，故②正确，所以 a 与 β 内的所有直线都没有公共点，所以 a 与 β 内的直线平行或异面，故①不正确，③正确. 故选 C.

随堂小练

1. 如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AB，CC_1 的中点，在平面 ADD_1A_1 内且与平面 D_1EF 平行的直线 (D)



A. 不存在　　B. 有 1 条

C. 有 2 条　　D. 有无数条

【解析】由题设知平面 ADD_1A_1 与平面 D_1EF 有公共点 D_1，由基本事实 3 可知必有过该点的公共直线 l，在平面 ADD_1A_1 内与 l 平行的直线有无数条，且它们都不在平面 D_1EF 内，则它们都与平面 D_1EF 平行，故选 D.

2. 已知平面 α//平面 β，直线 $m\subset\alpha$，直线 $n\subset\beta$，则直线 m，n 的位置关系为 (C)

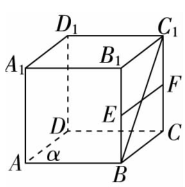
A. 平行或相交　　B. 相交或异面

C. 平行或异面　　D. 平行、相交或异面

【解析】∵平面 α//平面 β，∴m 不可能与 n 相交，故 m，n 只能平行或异面，故选 C.

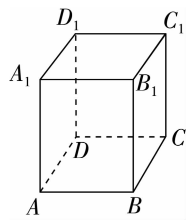
3. 若 a，b 是两条异面直线，且 a//平面 α，则 b 与 α 的位置关系是 <u>b 与 α 平行或相交或 b 在 α 内</u>.

【解析】如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，设平面 $ABCD$ 为 α，A_1B_1 为 a，则 $a//\alpha$，当分别取 EF，BC_1，BC 为 b 时，均满足 a 与 b 异面，于是 $b//\alpha$，$b\cap\alpha=B$，$b\subset\alpha$(其中 E，F 为棱 BB_1，CC_1 的中点).



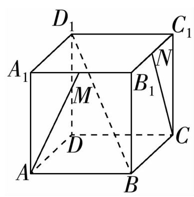
4. 在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱中，既与 AB 共面，又与 CC_1 共面的棱有 <u>5</u> 条.

【解析】如图，



由图可知，既与 AB 共面又与 CC_1 共面的棱有 CD，BC，BB_1，AA_1，C_1D_1，共 5 条.

5. 如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，问：

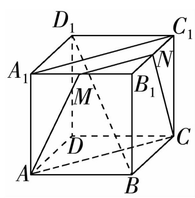


(1) AM 和 CN 是否为异面直线？

(2) D_1B 和 CC_1 是否为异面直线？说明理由.

【解析】(1)不是异面直线. 理由如下：

如图，连接 MN，A_1C_1，AC，



∵M，N 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，

∴$MN//A_1C_1$.

又∵$A_1A \underline{\underline{//}} C_1C$，

∴四边形 A_1ACC_1 为平行四边形.

∴$A_1C_1//AC$，得到 $MN//AC$，

∴A，M，N，C 在同一个平面内，

故 AM 和 CN 不是异面直线.

(2)是异面直线，理由如下：

假设 D_1B 与 CC_1 在同一个平面 CC_1D_1D 内，则 $B\in$ 平面 CC_1D_1D，$C\in$ 平面 CC_1D_1D.

∴$BC\subset$ 平面 CC_1D_1D，

这与 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是正方体相矛盾.

∴假设不成立，

故 D_1B 与 CC_1 是异面直线.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十八)

课后作业 · 单独成册

8.5 空间直线、平面的平行

第 1 课时 直线与直线平行

学习目标	核心素养
1. 正确理解基本事实 4 和等角定理.(重点) 2. 能用基本事实 4 证明直线与直线平行,能用等角定理判断角间的相等或互补关系.(重点、难点)	1. 借助对基本事实 4 及等角定理的理解来培养直观想象素养. 2. 掌握基本事实 4 及等角定理的应用有利于培养逻辑推理素养.

自主预习

情景导思

我们知道,在同一平面内,不相交的两条直线是平行直线,并且当两条直线都与第三条直线平行时,这两条直线互相平行. 在空间中,是否也有类似的结论?

知新预学

1. 平行线的传递性

基本事实 4:平行于同一条直线的两条直线平行.

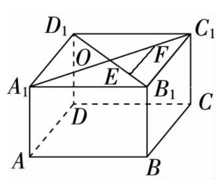
符号表示:<u>$a\parallel b, b\parallel c\Rightarrow a\parallel c$</u>.

2. 等角定理

如果空间中两个角的两条边分别对应平行,那么这两个角相等或互补.

小试牛刀

1. 如图所示,在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 B_1O 和 C_1O 的中点,则长方体的各棱中与 EF 平行的有 (B)



A. 3 条　　B. 4 条

C. 5 条　　D. 6 条

【解析】由于 E,F 分别是 B_1O,C_1O 的中点,故 $EF\parallel B_1C_1$,

∵和棱 B_1C_1 平行的棱还有 3 条:AD,BC,A_1D_1,∴共有 4 条. 故选 B.

2. 若$\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$ 且 $OA\parallel O_1A_1$,OA 与 O_1A_1 的方向相同,则下列结论中正确的是 (D)

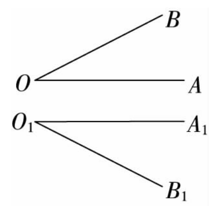
A. $OB\parallel O_1B_1$ 且方向相同

B. $OB\parallel O_1B_1$

C. OB 与 O_1B_1 不平行

D. OB 与 O_1B_1 不一定平行

【解析】OB 与 O_1B_1 不一定平行,反例如图.



3. 空间中有两个角 α,β,且角 α,β 的两边分别对应平行. 若 $\alpha=60°$,则 $\beta=$<u>$60°$或$120°$</u>.

【解析】∵α 与 β 两边对应平行,但方向不确定,

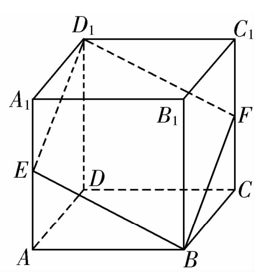
∴α 与 β 相等或互补.

互动课堂

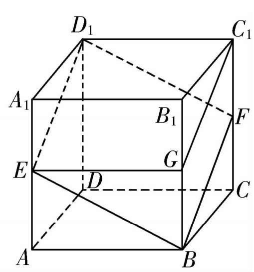
合作探究

探究 1　基本事实 4 的应用

【例 1】如图所示,已知 E,F 分别是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AA_1,CC_1 的中点,求证:四边形 $EBFD_1$ 是菱形.



【证明】取棱 BB_1 中点为 G,连接 C_1G,EG,



由正方体的性质，侧面 ABB_1A_1 为正方形，

又 E，G 分别为 AA_1，BB_1 的中点，

∴$EG=A_1B_1=C_1D_1$，$EG/\!/A_1B_1/\!/C_1D_1$，

从而四边形 EGC_1D_1 为平行四边形，

∴$D_1E/\!/C_1G$，$D_1E=C_1G$，

又 F，G 分别为棱 CC_1，BB_1 中点，

由侧面 CBB_1C_1 为正方形，知四边形 BGC_1F 为平行四边形，

∴$BF/\!/C_1G$，$BF=C_1G$，

又∵$D_1E/\!/C_1G$，$D_1E=C_1G$，

由平行公理可知 $D_1E=BF$，$D_1E/\!/BF$，

从而四边形 $EBFD_1$ 为平行四边形，

由 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，不妨设其棱长为 a，易知 $BE=BF=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，四边形 $EBFD_1$ 为菱形.

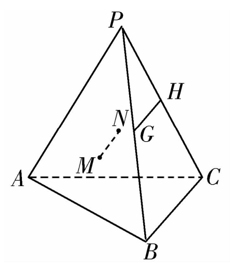
点睛 证明两条直线平行的常用方法：

(1)利用平面几何的结论，如平行四边形的对边平行，三角形的中位线与第三条边平行；

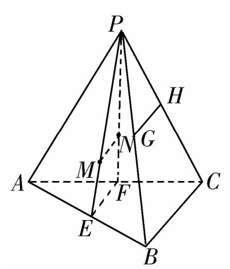
(2)利用定义，证明两条直线在同一个平面内且两条直线没有公共点；

(3)利用基本事实 4，找到一条直线，使所证的直线都与这条直线平行.

【变式训练 1】如图，在三棱锥 P-ABC 中，G，H 分别为 PB，PC 的中点，M，N 分别为△PAB，△PAC 的重心，且△ABC 为等腰直角三角形，$\angle ABC=90°$. 求证：$GH/\!/MN$.



【证明】连接 PN 并延长，交 AC 于 F，连接 PM 并延长，交 AB 于 E，连接 EF.



∵在三棱锥 P-ABC 中，G，H 分别为 PB，PC 的中点，

∴$GH/\!/BC$.

∵M，N 分别为△PAB，△PAC 的重心，

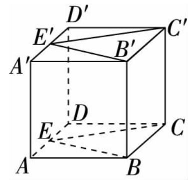
∴E，F 分别为 AB，AC 的中点，且 $MN/\!/EF$，

∴$EF/\!/BC$，

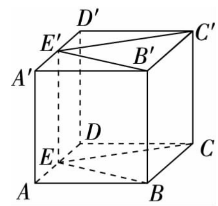
∴$GH/\!/MN$.

探究 2 等角定理的应用

【例 2】如图所示，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，已知 E，E' 分别是棱 AD，$A'D'$ 的中点，求证：$\angle BEC=\angle B'E'C'$.



【证明】如图所示，连接 EE'.



∵E，E' 分别是 AD，$A'D'$ 的中点，

∴$AE/\!/A'E'$，且 $AE=A'E'$.

∴四边形 $AEE'A'$ 是平行四边形.

∴$AA'/\!/EE'$，且 $AA'=EE'$.

又∵$AA'/\!/BB'$，且 $AA'=BB'$，

∴$EE'/\!/BB'$，且 $EE'=BB'$.

∴四边形 $BEE'B'$ 是平行四边形.

∴$BE/\!/B'E'$.

同理可证 $CE/\!/C'E'$.

又 $\angle BEC$ 与 $\angle B'E'C'$ 的两边方向相同，

∴$\angle BEC=\angle B'E'C'$.

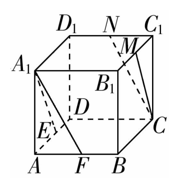
点睛 应用等角定理的注意事项：

空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补. 注意观察两角的方向是否相同，若相同，则两角相等；若不同，则两角互补.

【变式训练 2】如图所示，$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，E，F 分别为 AD，AB 的中点，M，N 分别为 B_1C_1，C_1D_1 的中点. 求证：

(1)$MC/\!/A_1E$，$A_1F/\!/CN$；

(2)$\angle EA_1F=\angle NCM$.



【证明】(1)取 A_1D_1 的中点 I，连接 DI，MI.

∵M 为 B_1C_1 的中点，$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

∴$C_1D_1 \perp\!\!\!\!= CD$，$MI \perp\!\!\!\!= C_1D_1$，

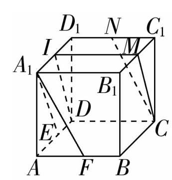
根据基本事实 4 知 $CD \perp\!\!\!\!= MI$，

故四边形 $IDCM$ 为平行四边形，

∴$MC/\!/ID$，

又 I，E 分别为 A_1D_1，AD 的中点，

∴$A_1I \perp\!\!\!\!= ED$，



∴四边形 A_1IDE 为平行四边形，

∴$A_1E//ID$.

故 $MC//A_1E$.

同理可证 $A_1F//CN$.

(2)由(1)知 $A_1F//CN$，$MC//A_1E$，

又 A_1E 与 CM，A_1F，CN 的方向分别相反，

∴$\angle EA_1F=\angle NCM$.

随堂小练

1. (多选题)下列结论正确的是 (BD)

A. 在空间中，若两条直线不相交，则它们一定平行

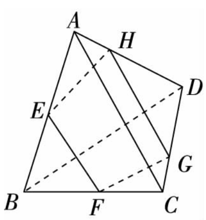
B. 平行于同一条直线的两条直线平行

C. 一条直线和两条平行直线中的一条相交，那么它也和另一条相交

D. 空间中有四条直线 a，b，c，d，如果 $a//b$，$c//d$，且 $a//d$，那么 $b//c$

【解析】A 错误，可能异面；B 正确；C 错误，和另一条可能异面；D 正确，由平行线的传递性可判断. 故选 BD.

2. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AB，BC 的中点，G，H 分别在边 CD，DA 上，且满足 $CG=\frac{1}{2}GD$，$DH=2HA$，则四边形 $EFGH$ 为 (D)



A. 平行四边形　　B. 矩形

C. 菱形　　D. 梯形

【解析】∵E，F 分别为 AB，BC 的中点，

∴$EF \underline{\parallel} \frac{1}{2}AC$，

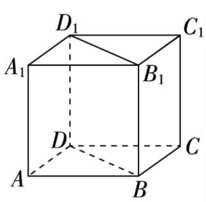
又 $\frac{DH}{HA}=\frac{2}{1}$，$\frac{DG}{GC}=\frac{2}{1}$，

∴$\frac{DH}{HA}=\frac{DG}{GC}$，∴$HG \underline{\parallel} \frac{2}{3}AC$，

∴$EF//HG$ 且 $EF\neq HG$，

∴四边形 $EFGH$ 为梯形.

3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，BD 和 B_1D_1 分别是正方形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线，则



(1)$\angle DBC$ 的两边与 $\underline{\angle D_1B_1C_1}$ 的两边分别平行且方向相同；

(2)$\angle DBC$ 的两边与 $\underline{\angle B_1D_1A_1}$ 的两边分别平行且方向相反.

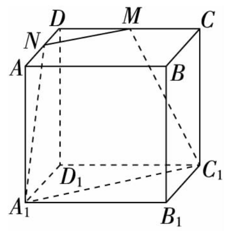
【解析】(1)∵$B_1D_1//BD$，$B_1C_1//BC$ 且方向相同，∴$\angle DBC$ 的两边与 $\angle D_1B_1C_1$ 的两边分别平行且方向相同.

(2)∵$B_1D_1//DB$，$D_1A_1//BC$ 且方向相反，∴$\angle DBC$ 的两边与 $\angle B_1D_1A_1$ 的两边分别平行且方向相反.

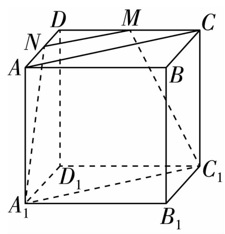
4. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，M，N 分别是棱 CD，AD 的中点. 求证：

(1)四边形 MNA_1C_1 是梯形；

(2)$\angle DNM=\angle D_1A_1C_1$.



【证明】(1)如图，连接 AC，∵在△ACD 中，M，N 分别是 CD，AD 的中点，∴MN 是△ACD 的中位线，



∴$MN//AC$，$MN=\frac{1}{2}AC$.

又由正方体的性质，得 $AC \underline{\parallel} A_1C_1$.

∴$MN//A_1C_1$，且 $MN=\frac{1}{2}A_1C_1$，即 $MN\neq A_1C_1$，

∴四边形 MNA_1C_1 是梯形.

(2)由(1)可知 $MN//A_1C_1$.

又∵$ND//A_1D_1$，

∴$\angle DNM$ 与 $\angle D_1A_1C_1$ 相等或互补.

而 $\angle DNM$ 与 $\angle D_1A_1C_1$ 均为锐角，

∴$\angle DNM=\angle D_1A_1C_1$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十九)

课后作业 · 单独成册

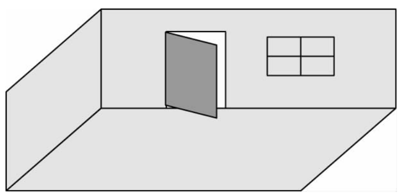
第2课时 直线与平面平行

学习目标	核心素养
1. 理解直线与平面平行的判定定理并能运用其解决相关问题.(重点) 2. 理解直线与平面平行的性质定理并能运用其解决相关问题.(重点) 3. 通过对判定定理与性质定理的理解和应用,培养空间转化能力和逻辑推理能力.(重点、难点)	1. 探究直线与平面平行的判定定理与性质定理、线线平行与线面平行之间的转化,有利于培养逻辑推理素养. 2. 理清几何体的点、线、面的位置关系有利于培养直观想象素养.

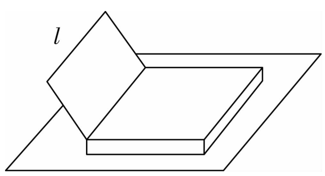
自主预习

情景导思

问题1:观察开门与关门,门的两边是什么位置关系.当门绕着一边转动时,门转动的一边与门框所在的平面是什么位置关系?

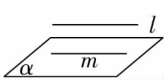


问题2:将一本书平放在桌面上,翻动书的封面,封面边缘所在直线 l 与桌面所在的平面具有怎样的位置关系?桌面内有与 l 平行的直线吗?

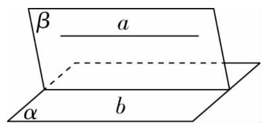


知新预学

1. 直线与平面平行的判定定理

文字语言	图形语言	符号语言
如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行,那么该直线与此平面平行		$l/\!/m, l\not\subset\alpha, m\subset\alpha \Rightarrow l/\!/\alpha$

2. 直线与平面平行的性质定理

文字语言	图形语言	符号语言
一条直线与一个平面平行,如果过该直线的平面与此平面相交,那么该直线与交线平行		$a/\!/\alpha, a\subset\beta, \alpha\cap\beta=b \Rightarrow a/\!/b$

小试牛刀

1. 圆台的底面内的任意一条直径与另一个底面的位置关系是 (A)

A. 平行　　B. 相交

C. 在平面内　　D. 不确定

【解析】圆底面内的任意一条直径与另一个底面无公共点,则它们的位置关系是平行.故选A.

2. 给出以下命题(其中 a,b 表示直线,α 表示平面):

①若 $a/\!/\alpha, b/\!/\alpha$,则 $a/\!/b$;

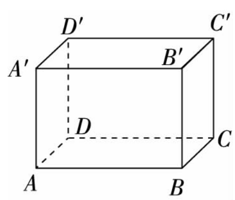
②若 $a/\!/b, b/\!/\alpha$,则 $a/\!/\alpha$;

③若 $a/\!/\alpha, b\subset\alpha$,则 $a/\!/b$.

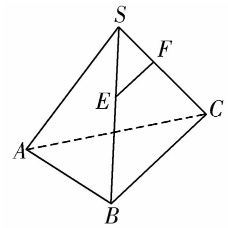
其中正确命题的个数是 (A)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】借助长方体判断,如图,在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中,$A'B'/\!/$平面 $ABCD$,$B'C'/\!/$平面 $ABCD$,但 $A'B'$ 与 $B'C'$ 相交,故①错误;$AB/\!/A'B'$,$A'B'/\!/$平面 $ABCD$,但 $AB\subset$平面 $ABCD$,故②错误;$A'B'/\!/$平面 $ABCD$,$BC\subset$平面 $ABCD$,但 $A'B'$ 与 BC 异面,故③错误.故选A.



3. 如图,在三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中,E,F 分别是 SB,SC 上的点,且 $EF/\!/$平面 ABC,则 (B)



A. EF 与 BC 相交　　B. $EF/\!/BC$

C. EF 与 BC 异面　　D. 以上均有可能

【解析】∵$EF/\!/$平面 ABC，$EF\subset$平面 SBC，且平面 $SBC\cap$平面 $ABC=BC$，故根据直线与平面平行的性质定理可得 $EF/\!/BC$. 故选 B.

互动课堂

合作探究

探究 1 直线与平面平行的判定定理的理解

【例 1】下列命题中正确的个数是　（ B ）

①若直线 a 不在平面 α 内，则 $a/\!/\alpha$；

②若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l/\!/\alpha$；

③若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与 α 内的任意一条直线都平行；

④若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与 α 内的任意一条直线都没有公共点；

⑤平行于同一平面的两直线可以相交.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【解析】①$a\not\subset\alpha$，则 $a/\!/\alpha$ 或 a 与 α 相交，故①错误；②当 l 与 α 相交时，满足条件，但不能推出 $l/\!/\alpha$，故②错误；③若 $l/\!/\alpha$，则 l 与 α 内的无数条直线异面，并非都平行，故③错误；若 $l/\!/\alpha$，则 l 与 α 内的任何直线都没有公共点，故④正确；若 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，则 a 与 b 可以相交，也可以平行或异面，⑤正确. 故选 B.

点睛 理解判定定理的注意事项：

(1)明确判定定理的关键条件.

(2)充分考虑各种可能的情况.

(3)特殊的情况注意举反例来说明.

【变式训练 1】给出下列说法：

①若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线，则 $l/\!/\alpha$；②若直线 a 在平面 α 外，则 $a/\!/\alpha$；③若直线 $a/\!/$直线 b，直线 $b\subset$平面 α，则 $a/\!/\alpha$；④若直线 $a/\!/$直线 b，直线 $b\subset$平面 α，则直线 a 平行于平面 α 内的无数条直线.

其中正确说法的个数为　（ A ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线，l 可能在 α 内，l 与 α 不一定平行，故①不正确；

若直线 a 在平面 α 外，则 $a/\!/\alpha$ 或 a 与 α 相交，故②不正确；

若直线 $a/\!/b$，$b\subset\alpha$，则 $a/\!/\alpha$ 或 $a\subset\alpha$，故③不正确，

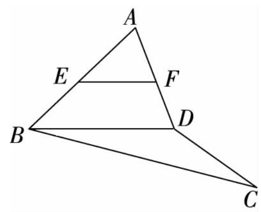
若直线 $a/\!/b$，$b\subset\alpha$，则 $a/\!/\alpha$ 或 $a\subset\alpha$，

∴a 平行于平面 α 内的无数条直线，故④正确.

故选 A.

探究 2 直线与平面平行的判定定理的应用

【例 2】在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点，求证：$EF/\!/$平面 BCD.



【证明】∵E，F 分别为 AB，AD 的中点，∴$EF/\!/BD$.

∵$EF\not\subset$平面 BCD，$BD\subset$平面 BCD.

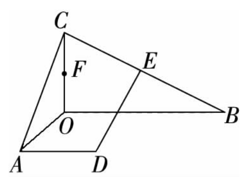
∴ $EF/\!/$平面 BCD.

点睛 应用判定定理的注意事项：

(1)欲证线面平行可转化为证线线平行解决.

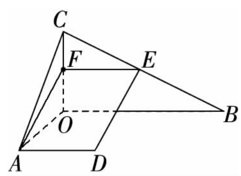
(2)判定定理中有三个条件，缺一不可，其中平行关系常常利用平行四边形、三角形中位线、等比例线段、相似三角形等得出.

【变式训练 2】如图，已知 OA，OB，OC 交于点 O，$AD\perp\!\!\!\!=\frac{1}{2}OB$，$E$，$F$ 分别为 BC，OC 的中点. 求证：$DE/\!/$平面 AOC.



【证明】如图，连接 AF，EF，

∵在△OBC 中，E，F 分别为 BC，OC 的中点，



∴$FE\perp\!\!\!\!=\frac{1}{2}OB$，

又∵$AD\perp\!\!\!\!=\frac{1}{2}OB$，∴$FE\perp\!\!\!\!=AD$.

∴四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

∴$DE/\!/AF$.

又∵$AF\subset$平面 AOC，$DE\not\subset$平面 AOC.

∴$DE/\!/$平面 AOC.

探究 3 直线与平面平行的性质定理的理解

【例 3】已知直线 m,n 及平面 α,β 有下列关系：

①$m\subset\beta,n\subset\beta$；②$n\subset\alpha$；③$m/\!/\alpha$；④$m/\!/n$.

把其中一些关系看作条件，另一些看作结论，组成一个真命题是 ①②③⇒④或①②④⇒③ .

【解析】结合线面平行的性质定理，可知①②③⇒④，结合线面平行的判定定理，可知①②④⇒③.

点睛 理解性质定理的注意事项：

(1)明确性质定理的关键条件.

(2)充分考虑各种可能的情况.

(3)特殊的情况注意举反例来说明.

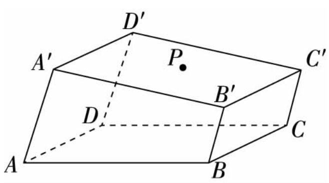
【变式训练 3】有以下三个命题：①如果一条直线和一个平面平行，那么它就和这个平面内的无数条直线平行；②过直线外一点，有且只有一个平面和已知直线平行；③如果直线 $l/\!/$平面 α，那么过平面 α 内一点和直线 l 平行的直线在 α 内. 其中正确命题的个数为 (C)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】结合线面平行的性质定理，可知过直线外一点，有无数个平面和已知直线平行，故②错误. ①③正确，故选 C.

探究 4 直线与平面平行的性质定理的应用

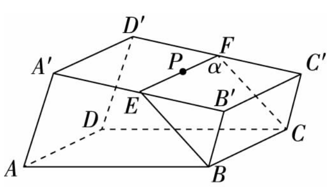
【例 4】如图所示的一块木料中，棱 BC 平行于平面 $A'B'C'D'$.



(1)要经过平面 $A'B'C'D'$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，在木料表面应该怎样画线？

(2)所画的线与平面 $ABCD$ 是什么位置关系？

【解析】(1)如图，在平面 $A'C'$ 内，过点 P 作直线 EF，使 $EF/\!/B'C'$，



并分别交棱 $A'B'$，$C'D'$ 于点 E,F. 连接 BE,CF.

则 EF,BE,CF 就是应画的线.

(2)由(1)知，$EF/\!/B'C'$，∴$EF/\!/BC$.

而 BC 在平面 AC 内，EF 在平面 AC 外，∴$EF/\!/$平面 AC.

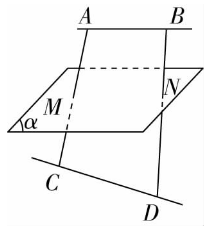
由图可知，BE,CF 都与平面 AC 相交.

点睛 应用性质定理的注意事项：

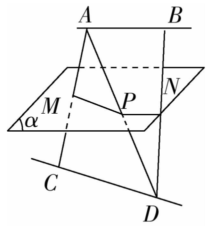
(1)证线线平行可转化为证线面平行来解决，并常与判定定理结合使用.

(2)性质定理中有三个条件，缺一不可，平行关系的寻求常利用中位线的性质.

【变式训练 4】如图，AB,CD 为异面直线，且 $AB/\!/\alpha$，$CD/\!/\alpha$，AC,BD 分别交 α 于 M,N 两点，求证：$AM:MC=BN:ND$.



【证明】连接 AD 交 α 于点 P，连接 MP,NP，



∵$CD/\!/\alpha$，平面 $ACD\cap\alpha=MP$，

∴$CD/\!/MP$，∴$\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{AP}{PD}$.

同理可得 $NP/\!/AB$，$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{BN}{ND}$，

∴$\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{BN}{ND}$.

随堂小练

1. 直线 l 是平面 α 外的一条直线，下列条件中可推出 $l/\!/\alpha$ 的是 (D)

A. l 与 α 内的一条直线不相交

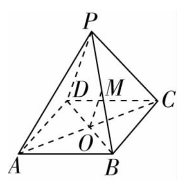
B. l 与 α 内的两条直线不相交

C. l 与 α 内的无数条直线不相交

D. l 与 α 内的任意一条直线不相交

【解析】根据直线与平面平行的定义即可判断 D 正确. 故选 D.

2. 如图所示，P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外一点，矩形对角线交点为 O，M 为 PB 的中点，给出五个结论：①$OM/\!/PD$；②$OM/\!/$平面 PCD；③$OM/\!/$平面 PDA；④$OM/\!/$平面 PBA；⑤$OM/\!/$平面 PBC. 其中正确结论的个数为 (C)



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，∴O 为 BD 的中点，在△PBD 中，M 是 PB 的中点，∴OM 是中位线，故 $OM/\!/PD$，故①正确.

又 $OM\not\subset$平面 PCD，$OM\not\subset$平面 PDA，

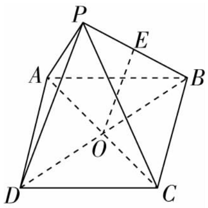
$\therefore OM /\!/$ 平面 PCD，且 $OM /\!/$ 平面 PDA，故②③正确.

$\because$ 点 M 在 PB 上，$\therefore OM$ 与平面 PBA，平面 PBC 相交，故④⑤错误.

故正确的结论为①②③，共有 3 个.

故选 C.

3. 如图，P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，E 为 PB 的中点，O 为 AC，BD 的交点，则与 EO 平行的平面是 ___平面 PAD，平面 PCD___.



【解析】$\because O$ 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，

$\therefore$ 点 O 为 BD 的中点.

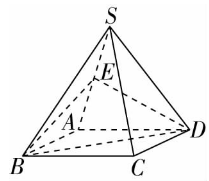
在 $\triangle DPB$ 中，$\because O$ 为 BD 的中点，E 为 PB 的中点，

$\therefore EO /\!/ PD$，

又 EO 在平面 PAD，平面 PCD 外，PD 在平面 PAD，平面 PCD 内，

$\therefore EO$ 与平面 PAD，平面 PCD 平行.

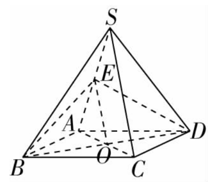
4. 如图所示，在四棱锥 S-$ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，点 E 是 SA 上一点，当 $SE:SA=$ ___$1:2$___ 时，$SC /\!/$ 平面 EBD.



【解析】如图，连接 AC，设 AC 与 BD 的交点为 O，连接 EO.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore$ 点 O 是 AC 的中点.

$\because SC /\!/$ 平面 EBD，且平面 $EBD \cap$ 平面 $SAC = EO$，$\therefore SC /\!/ EO$，$\therefore$ 点 E 是 SA 的中点，此时 $SE:SA=1:2$.



温馨提示：请自主完成课后作业（三十）

课后作业·单独成册

第3课时　平面与平面平行

学习目标	核心素养
1. 理解并掌握平面与平面平行的判定定理，明确定理中“相交”两字的重要性.（重点） 2. 理解并能证明平面与平面平行的性质定理，明确定理的条件.（重点） 3. 能利用平面与平面平行的判定定理证明面面平行问题，并能利用其性质定理解决有关平行的问题.（重点、难点）	1. 通过对平面与平面平行的判定定理和性质定理的学习，培养数学抽象素养. 2. 借助平面与平面平行的判定定理和性质定理的简单应用，提升逻辑推理素养.

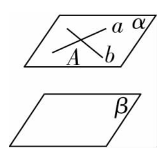
自主预习

情景导思

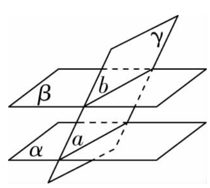
我们学过，两个平行平面没有公共点，所以一个平面内的任意一条直线都与另一个平面没有公共点. 也就是说，如果两个平面平行，那么一个平面内的任意一条直线都与另一个平面平行. 这个定义给出了两个平面平行的充要条件，如果一个平面内的任意一条直线都与另一个平面平行，那么这两个平面一定平行.

知新预学

1. 平面与平面平行的判定定理

文字语言	符号语言	图形语言
如果一个平面内的<u>两条相交直线</u>与另一个平面平行，那么这两个平面平行	$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\a\cap b=A\\a/\!/\beta\\b/\!/\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$	

2. 平面与平面平行的性质定理

文字语言	符号语言	图形语言
如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行	$\alpha/\!/\beta,\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a/\!/b$	

小试牛刀

1. 平面 α 与平面 β 平行的条件可以是　　（ D ）

A. α 内的一条直线与 β 平行

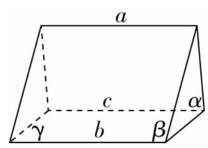
B. α 内的两条直线与 β 平行

C. α 内的无数条直线与 β 平行

D. α 内的两条相交直线分别与 β 平行

【解析】若两个平面 α,β 相交，设交线是 l，则有 α 内的直线 m 与 l 平行，得到 m 与平面 β 平行，从而可得 A 是不正确的；而 B 中两条直线可能是平行于交线 l 的直线，也不能判定 α 与 β 平行；C 中的无数条直线也可能是一组平行于交线 l 的直线，因此也不能判定 α 与 β 平行. 由平面与平面平行的判定定理可知 D 选项是正确的. 故选 D.

2. 如图，已知平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=a$，平面 $\beta\cap$ 平面 $\gamma=b$，平面 $\gamma\cap$ 平面 $\alpha=c$. 若 $a/\!/b$，则 c 与 a,b 的位置关系是　　（ D ）



A. c 与 a,b 都异面

B. c 与 a,b 都相交

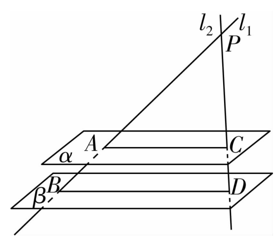
C. c 至少与 a,b 中的一条相交

D. c 与 a,b 都平行

【解析】$\because a/\!/b,a\not\subset\gamma,b\subset\gamma,\therefore a/\!/\gamma$.

又 $\because a\subset\alpha,\alpha\cap\gamma=c,\therefore a/\!/c,\therefore a/\!/b/\!/c$. 故选 D.

3. 如图，平面 $\alpha/\!/$ 平面 β，过平面 α,β 外一点 P 引直线 l_1 分别交平面 α,β 于 A,B 两点，$PA=6,AB=2$，引直线 l_2 分别交平面 α,β 于 C,D 两点，已知 $BD=12$，则 AC 的长等于　　（ B ）



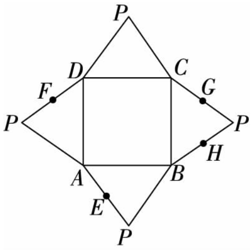
A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 7

【解析】由 $l_1\cap l_2=P$，知 l_1,l_2 确定一个平面 γ，

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cap\gamma=AC\\\beta\cap\gamma=BD\\\alpha/\!/\beta\end{array}\right\}\Rightarrow AC/\!/BD\Rightarrow\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BD}.$$

$\therefore\frac{6}{6+2}=\frac{AC}{12}$，解得 $AC=9$. 故选 B.

4. 如图是一几何体的平面展开图，其中四边形 $ABCD$ 为正方形，E,F,G,H 分别为 PA,PD,PC,PB 的中点，在此几何体中，给出下面五个结论：



①平面 $EFGH$//平面 $ABCD$；

②PA//平面 BDG；

③EF//平面 PBC；

④FH//平面 BDG；

⑤EF//平面 BDG.

其中正确结论的序号是__①②③④__.

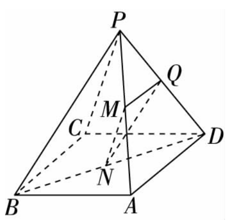
【解析】把图形还原为一个四棱锥，然后根据线面平行、面面平行的判定定理判断即可.

互动课堂

合作探究

探究 1 面面平行判定定理的应用

【例 1】如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，点 M,N,Q 分别在 PA,BD,PD 上，且 $PM:MA=BN:ND=PQ:QD$. 求证：平面 MNQ//平面 PBC.



【证明】∵$PM:MA=BN:ND=PQ:QD$，

∴MQ//AD，NQ//BP.

∵$BP\subset$平面 PBC，$NQ\not\subset$平面 PBC，

∴NQ//平面 PBC.

又∵底面 $ABCD$ 为平行四边形，

∴BC//AD，∴MQ//BC.

∵$BC\subset$平面 PBC，$MQ\not\subset$平面 PBC，

∴MQ//平面 PBC.

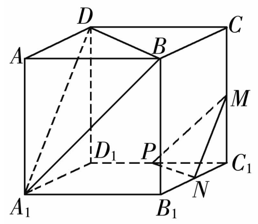
又∵$MQ\cap NQ=Q$，

根据平面与平面平行的判定定理，∴平面 MNQ//平面 PBC.

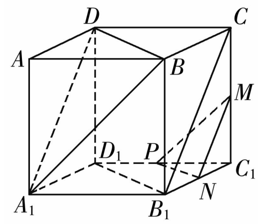
点睛 1. 要证明两平面平行，只需在其中一个平面内找到两条相交直线平行于另一个平面.

2. 判定两个平面平行与判定线面平行一样，应遵循“先找后作”的原则，即先在一个平面内找到两条与另一个平面平行的相交直线，若找不到再作辅助线.

【变式训练 1】如图，$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，M,N,P 分别是 CC_1,B_1C_1,C_1D_1 的中点. 求证：平面 MNP//平面 A_1BD.



【证明】如图所示，连接 B_1D_1，



∵P,N 分别是 D_1C_1,B_1C_1 的中点，

∴PN//B_1D_1.

又 B_1D_1//BD，

∴PN//BD，

又 $PN\not\subset$平面 A_1BD，

$BD\subset$平面 A_1BD，

∴PN//平面 A_1BD.

同理，连接 B_1C，可得 MN//平面 A_1BD，

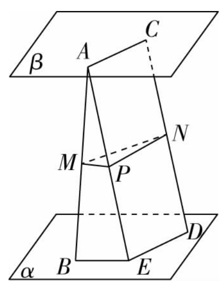
又∵$MN\cap PN=N$，

∴平面 MNP//平面 A_1BD.

探究 2 面面平行性质定理的应用

【例 2】已知 AB,CD 是夹在两个平行平面 α,β 之间的线段，且 AB,CD 所在直线异面，M,N 分别为 AB,CD 的中点. 求证：MN//平面 α.

【证明】假设线段 AC 在平面 β 内，BD 在平面 α 内，如图，过点 A 作 AE//CD 交 α 于点 E，取 AE 的中点 P，连接 MP，PN，BE，ED.



∵AE//CD，

∴AE,CD 确定平面 $AEDC$.

∵平面 $AEDC$ 与 α,β 的交线分别为 ED,AC，

又 α//β，∴ED//AC.

又 P,N 分别为 AE,CD 的中点，

∴PN//ED，又 $ED\subset$平面 α，$PN\not\subset$平面 α，

∴PN//平面 α.

同理可证 MP//BE，∴MP//平面 α，

∵AB,CD 异面，∴MP,NP 相交.

∴平面 MPN//平面 α.

又 $MN\subset$平面 MPN，∴MN//平面 α.

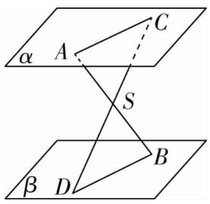
点睛 1. 利用面面平行的性质定理证明线线平行的关键是把要证明的直线看作是平面的交线，往往需要有三个平面，即有两平面平行，再构造第三个面与两平行平面都相交.

2. 由面面平行得到线线平行，体现了转化思想与判定定理的交替使用，可实现线线、线面及面面平行的相互转化.

【变式训练 2】已知平面 α//平面 β，$A,C\in\alpha$，$B,D\in\beta$，直线 AB 与 CD 交于 S，且 $AS=8$，$BS=9$，$CD=34$，求 CS.

【解析】有两种情况：S 位于 α,β 之间，和 S 位于 α,β 的同侧.

(1) 当 S 位于 α,β 之间时，如图①，连接 AC，BD，$AB\cap CD=S$. 因为 AB 与 CD 相交，所以 AB，CD 共面. 设 AB，CD 所在平面为 γ，则 $\gamma\cap\alpha=AC$，$\gamma\cap\beta=BD$.



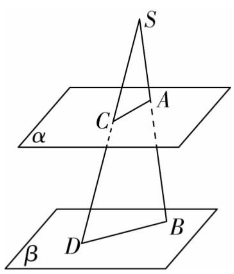
图①

$\because \alpha/\!/\beta$，且 AC 与 BD 共面，$\therefore AC/\!/BD$，

$\therefore \triangle ACS\backsim\triangle BDS$，$\therefore \dfrac{AS}{SB}=\dfrac{CS}{DS}$.

设 $CS=x$，则 $\dfrac{x}{34-x}=\dfrac{8}{9}$，解得 $x=16$.

(2) 当 S 位于 α,β 同侧时，如图②，$AB\cap CD=S$. 由(1)知 AB，CD 共面.



图②

设 AB，CD 所在平面为 γ，

$\because \gamma\cap\alpha=AC$，$\gamma\cap\beta=BD$，且 $\alpha/\!/\beta$，

$\therefore AC/\!/BD$.

$\therefore \triangle SAC\backsim\triangle SBD$，

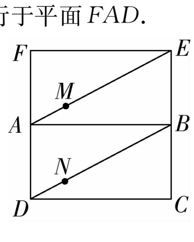
$\therefore \dfrac{SC}{SC+CD}=\dfrac{SA}{SB}$，即 $\dfrac{SC}{SC+34}=\dfrac{8}{9}$，

解得 $SC=272$.

综上所述，$SC=16$ 或 272.

探究 3 平行关系的综合应用

【例 3】如图，矩形 $ABCD$ 和矩形 $ABEF$ 中，$AF=AD$，$AM=DN$，矩形 $ABEF$ 可沿 AB 任意翻折. 求证：当 F,A,D 不共线时，线段 MN 总平行于平面 FAD.



【证明】在平面图形中，连接 MN，设 MN 与 AB 交于点 G.

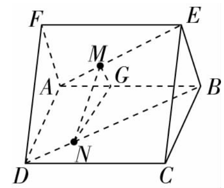
$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $ABEF$ 都是矩形，且 $AD=BE$.

$\therefore$ 四边形 $ADBE$ 是平行四边形.

又 $AM=DN$，

$\therefore$ 四边形 $AMND$ 为平行四边形，$\therefore MN/\!/AD$.

折叠之后，$MG/\!/BE/\!/AF$，$NG/\!/AD$，且 $MG\cap NG=G$，$AD\cap AF=A$，如图，



$\therefore$ 平面 ADF//平面 GNM.

又 $MN\subset$ 平面 GNM，

$\therefore MN$//平面 ADF.

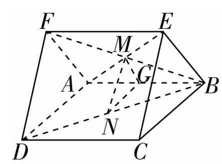
$\therefore$ 当 F,A,D 不共线时，MN 总平行于平面 ADF.

点睛 在立体几何中的平行关系问题中，随着点的移动，图形的形状和大小都要发生变化，探讨其中的规律是经常见到的问题类型.

【变式训练 3】上题条件不变，问“不管怎样翻折矩形 $ABEF$，线段 MN 总和线段 FD 平行”这个结论成立吗？如果成立请证明；如果不成立，请说明能否改变个别已知条件使上述结论成立.

【解析】这个结论不成立. 要使上述结论成立，M,N 应分别为 AE 和 DB 的中点. 由于平面 MNG//平面 FDA，可知要使 $MN/\!/FD$ 总成立，根据面面平行的性质定理，只要 FD 与 MN 共面即可.

若要使 FD 与 MN 共面，连接 FM，只要 FM 与 DN 相交即可.



由折叠后的图形知，若要 DN 和 FM 共面，应有 DN 与 FM 相交于点 B.

$\because FM\cap DN=B$，可知它们确定一个平面，即 F,D,N,M 四点共面.

又平面 $FDNM\cap$ 平面 $MNG=MN$，

平面 $FDNM\cap$ 平面 $FDA=FD$，

$\therefore MN/\!/FD$.

随堂小练

1. 已知直线 a，两个不重合的平面 α,β. 若 $\alpha/\!/\beta$，$a\subset\alpha$，则下列四个结论中正确的是 (B)

①a 与 β 内的所有直线平行；

②a 与 β 内的无数条直线平行；

③a 与 β 内任何一条直线都不垂直；

④a 与 β 没有公共点.

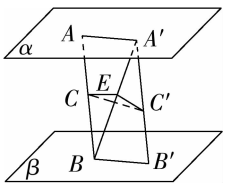
A. ①②　　B. ②④　　C. ②③　　D. ③④

【解析】由面面平行的性质知①错误；
由面面平行的性质知②正确；
α 与 β 内的直线可能异面垂直，故③错误；
由面面平行的定义知④正确.
故选 B.

2. 设平面 $\alpha//\beta$，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，C 是 AB 的中点，当点 A，B 分别在平面 α，β 内运动时，所有的动点 C　　(D)

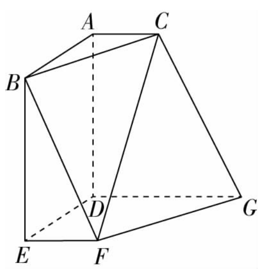
A. 不共面
B. 当且仅当 A，B 分别在两条直线上移动时才共面
C. 当且仅当 A，B 分别在两条给定的异面直线上移动时才共面
D. 不论 A，B 如何移动，都共面

【解析】如图所示，记 A'，B' 分别是 A，B 两点在 α，β 上运动后的两点，此时 AB 的中点变成 $A'B'$ 的中点 C'.



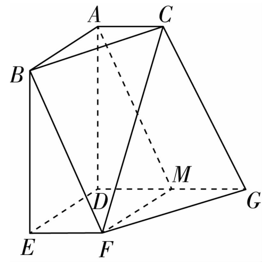
连接 $A'B$，取 $A'B$ 的中点 E，连接 CE，$C'E$，CC'，AA'，BB'，则 $CE//AA'$，从而易得 $CE//\alpha$.
同理 $C'E//\beta$.
$\because\alpha//\beta$，
$\therefore C'E//\alpha$.
$\because C'E\cap CE=E$，
$\therefore$ 平面 $CC'E//$ 平面 α，
$\therefore CC'//$ 平面 α.
$\therefore$ 无论点 A，B 如何移动，所有的动点 C 都在过点 C 且与 α，β 都平行的平面上.
故选 D.

3. 如图，在多面体 $ABC\text{-}DEFG$ 中，平面 $ABC//$ 平面 $DEFG$，$EF//DG$，且 $AB=DE$，$DG=2EF$，则　　(A)



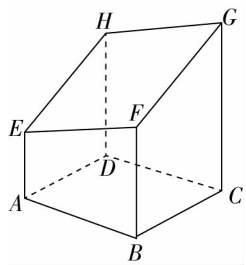
A. $BF//$ 平面 $ACGD$　　B. $CF//$ 平面 $ABED$
C. $BC//FG$　　D. 平面 $ABED//$ 平面 CGF

【解析】如图所示，取 DG 的中点 M，连接 AM，FM.



则由已知条件易证得四边形 $DEFM$ 是平行四边形，
$\therefore DE//FM$ 且 $DE=FM$.
$\because$ 平面 $ABC//$ 平面 $DEFG$，平面 $ABC\cap$ 平面 $ADEB=AB$，平面 $DEFG\cap$ 平面 $ADEB=DE$，
$\therefore AB//DE$，
$\therefore AB//FM$.
又 $AB=DE$，
$\therefore AB=FM$，
$\therefore$ 四边形 $ABFM$ 是平行四边形，
$\therefore BF//AM$.
又 $BF\not\subset$ 平面 $ACGD$，$AM\subset$ 平面 $ACGD$，
$\therefore BF//$ 平面 $ACGD$. 故选 A.

4. 如图是长方体被一平面截得的几何体，四边形 $EFGH$ 为截面，则四边形 $EFGH$ 的形状为<u>平行四边形</u>.



【解析】$\because$ 平面 $ABFE//$ 平面 $CDHG$，平面 $EFGH\cap$ 平面 $ABFE=EF$，平面 $EFGH\cap$ 平面 $CDHG=HG$，
$\therefore EF//HG$.
同理，$EH//FG$，
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

温馨提示：请自主完成课后作业(三十一)
课后作业 · 单独成册

8.6 空间直线、平面的垂直

第1课时 直线与直线垂直

学习目标	核心素养
1. 掌握异面直线所成的角的概念，掌握空间两条直线垂直的概念.（重点） 2. 会用几何法求异面直线所成的角，并判断两条异面直线是否垂直.（重点、难点）	1. 通过对直线的位置关系的认识培养直观想象素养. 2. 通过求异面直线所成的角的大小培养数学运算素养.

自主预习

情景导思

我们知道空间两条直线的位置关系有三种：平行直线、相交直线和异面直线. 在初中我们已经研究了平行直线和相交直线. 那么异面直线有什么具体的位置关系呢?

知新预学

异面直线所成的角

定义	前提	两条异面直线 a,b
	作法	经过空间任一点 O 分别作直线 $a'//a,b'//b$
	结论	我们把直线 a' 与 b' 所成的_角_叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角)
范围		记异面直线 a 与 b 所成的角为 θ，则 θ 的取值范围是_$0<\theta\leqslant 90^\circ$_
特殊情况		当 $\theta=$_90°_时，a 与 b 互相垂直，记作_$a\perp b$_

小试牛刀

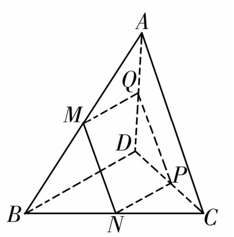
1. 设 P 是直线 l 外一定点，过点 P 且与 l 成 30° 角的异面直线 （ A ）

A. 有无数条　　B. 有两条
C. 至多有两条　　D. 有一条

【解析】过点 P 且与 l 成 30° 角的异面直线有无数条，并且异面直线在以 P 为顶点的圆锥的侧面上. 故选 A.

2. 对角线互相垂直的空间四边形 $ABCD$ 各边中点分别为 M,N,P,Q，则四边形 $MNPQ$ 的形状是_矩形_.

【解析】如图所示，



∵点 M,N,P,Q 分别是四条边的中点，

∴$MN//AC$，且 $MN=\frac{1}{2}AC$，

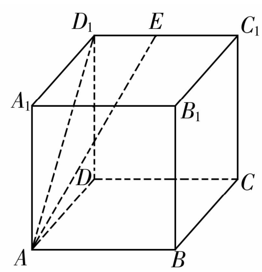
$PQ//AC$，且 $PQ=\frac{1}{2}AC$，即 $MN//PQ$ 且 $MN=PQ$，

∴四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.

又∵$BD//MQ,AC\perp BD$，∴$MN\perp MQ$，平行四边形 $MNPQ$ 是矩形.

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 C_1D_1 的中点，则异面直线 AE 与 A_1B_1 所成角的余弦值为_$\frac{1}{3}$_.

【解析】如图所示，



设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，连接 AD_1，

∵$A_1B_1//C_1D_1$，

∴$\angle AED_1$ 即为异面直线 AE 与 A_1B_1 所成的角，

∵$C_1D_1\perp$ 平面 ADD_1A_1，

∴$C_1D_1\perp AD_1$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED_1$ 中，$AD_1=\sqrt{2},ED_1=\frac{1}{2},AE=\frac{3}{2}$，

∴$\cos\angle AED_1=\frac{ED_1}{AE}=\frac{1}{3}$，即为所求.

互动课堂

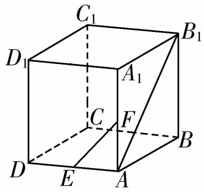
合作探究

探究1 异面直线所成的角

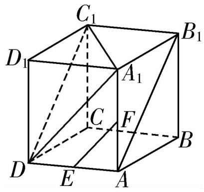
【例1】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是 AD,AA_1 的中点.

(1)求直线 AB_1 和 CC_1 所成的角的大小；

(2)求直线 AB_1 和 EF 所成的角的大小.



【解析】(1)如图,连接 DC_1,



$\because DC_1 /\!/ AB_1$,

$\therefore$ 直线 DC_1 和 CC_1 所成的锐角 $\angle CC_1D$ 就是直线 AB_1 和直线 CC_1 所成的角.

$\because \angle CC_1D=45^\circ$,

$\therefore$ 直线 AB_1 和直线 CC_1 所成的角是 45°.

(2)连接 DA_1,A_1C_1,

$\because E$,F 分别是 AD,AA_1 的中点,

$\therefore EF /\!/ A_1D$.

又 $\because DC_1 /\!/ AB_1$,

$\therefore \angle A_1DC_1$ 是直线 AB_1 和直线 EF 所成的角,

$\because \triangle A_1DC_1$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A_1DC_1=60^\circ$.

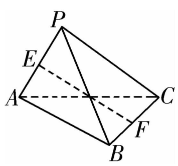
即直线 AB_1 和直线 EF 所成的角的大小是 60°.

点睛 求异面直线所成的角时,需紧扣概念,结合平移的思想,发挥空间想象力,把两条异面直线所成角问题转化为两条相交直线所成角问题,即将异面问题转化为共面问题,运用化归思想将难化易.解题中常借助正方体等几何模型本身的性质,依照选点、平移、定角、计算的步骤,逐步寻找出解答思路.

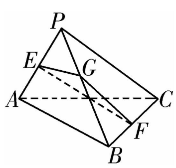
【变式训练 1】如图,已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外的一点,$PC \perp AB$,$PC=AB=2$,E,F 分别为 PA 和 BC 的中点.

(1)求 EF 与 PC 所成的角;

(2)求线段 EF 的长.



【解析】(1)取 PB 的中点为 G,连接 FG,EG,



$\because E$,F 分别为 PA 和 BC 的中点,

$\therefore FG /\!/ PC$ 且 $FG=\frac{1}{2}PC$,$EG /\!/ AB$ 且 $EG=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore \angle GFE$ 为 EF 与 PC 所成的角,$\angle EGF$ 为 PC 与 AB 所成的角.

$\because PC \perp AB$,$\therefore \angle EGF=90^\circ$,

又 $EG=FG=1$,$\therefore \angle GFE=45^\circ$,

故 EF 与 PC 所成的角为 45°;

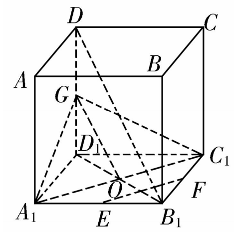
(2)由(1)知 $\triangle EGF$ 为直角三角形,

$\therefore EF=\sqrt{EG^2+FG^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

探究 2 直线与直线垂直的证明

【例 2】在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 A_1B_1,B_1C_1 的中点,求证:$DB_1 \perp EF$.

【证明】如图所示,



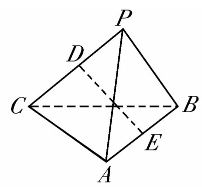
连接 A_1C_1,B_1D_1,并设它们相交于点 O,取 DD_1 的中点 G,连接 OG,A_1G,C_1G,则 $OG /\!/ B_1D$,$EF /\!/ A_1C_1$,$\therefore \angle GOA_1$ 为异面直线 DB_1 与 EF 所成的角(或其补角).

$\because GA_1=GC_1$,O 为 A_1C_1 的中点,$\therefore GO \perp A_1C_1$.

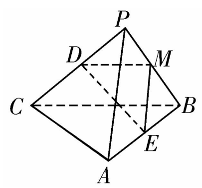
$\therefore$ 异面直线 DB_1 与 EF 所成的角为 90°,$\therefore DB_1 \perp EF$.

点睛 证明直线与直线垂直可以转化为求异面直线所成的角是 90°.

【变式训练 2】如图,P 是平面 ABC 外的一点,$PA=4$,$BC=2\sqrt{5}$,D,E 分别为 PC,AB 的中点,且 $DE=3$.求证:$PA \perp BC$.



【解析】取 PB 的中点 M,连接 DM 和 EM,



$\because DM$ 是 $\triangle PBC$ 的中位线,

$\therefore DM /\!/ BC$,且 $DM=\frac{1}{2}BC=\sqrt{5}$,

同理,ME 是 $\triangle PAB$ 的中位线,$ME /\!/ AP$,$ME=\frac{1}{2}AP=2$,

$DE=3$,

在 $\triangle DME$ 中,$DM^2+ME^2=9$,$DE^2=9$,

$\therefore \angle DME=90^\circ$,即 $DM \perp ME$.

$\because DM$ 和 ME 分别是 BC 和 AP 的平行线,

$\therefore$ 异面直线 PA 与 BC 垂直.

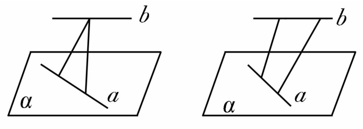
随堂小练

1.分别和两条异面直线都相交的两条直线的位置关系是 (C)

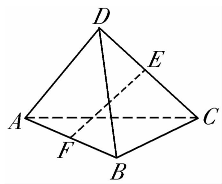
A.相交　　B.异面

C.异面或相交　　D.平行

【解析】如图，有相交和异面两种情况.

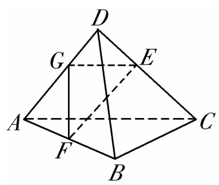


2. 如图，在三棱锥 D-ABC 中，$AC=BD$，且 $AC\perp BD$，E，F 分别是 DC，AB 的中点，则 EF 和 AC 所成的角等于 （ B ）



A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

【解析】取 AD 的中点 G，连接 GE，GF，



则 $GE/\!/AC$，故 $\angle GEF$ 是 EF 和 AC 所成的角，

又 $GF/\!/BD$，且 $AC\perp BD$，$AC=BD$，则 $GF\perp GE$，

∴$\triangle GEF$ 是直角三角形，且 $GE=GF$，

∴$\angle GEF=45^\circ$. EF 与 AC 所成角为 45°，故选 B.

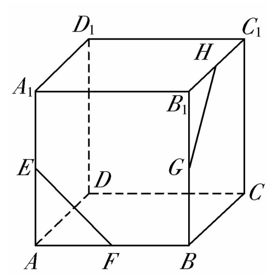
3. 若 $\angle AOB=120^\circ$，直线 $a/\!/OA$，a 与 OB 为异面直线，则 a 和 OB 所成的角的大小为__60°__.

【解析】∵直线 $a/\!/OA$，a 与 OB 为异面直线，

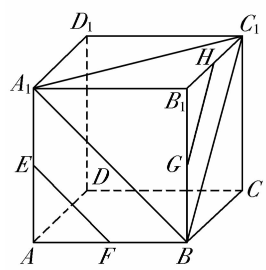
∴$\angle AOB$ 的补角为 a 与 OB 所成角，

∵$\angle AOB=120^\circ$，∴a 与 OB 所成的角的大小为 $180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

4. 如图所示，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H 分别为 AA_1，AB，BB_1，B_1C_1 的中点，则 EF 与 GH 所成的角等于__60°__.



【解析】如图，连接 A_1B，BC_1，A_1C_1，则 $A_1B=BC_1=A_1C_1$，



且 $EF/\!/A_1B$，$GH/\!/BC_1$，

所以异面直线 EF 与 GH 所成的角等于 60°.

温馨提示：请自主完成课后作业(三十二)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　直线与平面垂直

学习目标	核心素养
1. 理解直线和平面垂直的定义及其判定定理和性质定理，了解直线和平面所成角的含义.(重点) 2. 利用直线与平面垂直的判定定理解决有关线面垂直的问题，利用其性质定理证明线线平行，会求直线与平面所成的角.(重点、难点)	1. 探究直线和平面垂直的相关问题，有利于提高逻辑推理素养. 2. 通过计算直线与平面所成角的大小，提高数学运算素养. 3. 借助几何体的点、线、面的位置关系培养直观想象素养.

自主预习

情景导思

问题 1：在现实生活中，我们经常看到一些直线与平面垂直的现象，例如，旗杆与地面，大桥的桥柱和水面等位置关系，你能举出一些类似的例子吗？

问题 2：易知旗杆与它在地面上的射影是垂直关系，那么一条直线与一个平面垂直的意义是什么？

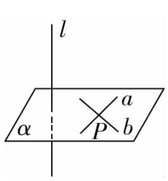
知新预学

1. 直线与平面垂直的相关概念

如果直线 l 与平面 α 内的<u>任意一条</u>直线都垂直，就说直线 l 与平面 α 互相垂直，记作 $l\perp\alpha$. 直线 l 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫做直线 l 的垂面，直线与平面垂直时，它们唯一的公共点叫做垂足.

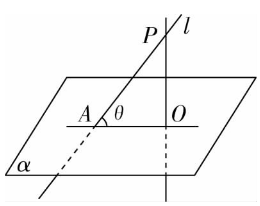
过一点垂直于已知平面的直线只有一条. 过一点作垂直于已知平面的直线，则该点与垂足间的线段，叫做这个点到该平面的垂线段，垂线段的长度叫做这个点到该平面的距离.

2. 直线与平面垂直的判定定理

文字语言	图形语言	符号语言
如果一条直线与一个平面内的<u>两条相交直线</u>都垂直，那么该直线与此平面垂直		$\left.\begin{matrix} l\perp a \\ l\perp b \\ a\subset\alpha \\ b\subset\alpha \\ a\cap b=P\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$

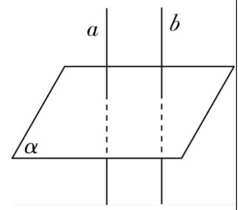
3. 直线与平面所成的角

(1) 如图，一条直线 l 与一个平面 α 相交，但不与这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点 A 叫做斜足，过斜线上斜足以外的一点 P 向平面 α 引垂线 PO，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 叫做斜线在这个平面上的射影，平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角.



(2) 一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是 $90°$；一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是 $0°$. 直线与平面所成的角 θ 的取值范围是<u>$0°\leqslant\theta\leqslant 90°$</u>.

4. 直线与平面垂直的性质定理

文字语言	图形语言	符号语言
垂直于同一个平面的两条直线平行		$\left.\begin{matrix} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

常用结论：

(1) 过一点有且仅有一条直线与已知平面垂直.

(2) 已知 $a\perp\alpha$，若平面 α 外的直线 b 与直线 a 垂直，则 $b/\!/\alpha$.

5. 空间距离的定义

(1) 直线到平面的距离：一条直线与一个平面平行时，这条直线上任意一点到这个平面的距离.

(2) 两个平行平面间的距离：两个平面平行时，其中一个平面内的任意一点到另一个平面的距离.

小试牛刀

1. 已知 m 和 n 是两条不同的直线，α 和 β 是两个不重合的平面，那么下面给出的条件中，一定能推出 $m\perp\beta$ 的是 (B)

A. $\alpha/\!/\beta$，且 $m\subset\alpha$　　B. $m/\!/n$，且 $n\perp\beta$

C. $m\perp n$，且 $n\subset\beta$　　D. $m\perp n$，且 $n/\!/\beta$

【解析】$\alpha/\!/\beta$，且 $m\subset\alpha$，则 $m/\!/\beta$，故 A 错误；

一条直线垂直于平面，则与这条直线平行的直线也垂直于这个平面，故 B 正确；

$m\subset\beta$ 或 $m/\!/\beta$ 或 m 与 β 相交均有可能，故 C，D 错误.

故选 B.

2. 已知直线 $l\perp$ 平面 α，直线 $m\subset\alpha$，则 (A)

A. $l\perp m$　　B. $l/\!/m$

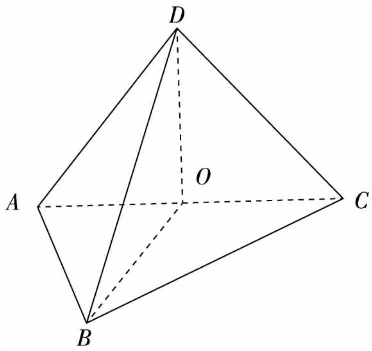
C. l，m 异面　　D. l，m 相交而不垂直

【解析】根据线面垂直的定义，若直线与平面垂直，则直线垂直于该平面内的任意一条直线，因此 $l\perp m$，故选 A.

3. 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，当以 A,B,C,D 四点为顶点的棱锥体积最大时，直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为 (C)

A. $90°$　　B. $60°$　　C. $45°$　　D. $30°$

【解析】记正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，将正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起后，如图所示，当 $DO\perp$ 平面 ABC 时，三棱锥 $D\text{-}ABC$ 的体积最大.



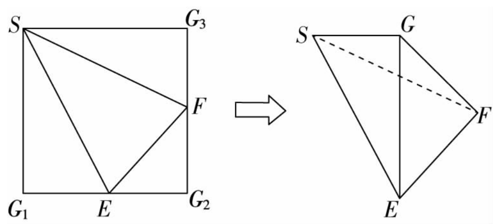
∴$\angle DBO$ 为直线 BD 和平面 ABC 所成的角，

∵正方形对角线相互垂直且平分，

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle DOB$ 中，$OD=OB$，

∴直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为 $45°$. 故选 C.

4. 如图所示的正方形 $SG_1G_2G_3$ 中，E,F 分别是 G_1G_2,G_2G_3 的中点，现沿 SE,SF,EF 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1,G_2,G_3 重合于点 G，则有 (A)



A. $SG\perp$ 平面 EFG　　B. $EG\perp$ 平面 SEF

C. $GF\perp$ 平面 SEF　　D. $SG\perp$ 平面 SEF

【解析】由题意得 $SG\perp FG,SG\perp EG$，

$FG\cap EG=G,FG,EG\subset$ 平面 EFG，

∴$SG\perp$ 平面 EFG，故 A 正确，D 不正确；

又若 $EG\perp$ 平面 SEF，则 $EG\perp EF$，由平面图形可知显然不成立. 同理 $GF\perp$ 平面 SEF 也不成立，故 B，C 不正确；

故选 A.

互动课堂

合作探究

探究 1　线面垂直的概念与判定定理

【例 1】下列说法中，正确的个数是 (B)

①若直线 l 与平面 α 内的一条直线垂直，则 $l\perp\alpha$；

②若直线 l 与平面 α 内的两条直线垂直，则 $l\perp\alpha$；

③若直线 l 与平面 α 内的两条相交直线垂直，则 $l\perp\alpha$；

④若直线 l 与平面 α 内的任意一条直线垂直，则 $l\perp\alpha$；

⑤若直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直，则 $l\perp\alpha$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】由直线与平面垂直的定义和判定定理知正确的是③④，故选 B.

点睛 线面垂直的判定定理中，直线垂直于平面内的两条相交直线，“相交”两字必不可少，否则，就是与无数条直线垂直，这条直线也不一定与平面垂直.

【变式训练 1】(多选题)下列命题中，正确的是 (BCD)

A. 若 l 不垂直于 α，则在 α 内没有与 l 垂直的直线

B. 过一点和已知平面垂直的直线有且只有一条

C. 若 $a/\!/\alpha,b\perp\alpha$，则 $a\perp b$

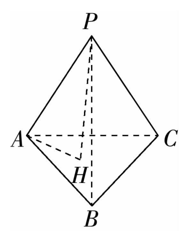
D. 若 $a/\!/b,a\perp\alpha$，则 $b\perp\alpha$

【解析】当 l 与 α 不垂直时，l 可能与 α 内的无数条互相平行的直线垂直，故 A 不正确；由于过一点有且只有一条直线与已知平面垂直，故 B 正确；C，D 显然正确. 故选 BCD.

探究 2　直线与平面垂直的判定

【例 2】在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，$AP\perp BC,PC\perp AB$. 求证：$PH\perp$ 平面 ABC.

【证明】如图，连接 AH.



∵H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，

∴$AH\perp BC$，

又 $AP\perp BC,AH\cap AP=A$，

∴$BC\perp$ 平面 AHP，

又 $PH\subset$ 平面 AHP，

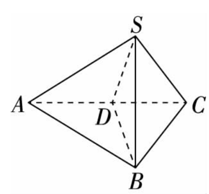
∴$PH\perp BC$.

同理可证 $PH\perp AB$，

又 $AB\cap BC=B$，∴$PH\perp$ 平面 ABC.

点睛 利用直线与平面垂直的判定定理证明线面垂直的关键是在这个平面内找到两条相交直线，证明它们都和这条直线垂直.

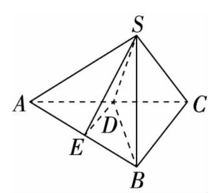
【变式训练 2】如图，S 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 所在平面外一点，且 $SA=SB=SC$，点 D 为斜边 AC 的中点.



(1)求证：$SD\perp$ 平面 ABC.

(2)若 $AB=BC$，求证：$BD\perp$ 平面 SAC.

【证明】(1)如图，取 AB 中点 E，连接 SE,DE.



在 Rt$\triangle ABC$ 中，D，E 分别为 AC，AB 的中点，$\therefore DE /\!/ BC$，且 $DE \perp AB$.

在$\triangle SAB$ 中，$\because SA=SB$，$\therefore SE \perp AB$.

又 $SE \cap DE=E$，$\therefore AB \perp$ 平面 SDE.

$\because SD \subset$ 平面 SDE，$\therefore AB \perp SD$.

在$\triangle SAC$ 中，因为 $SA=SC$，D 为 AC 的中点，

$\therefore SD \perp AC$.

$\because SD \perp AC$，$SD \perp AB$，$AC \cap AB=A$，

$\therefore SD \perp$ 平面 ABC.

(2)$\because AB=BC$，D 为斜边 AC 的中点，$\therefore BD \perp AC$.

由(1)可知，$SD \perp$ 平面 ABC.

且 $BD \subset$ 平面 ABC，$\therefore SD \perp BD$.

$\because SD \perp BD$，$BD \perp AC$，$SD \cap AC=D$，

$\therefore BD \perp$ 平面 SAC.

探究 3 直线与平面所成的角

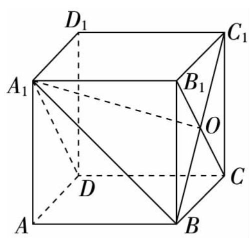
【例 3】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求直线 BA_1 与平面 A_1B_1CD 所成的角.

【解析】如图，连接 BC_1，交 B_1C 于点 O，再连接 A_1O.

$\because$ 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BO \perp$ 平面 A_1B_1CD，

$\therefore \angle BA_1O$ 是直线 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成的角.

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，



则在$\triangle A_1BO$ 中，$A_1B=\sqrt{2}$，$OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \sin\angle BA_1O=\dfrac{OB}{A_1B}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 直线 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成的角的大小等于 $30°$.

点睛 求平面的斜线与平面所成的角的一般步骤：

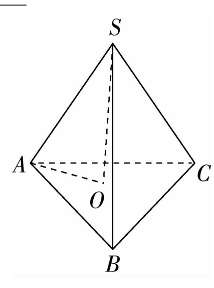
(1)确定斜线与平面的交点(斜足)；

(2)过斜线上除斜足以外的某一点作平面的垂线，连接垂足和斜足即为斜线在平面上的射影，则斜线和射影所成的锐角即为所求的角；

(3)解由斜线、垂线、射影构成的直角三角形.

【变式训练 3】已知正三棱锥 $S-ABC$ 的所有棱长都相等，则 SA 与平面 ABC 所成角的余弦值为 $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$.

【解析】$\because S-ABC$ 为正三棱锥，所以点 S 在底面 ABC 上的射影为$\triangle ABC$ 的中心 O，连接 SO，AO，则$\angle SAO$ 为 SA 与底面 ABC 所成的角，设正三棱锥的棱长为 a，



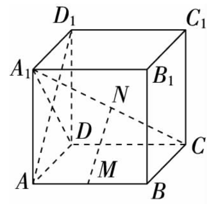
在 Rt$\triangle SOA$ 中，$AO=\dfrac{2}{3}\cdot a\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$SA=a$，$\therefore \cos\angle SAO=\dfrac{AO}{SA}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

探究 4 直线与平面垂直的性质定理的应用

【例 4】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AB 上的一点，N 是 A_1C 的中点，$MN \perp$ 平面 A_1DC. 求证：

(1)$MN /\!/ AD_1$；

(2)M 是 AB 的中点.



【证明】(1)$\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

$\therefore AD_1 \perp A_1D$.

又$\because CD \perp$ 平面 ADD_1A_1，$AD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1，

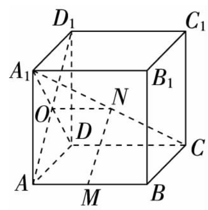
$\therefore CD \perp AD_1$.

$\because A_1D \cap CD=D$，$\therefore AD_1 \perp$ 平面 A_1DC.

又$\because MN \perp$ 平面 A_1DC，$\therefore MN /\!/ AD_1$.

(2)如图，设 $AD_1 \cap A_1D=O$，连接 ON.

在$\triangle A_1DC$ 中，$A_1O=OD$，$A_1N=NC$.



$\therefore ON \mathrel{\underline{\parallel}} \dfrac{1}{2}CD$，

又 $CD \mathrel{\underline{\parallel}} AB$，$\therefore ON /\!/ AM$.

又$\because MN /\!/ OA$，

$\therefore$ 四边形 $AMNO$ 为平行四边形，

$\therefore ON=AM$.

$\because ON=\dfrac{1}{2}AB$，$\therefore AM=\dfrac{1}{2}AB$，即 M 是 AB 的中点.

点睛 证明两条直线平行的常见方法.

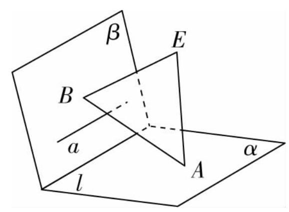
(1)基本事实 4：平行于同一条直线的两条直线平行.

(2)线面平行的性质定理：如果一条直线与一个平面平行，那么经过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行.

(3)面面平行的性质定理：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

(4)线面垂直的性质定理：垂直于同一个平面的两条直线平行.

【变式训练 4】如图，已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta=l$，$EA \perp \alpha$，垂足为 A，$EB \perp \beta$，垂足为 B，直线 $a \subset \beta$，$a \perp AB$. 求证：$a /\!/ l$.



【证明】$\because EB \perp \beta$，$a \subset \beta$，$\therefore EB \perp a$.

又$\because a \perp AB$，$AB \cap EB=B$，

$\therefore a \perp$ 平面 ABE.

$\because \alpha \cap \beta=l$，$\therefore l \subset \alpha$，$l \subset \beta$.

$\because EA \perp \alpha$，$EB \perp \beta$，

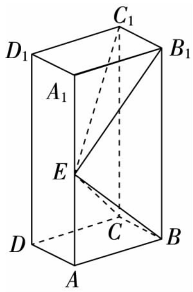
$\therefore EA \perp l$，$EB \perp l$.

又$\because EA \cap EB=E$，

$\therefore l \perp$ 平面 ABE. $\therefore a /\!/ l$.

探究5 空间中的距离问题

【例 5】如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE\perp EC_1$．若 $AE=A_1E$，$AB=3$，求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积．



【解析】由长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，

可知 $B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，$BE\subset$ 平面 ABB_1A_1，

$\therefore B_1C_1\perp BE$，

$\because BE\perp EC_1$，$B_1C_1\cap EC_1=C_1$，

$\therefore BE\perp$ 平面 EB_1C_1，$\therefore\angle BEB_1=90°$，

由题可知 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1E$，

$\therefore\angle AEB=\angle A_1EB_1=45°$，

$\therefore AE=AB=3$，$AA_1=2AE=6$．

$\because$ 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AA_1//$ 平面 BB_1C_1C，$E\in AA_1$，$AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，

$\therefore$ 点 E 到平面 BB_1C_1C 的距离即点 A 到平面 BB_1C_1C 的距离，且 $AB=BC=3$，

$\therefore$ 四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times3\times6\times3=18$．

点睛 空间中距离的转化．

(1)利用线面、面面平行转化：利用线面距、面面距的定义，转化为直线或平面上的另一点到平面的距离．

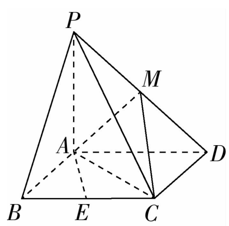
(2)利用中点转化：如果题设中有中点条件，将一个点到平面的距离，借助中点(等分点)，转化为另一点到平面的距离．

(3)通过换底转化：一是直接换底，以方便求几何体的高；二是将底面扩展(分割)，以方便求底面面积和高．

【变式训练 5】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 菱形 $ABCD$ 所在的平面，$\angle ABC=60°$，E 是 BC 的中点，M 是 PD 的中点．

(1)求证：$AE\perp$ 平面 PAD．

(2)若 $AB=AP=2$，求三棱锥 $P-ACM$ 的体积．



【解析】(1)证明：$\because$ 底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60°$，

$\therefore\triangle ABC$ 为正三角形，

$\because E$ 是 BC 的中点，$\therefore AE\perp BC$，

$\because AD//BC$，$\therefore AE\perp AD$，

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AE\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp AE$，

又 $\because PA\cap AD=A$，$\therefore AE\perp$ 平面 PAD．

(2)$\because AB=AP=2$，$\therefore AD=2$，$AE=\sqrt{3}$，

又 M 为 PD 中点，

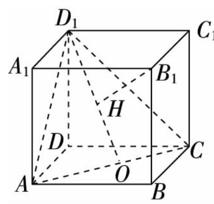
$\therefore S_{\triangle PAM}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle PAD}$．

又 $BC//$ 平面 PAD，点 E 在直线 BC 上，

$\therefore V_{P-ACM}=V_{C-PAM}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PAM}\cdot AE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

随堂小练

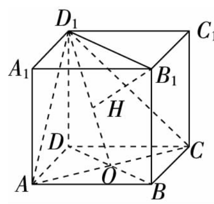
1．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面正方形 $ABCD$ 的中心，$B_1H\perp D_1O$，H 为垂足，则 B_1H 与平面 AD_1C 的位置关系是 (A)



A. 垂直 B. 平行

C. 斜交 D. 以上都不对

【解析】如图，连接 B_1D_1，BD．



$\because$ 几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，底面 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC\perp BD$．

又 $\because B_1B\perp AC$，$BD\cap BB_1=B$，

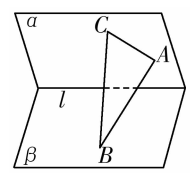
$\therefore AC\perp$ 平面 BDD_1B_1．

$\because B_1H\subset$ 平面 BDD_1B_1，$\therefore AC\perp B_1H$．

$\because B_1H\perp D_1O$，$AC\cap D_1O=O$，$\therefore B_1H\perp$ 平面 AD_1C．

故选 A．

2．如图，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 l，点 A，$C\in\alpha$，点 $B\in\beta$，且 $BA\perp\alpha$，$BC\perp\beta$，那么直线 l 与直线 AC 的关系是 (C)



A. 异面 B. 平行

C. 垂直 D. 不确定

【解析】$\because BA\perp\alpha$，$\alpha\cap\beta=l$，

$\therefore l\subset\alpha$，$\therefore BA\perp l$．

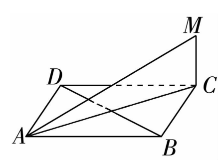
同理 $BC\perp l$．

又 $BA\cap BC=B$，$\therefore l\perp$ 平面 ABC．

$\because AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore l\perp AC$．

故选 C．

3．如图所示，如果 $MC\perp$ 菱形 $ABCD$ 所在的平面，那么 MA 与 BD 的位置关系是 (C)



A. 平行

B. 垂直相交

C. 垂直但不相交

D. 相交但不垂直

【解析】$\because$ 菱形的对角线互相垂直，$\therefore AC\perp BD$．

$\because MC\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore MC\perp BD$，

$\because MC\cap AC=C$，$\therefore BD\perp$ 平面 ACM，

$\because MA\subset$ 平面 ACM，$\therefore MA\perp BD$．

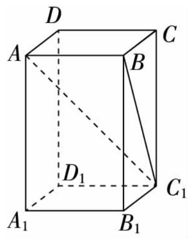
又 $\because MA$ 与 BD 是异面直线，

$\therefore MA$ 与 BD 的位置关系是垂直但不相交．故选 C．

4. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $30°$，则该长方体的体积为　（ C ）

A. 8　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $8\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{3}$

【解析】如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 BC_1.



根据线面角的定义可知 $\angle AC_1B=30°$，

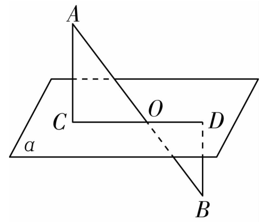
$\because AB=2$，所以 $BC_1=2\sqrt{3}$，

$CC_1=\sqrt{BC_1^2-BC^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 该长方体的体积为 $V=2\times2\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，故选 C.

5. 一条与平面 α 相交的线段 AB，其长度为 10 cm，两端点到平面的距离分别是 2 cm，3 cm，则线段 AB 与平面 α 所成的角是__$30°$__.

【解析】如图，作 $AC\perp\alpha$ 于点 C，$BD\perp\alpha$ 于点 D，



则 $AC/\!/BD$，AC，BD 确定的平面与平面 α 交于 CD，且 CD 与 AB 交于点 O，

$\therefore \triangle AOC\backsim\triangle BOD$.

$\because AB=10$，$AC=3$，$BD=2$，$\therefore AO=6$，$BO=4$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOD=30°$.

即线段 AB 与平面 α 所成的角是 $30°$.

故答案为 $30°$.

温馨提示：请自主完成课后作业（三十三）

课后作业 · 单独成册

第 3 课时　平面与平面垂直

学习目标	核心素养
1. 理解二面角的概念,并会求简单的二面角.(重点) 2. 理解直二面角与面面垂直的关系,理解平面和平面垂直的判定定理并能运用其解决相关问题.(重点、难点) 3. 通过面面垂直定理的理解及运用,培养空间转化能力和逻辑推理能力.(重点、难点)	1. 通过探究平面和平面垂直的判定定理有助于培养逻辑推理素养. 2. 求二面角有助于培养数学运算素养.

自主预习

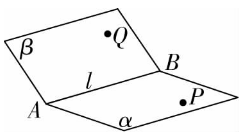
情景导思

我们知道如果两个平面的二面角是直角,那么这两个平面一定垂直. 那么有没有更简单的方法证明两个平面垂直?

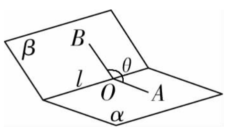
知新预学

1. 二面角

(1)定义:__从一条直线出发__的两个半平面所组成的图形叫做二面角,这条直线叫做二面角的棱,这两个半平面叫做二面角的面. 下图中的二面角可记作:二面角 α-AB-β 或 α-l-β 或 P-AB-Q.



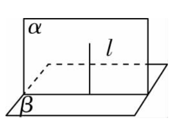
(2)二面角的平面角:如图,在二面角 α-l-β 的棱 l 上任取一点 O,以点 O 为垂足,在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB,则射线 OA 和 OB 构成的$\angle AOB$ 叫做二面角的平面角. 平面角是直角的二面角叫做直二面角. 二面角的平面角 θ 的取值范围是__$0°\leqslant\theta\leqslant180°$__.



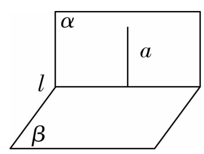
2. 平面与平面垂直

(1)定义:一般地,两个平面相交,如果它们所成的二面角是__直二面角__,就说这两个平面互相垂直. 平面 α 与 β 垂直,记作 $\alpha\perp\beta$.

(2)判定定理

文字语言	图形语言	符号语言
如果一个平面过另一个平面的__垂线__,那么这两个平面垂直		$\left.\begin{array}{l} l\perp\beta \\ l\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$

3. 平面与平面垂直的性质定理

文字语言	图形语言	符号语言
两个平面垂直,如果一个平面内有一直线垂直于这两个平面的交线,那么这条直线与另一个平面垂直		$\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta \\ \alpha\cap\beta=l \\ a\subset\alpha \\ a\perp l \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\beta$

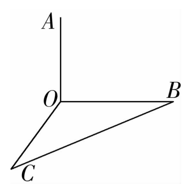
小试牛刀

1. 若三条直线 OA,OB,OC 两两垂直,则直线 OA 垂直于　　(　C　)

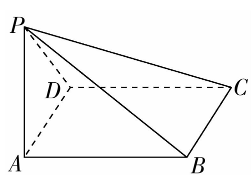
A. 平面 OAB　　B. 平面 OAC

C. 平面 OBC　　D. 平面 ABC

【解析】如图所示,可知直线 $OA\perp$平面 OBC. 故选 C.



2. 已知 $PA\perp$矩形 $ABCD$ 所在的平面,如图所示,图中互相垂直的平面有　　(　D　)



A. 1 对　　B. 2 对

C. 3 对　　D. 5 对

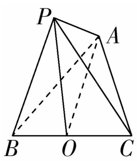
【解析】$\because DA\perp AB$,$DA\perp PA$,$AB\cap PA=A$,

$\therefore DA\perp$平面 PAB,同理 $BC\perp$平面 PAB,

$AB\perp$平面 PAD,$DC\perp$平面 PAD,

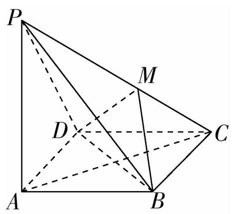
$\therefore$平面 $ABCD\perp$平面 PAD,平面 $ABCD\perp$平面 PAB,平面 $PBC\perp$平面 PAB,平面 $PDC\perp$平面 PAD,平面 $PAB\perp$平面 PAD. 共 5 对平面互相垂直. 故选 D.

3. 若 P 是△ABC 所在平面外一点，而△PBC 和△ABC 都是边长为 2 的正三角形，$PA=\sqrt{6}$，那么二面角 P-BC-A 的大小为 <u>90°</u>.



【解析】取 BC 的中点 O，连接 OA，OP，由题意知，$PO\perp BC$，$AO\perp BC$，则∠POA 为二面角 P-BC-A 的平面角. 又 $OP=OA=\sqrt{3}$，$PA=\sqrt{6}$，所以△POA 为直角三角形，∠$POA=90°$. 所以二面角 P-BC-A 的大小为 90°.

4. 如图所示，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，且底面各边都相等，M 是 PC 上的一动点，当点 M 满足 <u>$DM\perp PC$（或 $BM\perp PC$）</u> 时，平面 $MBD\perp$平面 PCD.（只要填写一个你认为正确的条件即可）



【解析】∵底面 $ABCD$ 各边都相等，

∴$AC\perp BD$. ∵$PA\perp$底面 $ABCD$，

$BD\subset$平面 $ABCD$，∴$PA\perp BD$.

∵$PA\cap AC=A$，

∴$BD\perp$平面 PAC，∴$BD\perp PC$.

∴当 $DM\perp PC$（或 $BM\perp PC$）时，

$PC\perp$平面 MBD，又 $PC\subset$平面 PCD，

∴平面 $MBD\perp$平面 PCD.

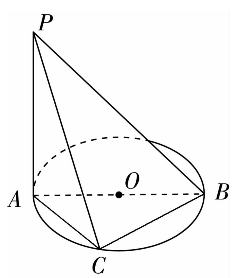
∴当 $DM\perp PC$（或 $BM\perp PC$ 等）时，满足条件.

互动课堂

合作探究

探究 1 面面垂直判定定理的应用

【例 1】如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 是⊙O 上的动点，PA 垂直于⊙O 所在的平面 ABC. 求证：平面 $PAC\perp$平面 PBC.



【证明】∵AB 是⊙O 的直径，点 C 是⊙O 上的动点，

∴∠$ACB=90°$，即 $BC\perp AC$.

又∵PA 垂直于⊙O 所在平面，$BC\subset$平面⊙O，

∴$PA\perp BC$.

∵$PA\cap AC=A$，∴$BC\perp$平面 PAC.

又 $BC\subset$平面 PCB，

∴平面 $PAC\perp$平面 PBC.

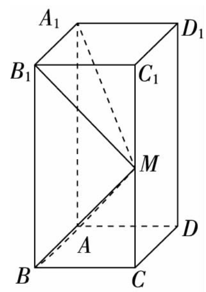
点睛 判定两个平面垂直的常用方法.

(1)定义法：即说明两个平面所成的二面角是直二面角.

(2)判定定理法：其关键是在其中一个平面内寻找一直线与另一个平面垂直，即把问题转化为“线面垂直”.

(3)性质法：两个平行平面中的一个垂直于第三个平面，则另一个也垂直于此平面.

【变式训练 1】长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 如图所示，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，M 是棱 CC_1 的中点. 求证：平面 $ABM\perp$平面 A_1B_1M.



【证明】由长方体的性质可知，$A_1B_1\perp$平面 BCC_1B_1，

又 $BM\subset$平面 BCC_1B_1，

∴$A_1B_1\perp BM$.

又 $CC_1=2$，M 为 CC_1 的中点，

∴$C_1M=CM=1$.

在 Rt△B_1C_1M 中，

$B_1M=\sqrt{B_1C_1^2+MC_1^2}=\sqrt{2}$，

同理 $BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\sqrt{2}$，

又 $B_1B=2$，∴$B_1M^2+BM^2=B_1B^2$，

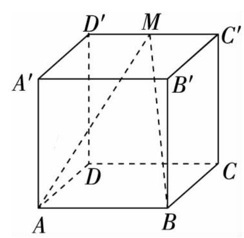
∴$BM\perp B_1M$.

又 $A_1B_1\cap B_1M=B_1$，∴$BM\perp$平面A_1B_1M.

∵$BM\subset$平面 ABM，∴平面 $ABM\perp$平面 A_1B_1M.

探究 2 求二面角

【例 2】如图，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中，M 是 $C'D'$的中点，求二面角 M-AB-D 的大小.

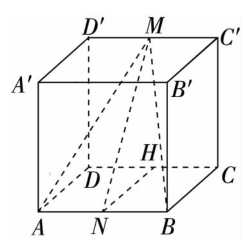


【解析】如图，因为 M 是 $C'D'$的中点，所以 $MA=MB$，取 AB 的中点 N，连接 MN，则 $MN\perp AB$. 取 CD 的中点 H，连接 HN，则 $HN\perp AB$.

∴∠MNH 是二面角 M-AB-D 的平面角.

∵∠$MNH=45°$.

∴二面角 M-AB-D 的大小为 45°.



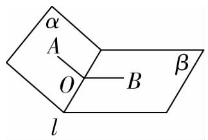
点睛 作二面角的三种常用方法.

(1)定义法：在二面角的棱上找一个特殊点，在两个半平面内分别作垂直于棱的射线. 如图①，则∠AOB 为二面角 α-l-β 的平面角.

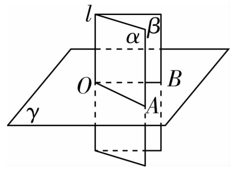
(2)垂直法：过棱上一点作棱的垂直平面，该平面与二面角

的两个半平面产生交线，这两条交线所成的角，即为二面角的平面角. 如图②，$\angle AOB$ 为二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角.

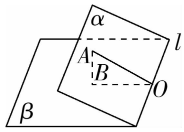
(3)垂线法：过二面角的一个面内不在棱上的一点 A 向另一个平面作垂线，垂足为 B，由点 B 向二面角的棱作垂线，垂足为 O，连接 AO，则 $\angle AOB$ 为二面角的平面角或其补角. 如图③，$\angle AOB$ 为二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角.



图①



图②

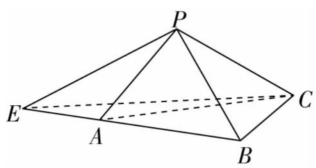


图③

【变式训练 2】如图，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 PBC，$PA=PB=2$，$PC=4$，$BC=2\sqrt{3}$.

(1)求证：平面 $PAB\perp$ 平面 ABC.

(2)E 为 BA 延长线上的一点，若二面角 $P\text{-}EC\text{-}B$ 的大小为 $30°$，求 BE 的长.



【解析】(1)证明：$\because PA\perp$ 平面 PBC，

$\therefore PA\perp PC$，$PA\perp PB$.

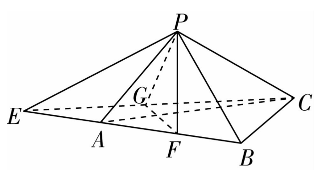
经计算，得 $AC=2\sqrt{5}$，$AB=2\sqrt{2}$. $\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，故 $BC\perp AB$.

又 $PA\perp$ 平面 PBC，$\therefore PA\perp BC$.

$\because PA\cap AB=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAB.

又 $BC\subset$ 平面 ABC，故平面 $PAB\perp$ 平面 ABC.

(2)如图，取 AB 的中点 F，连接 PF.



$\because PA=PB$，$\therefore PF\perp AB$.

由(1)知平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，

又平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$PF\subset$ 平面 PAB，$EC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore PF\perp$ 平面 ABC，$PF\perp EC$.

过点 F 作 $FG\perp EC$ 于点 G，连接 PG.

$\because PF\perp EC$，$PF\cap FG=F$，

$\therefore EC\perp$ 平面 FPG.

$\because PG\subset$ 平面 FPG，

$\therefore EC\perp PG$.

于是 $\angle PGF$ 是二面角 $P\text{-}EC\text{-}B$ 的平面角，

因此，$\angle PGF=30°$.

又 $PF=\sqrt{PA^2-AF^2}=\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}$

$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore FG=\sqrt{6}$.

设 $BE=x(x>2\sqrt{2})$，由(1)知 $BC\perp AB$，

$\therefore \triangle EFG\backsim\triangle ECB$，得 $\frac{FG}{BC}=\frac{EF}{EC}$.

即 $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+12}}$，整理得 $x^2-4\sqrt{2}x-8=0$，

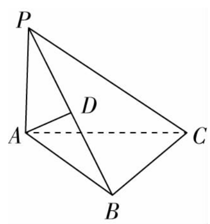
解得 $x=2\sqrt{2}+4$($x=2\sqrt{2}-4$ 舍去).

$\therefore BE=2\sqrt{2}+4$.

探究 3 平面与平面垂直的性质定理的应用

【例 3】在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\perp$ 平面 PBC. 求证：$BC\perp$ 平面 PAB.

【解析】证明：如图所示，在平面 PAB 内作 $AD\perp PB$ 于点 D.



$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，且平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，

$\therefore AD\perp$ 平面 PBC.

又 $BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore AD\perp BC$.

$\because PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore PA\perp BC$.

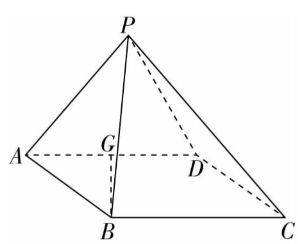
$\because PA\cap AD=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAB.

点睛 利用面面垂直的性质定理，证明线面垂直的问题时，要注意以下三点：(1)两个平面垂直；(2)直线必须在其中一个平面内；(3)直线必须垂直于它们的交线.

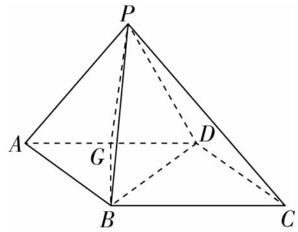
【变式训练 3】如图，P 是四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，四边形 $ABCD$ 是边长为 a 的菱形，且 $\angle DAB=60°$. 侧面 PAD 为正三角形，其所在平面垂直于底面 $ABCD$.

(1)若 G 为 AD 边的中点，求证：$BG\perp$ 平面 PAD.

(2)求证：$AD\perp PB$.



【证明】



(1)如图所示,连接 BD.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle DAB=60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 是正三角形,

$\because G$ 是 AD 的中点,$\therefore BG\perp AD$.

又 $\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,$\therefore BG\perp$ 平面 PAD.

(2)连接 PG.

$\because \triangle PAD$ 为正三角形,G 为 AD 的中点,$\therefore PG\perp AD$.

由(1)知 $BG\perp AD$,又 $PG\cap BG=G$,$\therefore AD\perp$ 平面 PBG.

又 $\because PB\subset$ 平面 PBG,

$\therefore AD\perp PB$.

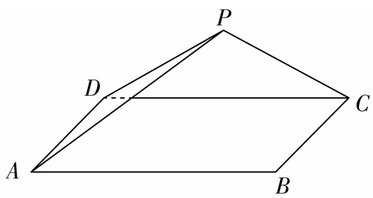
探究 4 线面、面面垂直的综合应用

【例 4】如图,三角形 PDC 所在的平面与矩形 $ABCD$ 所在的平面垂直,$PD=PC=4$,$AB=6$,$BC=3$.

(1)求证:BC//平面 PDA.

(2)求证:$BC\perp PD$.

(3)求点 C 到平面 PDA 的距离.



【解析】(1)证明:在长方形 $ABCD$ 中,$BC//AD$,

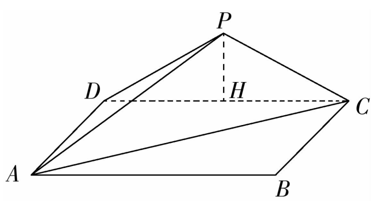
又 $BC\not\subset$ 平面 PDA,$AD\subset$ 平面 PDA,

$\therefore BC$//平面 PDA.

(2)证明:取 CD 的中点 H,连接 PH,

$\because PD=PC$,$\therefore PH\perp CD$.

又 $\because$ 平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$,



平面 $PDC\cap$ 平面 $ABCD=CD$,

$\therefore PH\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $\because BC\subset$ 平面 $ABCD$,$\therefore PH\perp BC$.

又 $\because$ 长方形 $ABCD$ 中,$BC\perp CD$,$PH\cap CD=H$,

$\therefore BC\perp$ 平面 PDC.

又 $\because PD\subset$ 平面 PDC,

$\therefore BC\perp PD$.

(3)连接 AC.由(2)知 PH 为三棱锥 $P\text{-}ADC$ 的高.

$\because PH=\sqrt{PD^2-\left(\frac{1}{2}CD\right)^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$,

$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD=\frac{1}{2}\times3\times6=9$,

$\therefore V_{P-ADC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ADC}\cdot PH=\frac{1}{3}\times9\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$.

由(2)知 $BC\perp PD$,又 $\because AD//BC$,$\therefore AD\perp PD$,

$\therefore S_{\triangle PDA}=\frac{1}{2}\cdot PD\cdot AD=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.

设点 C 到平面 PDA 的距离为 h.

$\because V_{C-PDA}=V_{P-ADC}$,$\therefore \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PDA}\cdot h=3\sqrt{7}$,

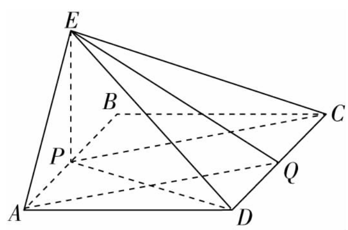
$\therefore h=\dfrac{3\sqrt{7}}{\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PDA}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{\frac{1}{3}\times6}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

点睛 直线、平面之间的平行、垂直关系是重点考查的位置关系,当已知线面、面面垂直或平行时考虑用性质定理转化,要证线面、面面垂直或平行时要用判定定理进行论证.

【变式训练 4】如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2BC$,P,Q 分别为线段 AB,CD 的中点,$EP\perp$ 平面 $ABCD$.求证:

(1)AQ//平面 CEP;

(2)平面 $AEQ\perp$ 平面 DEP.



【证明】(1)在矩形 $ABCD$ 中,$\because AP=PB$,$DQ=QC$,

$\therefore AP=CQ$.

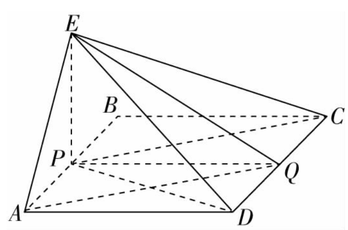
$\therefore AQCP$ 为平行四边形,$\therefore CP//AQ$.

$\because CP\subset$ 平面 CEP,$AQ\not\subset$ 平面 CEP,

$\therefore AQ$//平面 CEP.

(2)$\because EP\perp$ 平面 $ABCD$,$AQ\subset$ 平面 $ABCD$,$\therefore AQ\perp EP$.

$\because AB=2BC$,P 为 AB 的中点,$\therefore AP=AD$.如图,连接 PQ,则四边形 $ADQP$ 为正方形.



$\therefore AQ\perp DP$.

又 $EP\cap DP=P$,$\therefore AQ\perp$ 平面 DEP.

$\because AQ\subset$ 平面 AEQ,

$\therefore$ 平面 $AEQ\perp$ 平面 DEP.

随堂小练

1. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的侧面中，与底面 $ABCD$ 垂直的平面有 （ D ）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

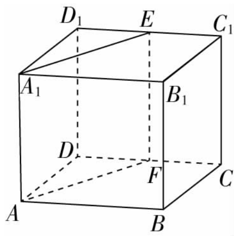
【解析】在长方体中，侧棱与底面都是垂直的，所以侧面 A_1ABB_1，BCC_1B_1，CDD_1C_1，DAA_1D_1 均与底面 $ABCD$ 垂直. 故选 D.

2. 一个二面角的两个半平面分别垂直于另一个二面角的两个半平面，则这两个二面角的关系是 （ D ）

A. 相等　　B. 互补

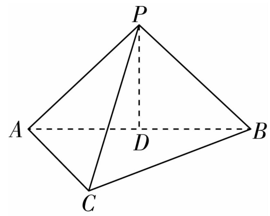
C. 相等或互补　　D. 不确定

【解析】如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $D\text{-}AA_1\text{-}F$ 与二面角 $D_1\text{-}DC\text{-}A$ 的两个半平面分别对应垂直，但是这两个二面角既不相等，也不互补，∴这两个二面角不一定相等或互补.



又如开门的过程中，门所在平面及门轴所在墙面分别垂直于地面与另一墙面，但门所在平面与门轴所在墙面所成二面角的大小不定，而另一个二面角却是 $90°$，所以这两个二面角不一定相等或互补. 故选 D.

3. 如图所示，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 PAB，$PA=PB$，$AD=DB$，则 （ B ）



A. $PD\subset$ 平面 ABC

B. $PD\perp$ 平面 ABC

C. PD 与平面 ABC 相交但不垂直

D. $PD//$ 平面 ABC

【解析】∵ $PA=PB$，$AD=DB$，∴ $PD\perp AB$.

又∵平面 $ABC\perp$ 平面 PAB，平面 $ABC\cap$ 平面 $PAB=AB$，

∴ $PD\perp$ 平面 ABC. 故选 B.

4. 平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=l$，$n\subset\beta$，$n\perp l$，$m\perp\alpha$，m，n 是两条不同的直线，则直线 m 与 n 的位置关系是 ___$m//n$___.

【解析】∵平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=l$，$n\subset\beta$，$n\perp l$，

由面面垂直的性质可得 $n\perp\alpha$，又 $m\perp\alpha$，∴ $m//n$.

温馨提示：请自主完成课后作业（三十四）

课后作业 · 单独成册

三、知能拓展

立体几何初步复习

核心梳理

1. 多面体的结构特征

(1)棱柱的侧棱都互相平行且相等,上、下底面是全等的多边形.

(2)棱锥的底面是任意多边形,侧面是有一个公共顶点的三角形.

(3)棱台可由平行于底面的平面截棱锥得到,其上、下底面是相似多边形.

2. 旋转体的结构特征

(1)圆柱可以由矩形绕一边所在的直线旋转一周得到.

(2)圆锥可以由直角三角形绕一条直角边所在的直线旋转一周得到.

(3)圆台可以由直角梯形绕垂直于底边的腰所在的直线或等腰梯形绕上、下底边中点的连线旋转一周得到,也可由平行于底面的平面截圆锥得到.

(4)球可以由半圆或圆绕直径所在直线旋转一周得到.

3. 旋转体的表面积

(1)如果圆柱的底面半径为 r,母线长为 l,那么圆柱的底面面积为 πr^2,侧面积为 $2\pi rl$. 因此圆柱的表面积 $S=2\pi r^2+2\pi rl=2\pi r(r+l)$.

(2)如果圆锥的底面半径为 r,母线长为 l,那么它的侧面积为 πrl,表面积 $S=\pi r^2+\pi rl=\pi r(r+l)$.

(3)如果圆台的两底面半径分别为 r',r,母线长为 l,则侧面积为 $\pi(r'+r)l$,表面积为 $S=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$.

(4)球的表面积公式为 $S=4\pi R^2$(其中 R 为球的半径),即球面面积等于它的最大圆面积的四倍.

4. 几何体的体积

(1)柱体的体积 $V_{柱体}=Sh$(其中 S 为柱体的底面面积,h 为高).

特别地,底面半径为 r,高为 h 的圆柱体的体积 $V_{圆柱}=\pi r^2h$.

(2)锥体的体积 $V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$(其中 S 为锥体的底面面积,h 为高).

特别地,底面半径为 r,高为 h 的圆锥的体积 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

(3)台体的体积 $V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$(其中 S',S 分别是台体上、下底面的面积,h 为高).

特别地,上、下底面的半径分别为 r',r,高为 h 的圆台的体积 $V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$.

(4)球的体积 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$(其中 R 为球的半径).

5. 平面的基本性质

基本事实 1:过不在一条直线上的三点,有且只有一个平面.

基本事实 2:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线在此平面内.

基本事实 3:如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

6. 直线与直线的位置关系

(1)基本事实 4:平行于同一条直线的两条直线平行.

(2)空间直线与直线的位置关系有且只有三种:

$$\begin{cases}共面直线\begin{cases}相交直线\\平行直线\end{cases}\\异面直线:不同在任何一个平面内,没有公共点.\end{cases}$$

(3)当两条异面直线所成的角是直角时,这两条异面直线垂直.

7. 直线与平面的位置关系

(1)直线 a 与平面 α 的位置关系有平行、相交、在平面内,其中平行与相交统称直线在平面外.

(2)直线和平面平行

①定义:直线和平面没有公共点,则称直线平行于平面.

②判定定理:$a\not\subset\alpha$,$b\subset\alpha$,$a/\!/b\Rightarrow a/\!/\alpha$.

③其他判定方法:$\alpha/\!/\beta$,$a\subset\alpha\Rightarrow a/\!/\beta$.

④性质定理:$a/\!/\alpha$,$a\subset\beta$,$\alpha\cap\beta=l\Rightarrow a/\!/l$.

(3)直线和平面垂直

①定义:如果一条直线 l 和一个平面 α 内的任意一条直线都垂直,那么就说这条直线和平面 α 互相垂直.

②判定定理:如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

③性质定理:如果两条直线垂直于同一个平面,那么这两条直线平行.

(4)平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的角,叫做这条直线和这个平面所成的角,直线与平面所成的角的取值范围是$[0°,90°]$.

8. 两平面的位置关系

(1)两个平面的位置关系有平行、相交.

(2)两个平面平行的判定

①定义:两个平面没有公共点,称这两个平面平行.

②判定定理：$a\subset\alpha,b\subset\alpha,a\cap b=M,a/\!/\beta,b/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

(3)两个平面平行的性质定理

①$\alpha/\!/\beta,a\subset\alpha\Rightarrow a/\!/\beta$；②$\alpha/\!/\beta,\gamma\cap\alpha=a,\gamma\cap\beta=b\Rightarrow a/\!/b$.

(4)与垂直相关的平行关系的判定

①$a\perp\alpha,b\perp\alpha\Rightarrow a/\!/b$；

②$a\perp\alpha,a\perp\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

(5)两个平面垂直

①二面角的平面角：以二面角的棱上任一点为端点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角. 二面角的平面角的取值范围是$[0°,180°]$.

②定义：如果两个相交平面所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.

③判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

④性质定理：如果两个平面垂直，那么一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

重难突破

要点1 空间中的平行关系

1. 面面平行判定的落脚点是线面平行，因此掌握线面平行的判定方法是必要的，判定线面平行的两种方法：

(1)利用线面平行的判定定理；

(2)利用面面平行的性质，即当两平面平行时，其中一个平面内的任一直线平行于另一平面.

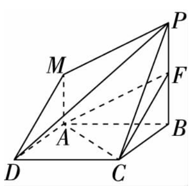
2. 判断面面平行的常用方法：

(1)利用面面平行的判定定理；

(2)利用面面平行的传递性($\alpha/\!/\beta,\beta/\!/\gamma\Rightarrow\alpha/\!/\gamma$)；

(3)利用线面垂直的性质($l\perp\alpha,l\perp\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$).

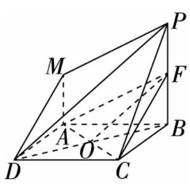
【例1】如图所示，四边形$ABCD$是平行四边形，$PB\perp$平面$ABCD$，$MA/\!/PB$，$PB=2MA$. 在线段PB上是否存在一点F，使平面$AFC/\!/$平面PMD？若存在，请确定点F的位置；若不存在，请说明理由.



【解析】存在，当点F是PB的中点时，平面$AFC/\!/$平面PMD.

证明如下：

如图连接AC和BD交于点O，取PB中点F，连接FO，则$PF=\frac{1}{2}PB$.



∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴O是BD的中点，∴$OF/\!/PD$.

又$OF\not\subset$平面PMD，$PD\subset$平面PMD，

∴$OF/\!/$平面PMD.

又$MA\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}PB$，

∴$PF\underline{\underline{/\!/}}MA$，∴四边形$AFPM$是平行四边形，

∴$AF/\!/PM$.

又$AF\not\subset$平面PMD，$PM\subset$平面PMD，

∴$AF/\!/$平面PMD.

又$AF\cap OF=F$，$AF\subset$平面AFC，$OF\subset$平面AFC.

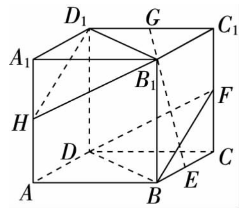
∴平面$AFC/\!/$平面PMD.

点睛 正确把握空间中的平行关系的判定定理和性质定理是解题关键，要准确理解定理中的条件与结论，证明的起点为平面图形中的平行关系.

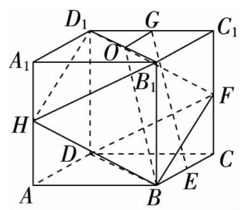
【变式训练1】如图，E,F,G,H分别是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱BC,CC_1,C_1D_1,AA_1的中点. 求证：

(1)$GE/\!/$平面BB_1D_1D；

(2)平面$BDF/\!/$平面B_1D_1H.



【证明】(1)如图，取B_1D_1中点O，连接GO,OB.



易证$OG\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}B_1C_1$，$BE\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}B_1C_1$，

∴$OG\underline{\underline{/\!/}}BE$，四边形$BEGO$为平行四边形.

∴$OB/\!/GE$.

∵$OB\subset$平面BDD_1B_1，

$GE\not\subset$平面BDD_1B_1，

∴$GE/\!/$平面BDD_1B_1.

(2)由正方体性质得$B_1D_1/\!/BD$，

∵$B_1D_1\not\subset$平面BDF，$BD\subset$平面BDF，

∴$B_1D_1/\!/$平面BDF.

连接HB,D_1F，

易证四边形$HBFD_1$是平行四边形，得$HD_1/\!/BF$.

∵$HD_1\not\subset$平面BDF，$BF\subset$平面BDF，

∴$HD_1/\!/$平面BDF.

∵$B_1D_1\cap HD_1=D_1$，

∴平面$BDF/\!/$平面B_1D_1H.

要点2 空间中的垂直关系

1. 判定线线垂直的方法：

(1)计算所成的角为90°(包括平面角和异面直线所成的角)；

(2)线面垂直的性质($a\perp\alpha,b\subset\alpha\Rightarrow a\perp b$).

2. 判定线面垂直的方法：

(1)线面垂直的定义(一般不易验证任意性)；

(2)线面垂直的判定定理($a\perp b,a\perp c,b\subset\alpha,c\subset\alpha,b\cap c=M\Rightarrow a\perp\alpha$)；

(3)平行线垂直平面的传递性质($a/\!/b,b\perp\alpha\Rightarrow a\perp\alpha$)；

(4)面面垂直的性质($\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l,a\subset\beta,a\perp l\Rightarrow a\perp\alpha$);

(5)面面平行的性质($a\perp\alpha,\alpha/\!/\beta\Rightarrow a\perp\beta$);

(6)面面垂直的性质($\alpha\cap\beta=l,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma\Rightarrow l\perp\gamma$).

3.面面垂直的判定方法:

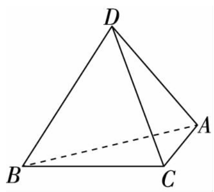
(1)根据定义(作两平面构成二面角,计算其平面角为 90°);

(2)面面垂直的判定定理($a\perp\beta,a\subset\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$).

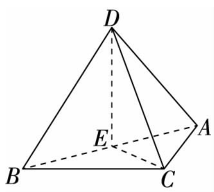
【例 2】如图,A,B,C,D 为空间四点.在$\triangle ABC$ 中,$AB=2,AC=BC=\sqrt{2}$,等边三角形 ADB 以 AB 为轴转动.

(1)当平面 $ADB\perp$平面 ABC 时,求 CD 的长;

(2)当$\triangle ADB$ 转动时,是否总有 $AB\perp CD$?证明你的结论.



【解析】(1)如图,取 AB 的中点 E,连接 DE,CE,



$\because\triangle ADB$ 是等边三角形,$\therefore DE\perp AB$.

当平面 $ADB\perp$平面 ABC 时,$\because$平面 $ADB\cap$平面 $ABC=AB$,$\therefore DE\perp$平面 ABC.

$\because CE\subset$平面 ABC,$\therefore DE\perp CE$.

由已知可得 $DE=\sqrt{3}$,又 $AB=2,AC=BC=\sqrt{2}$,故$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,所以 $EC=1$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 中,$CD=\sqrt{DE^2+EC^2}=2$.

(2)当$\triangle ADB$ 以 AB 为轴转动时,总有 $AB\perp CD$.

证明如下:

①当 D 在平面 ABC 内时,$\because AC=BC,AD=BD$,

$\therefore C,D$ 都在线段 AB 的垂直平分线上,故 $AB\perp CD$.

②当 D 不在平面 ABC 内时,取 AB 中点 E,由(1)知 $AB\perp DE$.

又$\because AC=BC$,$\therefore AB\perp CE$.

又 $DE\cap CE=E$,$\therefore AB\perp$平面 CDE,

$\because CD\subset$平面 CDE,$\therefore AB\perp CD$.

综上所述,总有 $AB\perp CD$.

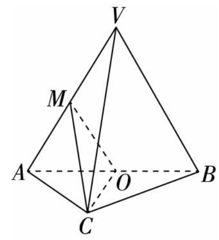
点睛　正确把握空间中的垂直关系的判定定理和性质定理是解题关键,要准确理解定理中的条件与结论,证明的起点为平面图形中的垂直关系.

【变式训练 2】如图,在三棱锥 $V\text{-}ABC$ 中,平面 $VAB\perp$平面 ABC,$\triangle VAB$ 为等边三角形,$AC\perp BC$ 且 $AC=BC=\sqrt{2}$,O,M 分别为 AB,VA 的中点.

(1)求证:$VB/\!/$平面 MOC.

(2)求证:平面 $MOC\perp$平面 VAB.

(3)求三棱锥 $V\text{-}ABC$ 的体积.



【解析】(1)证明:$\because O,M$ 分别为 AB,VA 的中点,

$\therefore OM/\!/VB$.

$\because VB\not\subset$平面 MOC,$OM\subset$平面 MOC,

$\therefore VB/\!/$平面 MOC.

(2)证明:$\because AC=BC$,O 为 AB 的中点,$\therefore OC\perp AB$.

又$\because$平面 $VAB\perp$平面 ABC,且平面 $VAB\cap$平面 $ABC=AB$,$OC\subset$平面 ABC,$\therefore OC\perp$平面 VAB.

$\because OC\subset$平面 MOC,$\therefore$平面 $MOC\perp$平面 VAB.

(3)在等腰直角$\triangle ACB$ 中,$AC=BC=\sqrt{2}$,

$\therefore AB=2,OC=1$,

$\therefore S_{\triangle VAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}$.

$\because OC\perp$平面 VAB,

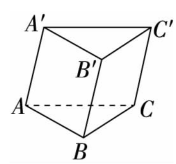
$\therefore V_{C\text{-}VAB}=\dfrac{1}{3}OC\cdot S_{\triangle VAB}=\dfrac{1}{3}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore V_{V\text{-}ABC}=V_{C\text{-}VAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

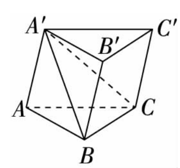
要点 3　几何体的表面积与体积

几何体的表面积和体积的计算是现实生活中经常遇到的问题,如制作物体如何下料的问题、材料最省问题、相同材料容积最大问题等,都涉及表面积和体积的计算.特别是特殊的柱、锥、台体,在计算中要注意其中矩形、梯形及直角三角形等重要的平面图形的使用,对于圆柱、圆锥、圆台,要重视旋转轴所在轴截面、底面圆的作用.割补法、构造法是常用的技巧.

【例 3】如图所示,已知三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$,侧面 $B'BCC'$ 的面积是 S,点 A' 到侧面 $B'BCC'$ 的距离是 a,求三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 的体积.



【解析】如图所示,连接 $A'B,A'C$,这样就把三棱柱分割成了两个棱锥.



设所求体积为 V,显然三棱锥 $A'\text{-}ABC$ 的体积是 $\dfrac{1}{3}V$.

而四棱锥 $A'\text{-}BCC'B'$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}Sa$,

故有 $\dfrac{1}{3}V+\dfrac{1}{3}Sa=V$,即 $V=\dfrac{1}{2}Sa$.

点睛 熟记常见几何体的表面积和体积公式是解题关键,结合几何体特征合理运用分割法和补形法是灵活求解的基本策略.

【变式训练3】《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土,这是我国现存最早的有系统的数学典籍,其中记载有求"囷盖"的术:置如其周,令相乘也. 又以高乘之,三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h,计算其体积 V 的近似公式 $V\approx\frac{1}{36}L^2h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为 3. 那么,近似公式 $V\approx\frac{2}{75}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为 (B)

A. $\frac{22}{7}$　　B. $\frac{25}{8}$　　C. $\frac{157}{50}$　　D. $\frac{355}{113}$

【解析】圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2h=\frac{L^2h}{12\pi}$,由题意得 $12\pi\approx\frac{75}{2}$,π 近似取为 $\frac{25}{8}$,故选 B.

要点 4　线线角、线面角和二面角问题

1. 两条异面直线所成的角的范围是$(0°,90°]$. 找两条异面直线所成的角,关键是选取合适的点,引两条异面直线的平行线,这两条相交直线所成的锐角或直角即为两条异面直线所成的角. 特别地,可由线面垂直得到两条异面直线垂直.

2. 直线和平面所成的角的范围是$[0°,90°]$. 找线面角的关键是找到直线与其在平面内的射影的夹角. 当线面角为 0°时,直线与平面平行或直线在平面内;当线面角为 90°时,直线与平面垂直.

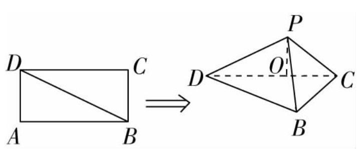
3. 如果求两个相交平面所成的二面角,除垂直外,均有两个答案,即 θ 或 $180°-\theta$. 具体几何体中,由题意和图形确定. 作二面角的平面角时,首先要确定二面角的棱,然后结合题设构造二面角的平面角. 一般常用:①定义法;②垂面法.

4. 求角度问题时,无论哪种情况,最终都归结到两条相交直线所成的角的问题. 求角度的解题步骤:①找出这个角;②证该角符合题意;③构造出含这个角的三角形,解这个三角形,求出角.

【例 4】如图所示,矩形 $ABCD$ 中,$AB=6$,$BC=2\sqrt{3}$,沿对角线 BD 将$\triangle ABD$ 折起,使点 A 移至点 P,点 P 在平面 BCD 内的投影为点 O,且点 O 在 DC 上.

(1)求证:$PD\perp PC$.

(2)求二面角 P-DB-C 的余弦值.



【解析】(1)证明:点 P 在平面 BCD 内的投影为点 O,

则 $PO\perp$平面 BCD,

$\because BC\subset$平面 BCD,$\therefore PO\perp BC$.

$\because BC\perp CD$,$CD\cap PO=O$,$\therefore BC\perp$平面 PCD.

$\because DP\subset$平面 PCD,$\therefore BC\perp DP$.

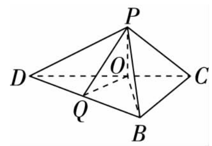
又$\because DP\perp PB$,$PB\cap BC=B$,$\therefore DP\perp$平面 PBC.

而 $PC\subset$平面 PBC,$\therefore PD\perp PC$.

(2)连接 OB,$\triangle PBD$ 在平面 BCD 内的投影为$\triangle OBD$,

且 $S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$,

$S_{\triangle OBD}=S_{\triangle CBD}-S_{\triangle BOC}=6\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times OC$.



在 Rt$\triangle DPC$ 中,

$PC^2=DC^2-DP^2=24$.

设 $OC=x$,则 $OD=6-x$,

$\therefore PC^2-OC^2=DP^2-DO^2$,

即 $24-x^2=12-(6-x)^2$,解得 $x=4$.

$\therefore S_{\triangle BOD}=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

过点 P 作 $PQ\perp DB$,连接 OQ,则 $DB\perp$平面 OPQ,

$\therefore\angle OQP$ 即为二面角 P-DB-C 的平面角,

$\therefore\cos\angle OQP=\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle PBD}}=\frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

$\therefore$二面角 $P-DB-C$ 的余弦值为$\frac{1}{3}$.

点睛 用传统几何方法求空间角对证明的要求很高.

【变式训练4】已知 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是长方体,异面直线 AB,A_1D_1 所成的角等于 (D)

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

【解析】由于 $AD/\!/A_1D_1$,则$\angle BAD$ 是异面直线 AB,A_1D_1 所成的角,很明显$\angle BAD=90°$. 故选 D.

拓展提升

1. (多选题)设 m,n 是两条不同的直线,α,β 是两个不同的平面,则下列命题正确的是 (BC)

A. 若 $m\subset\alpha$,$\alpha\perp\beta$,则 $m\perp\beta$

B. 若 $\alpha/\!/\beta$,$m\subset\beta$,则 $m/\!/\alpha$

C. 若$m\perp\alpha$,$m/\!/n$,$\alpha/\!/\beta$,则 $n\perp\beta$

D. 若 $m/\!/\alpha$,$n/\!/\beta$,$m/\!/n$,则 $\alpha/\!/\beta$

【解析】A. 两个平面垂直,推不出平面中任意直线和另一个平面垂直,故 A 错误;B. 两个平行平面,其中一个平面内的任意直线都和另一个平面平行,故 B 正确;C. 由 $m\perp\alpha$,$\alpha/\!/\beta$ 得 $m\perp\beta$,又 $m/\!/n$,则 $n\perp\beta$,故 C 正确;D 项不能得出 $\alpha/\!/\beta$,故 D 错误. 故选 BC.

2. 设 l,m 是两条不同的直线,α 是一个平面,则下列命题正确的是 (B)

A. 若 $l\perp m$,$m\subset\alpha$,则 $l\perp\alpha$

B. 若 $l\perp\alpha$,$l/\!/m$,则 $m\perp\alpha$

C. 若 $l/\!/\alpha$,$m\subset\alpha$,则 $l/\!/m$

D. 若 $l/\!/\alpha$,$m/\!/\alpha$,则 $l/\!/m$

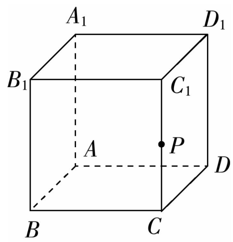
【解析】$l\perp m$,$m\subset\alpha$,则 l 与 α 可能平行或相交,A 错误;

$l\perp\alpha$,$l/\!/m$,由线面平行的性质可得 $m\perp\alpha$,B 正确;

$l/\!/\alpha$,$m\subset\alpha$,则 $l/\!/m$ 或 l 与 m 异面,C 错误;

$l/\!/\alpha$,$m/\!/\alpha$,l 与 m 可能平行、相交、异面,D 错误. 故选 B.

3. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，点 P 是棱 CC_1 的中点，设直线 AB 为 a，直线 A_1D_1 为 b. 对于下列两个命题：①过点 P 有且只有一条直线 l 与 a，b 都相交；②过点 P 有且只有一条直线 l 与 a，b 都成 $45°$ 角. 以下判断正确的是 （ B ）



A. ①为真命题，②为真命题

B. ①为真命题，②为假命题

C. ①为假命题，②为真命题

D. ①为假命题，②为假命题

【解析】直线 AB 与 A_1D_1 是两条互相垂直的异面直线，点 P 不在这两异面直线中的任何一条上. 如图所示，

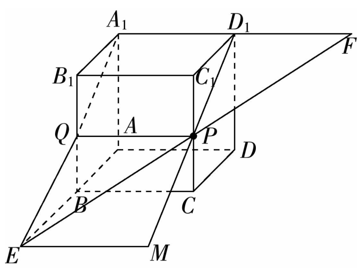
取 BB_1 的中点 Q，则 $PQ/\!/A_1D_1$，且 $PQ=A_1D_1$，

设 A_1Q 与 AB 交于点 E，则点 A_1，D_1，Q，E，P 共面，

直线 EP 必与 A_1D_1 相交于某点 F，则过点 P 有且只有一条直线 EF 与 a，b 都相交，故①为真命题；

分别平移 a，b，使 a 与 b 均经过点 P，则有两条互相垂直的直线与 a，b 都成 $45°$ 角，故②为假命题.

故选 B.



4. 已知四面体 $ABCD$ 的四个面都为直角三角形，且 $AB\perp$ 平面 BCD，$AB=BD=CD=2$. 若该四面体的四个顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为 （ D ）

A. 3π　　B. $2\sqrt{3}\pi$

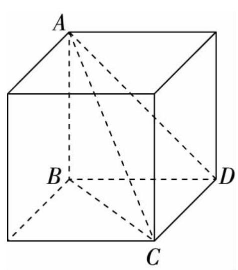
C. $4\sqrt{3}\pi$　　D. 12π

【解析】$\because BD=CD=2$ 且 $\triangle BCD$ 为直角三角形，

$\therefore BD\perp CD$，

又 $AB\perp$ 平面 BCD，$CD\subset$ 平面 BCD，$\therefore CD\perp AB$，

$\therefore CD\perp$ 平面 ABD，由此可将四面体 $ABCD$ 放入边长为 2 的正方体中，如下图所示，



$\therefore$ 正方体的外接球即为该四面体的外接球 O，

正方体外接球的半径为体对角线的一半，即 $R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=12\pi$.

故选 D.

5. 我国古代数学名著《九章算术》中"开立圆术"曰：置积尺数，以十六乘之，九而一，所得开立方除之，即丸径. "开立圆术"相当于给出了已知球的体积 V，求其直径 d 的一个近似公式 $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$，人们还用过一些类似的近似公式，根据 $\pi\approx 3.14159\cdots$ 判断，下列近似公式中最精确的一个是 （ B ）

A. $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$　　B. $d\approx\sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$

C. $d\approx\sqrt[3]{\frac{300}{157}V}$　　D. $d\approx\sqrt[3]{2V}$

【解析】由球体的体积公式得 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{\pi d^3}{6}$，$\therefore d=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$，又 $\frac{6}{\pi}\approx 1.9099$，

而 $\frac{16}{9}\approx 1.7778$，$\frac{21}{11}\approx 1.9091$，$\frac{300}{157}\approx 1.9108$，

可看出 $\frac{21}{11}$ 与 $\frac{6}{\pi}$ 最为接近，故选 B.

6. 如图，点 P 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 BC_1 上运动，有下列四个结论：

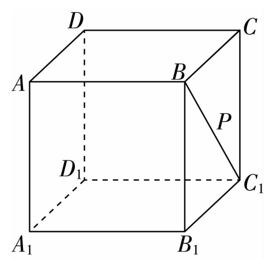
①三棱锥 $A\text{-}D_1PC$ 的体积不变；

②$A_1P/\!/$平面 ACD_1；

③$DP\perp BC_1$；

④平面 $PDB_1\perp$ 平面 ACD_1.

其中正确结论的个数是 （ C ）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】对于①，由题意知 $AD_1/\!/BC_1$，从而 $BC_1/\!/$平面 AD_1C，故 BC_1 上任意一点到平面 AD_1C 的距离均相等，

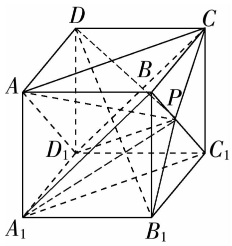
$\therefore$ 以 P 为顶点，平面 AD_1C 为底面的三棱锥 $A\text{-}D_1PC$ 的体积不变，故①正确；

对于②，连接 A_1B，A_1C_1，$A_1C_1/\!/AC$，由①知，$AD_1/\!/BC_1$，

$\because A_1C_1\not\subset$ 平面 ACD_1，$BC_1\not\subset$ 平面 ACD_1，

$\therefore A_1C_1/\!/$平面 ACD_1，$BC_1/\!/$平面 ACD_1，

又 $\because A_1C_1\cap BC_1=C_1$，



$\therefore$平面BA_1C_1//平面ACD_1，又$A_1P\subset$平面A_1BC_1，由面面平行的性质可得②正确；

对于③，由于$DC\perp$平面BCC_1B_1，所以$DC\perp BC_1$，

若$DP\perp BC_1$，则$BC_1\perp$平面DCP，

$\therefore BC_1\perp PC$，此时P为BC_1的中点，与P为动点矛盾，故③错误；

对于④，连接DB_1，由$DB_1\perp AC$且$DB_1\perp AD_1$，

可得$DB_1\perp$面ACD_1，从而由面面垂直的判定知④正确.

故选C.

温馨提示：请自主完成课后作业(三十五)

课后作业·单独成册

第九章 统计

一、课标导向

课标要求

1. 获取数据的基本途径及相关概念

(1)知道获取数据的基本途径,包括:统计报表和年鉴、社会调查、试验设计、普查和抽样、互联网等.

(2)了解总体、样本、样本量的概念,了解数据的随机性.

2. 抽样

(1)简单随机抽样

通过实例,了解简单随机抽样的含义及其解决问题的过程,掌握两种简单随机抽样方法:抽签法和随机数法.会计算样本均值和样本方差,了解样本与总体的关系.

(2)分层随机抽样

通过实例,了解分层随机抽样的特点和适用范围,了解分层随机抽样的必要性,掌握各层样本量比例分配的方法.结合具体实例,掌握分层随机抽样的样本均值和样本方差.

(3)抽样方法的选择

在简单的实际情境中,能根据实际问题的特点,设计恰当的抽样方法解决问题.

3. 统计图表

能根据实际问题的特点,选择恰当的统计图表对数据进行可视化描述,体会合理使用统计图表的重要性.

4. 用样本估计总体

(1)结合实例,能用样本估计总体的集中趋势参数(平均数、中位数、众数),理解集中趋势参数的统计含义.

(2)结合实例,能用样本估计总体的离散程度参数(标准差、方差、极差),理解离散程度参数的统计含义.

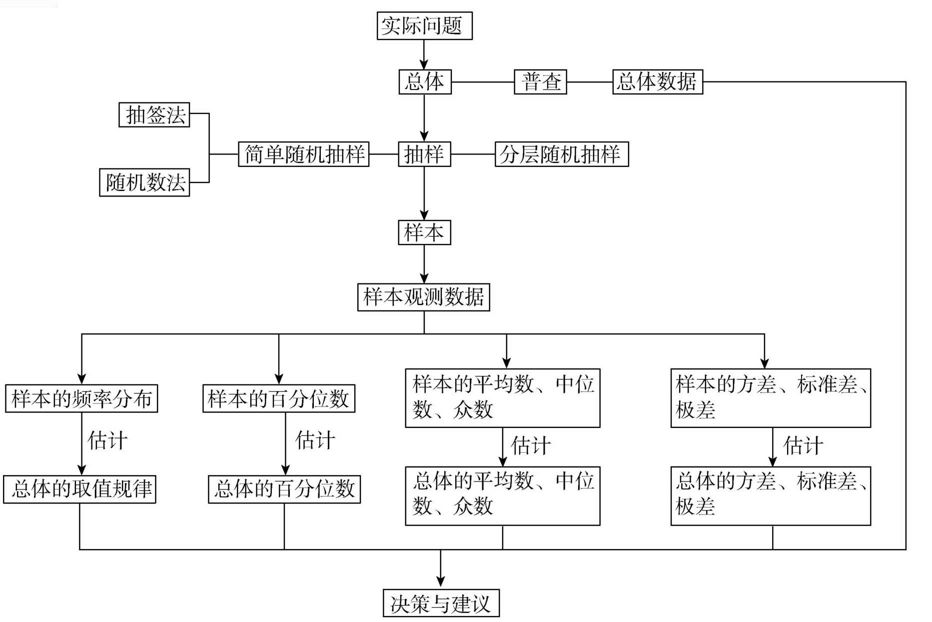
(3)结合实例,能用样本估计总体的取值规律.

(4)结合实例,能用样本估计百分位数,理解百分位数的统计含义.

学习建议

1. 了解总体、样本、样本量的概念,知道获取数据的基本途径.
2. 熟悉随机抽样的两种方法,学会在实际情况下,选择设计恰当的抽样方法.
3. 掌握用样本数字特征估计总体的几种方法,解决一些简单的实际问题.

知识网络



二、精讲精练

9.1 随机抽样

第1课时 简单随机抽样

学习目标	核心素养
1. 了解总体、样本、样本量的概念，了解数据的随机性；通过实例，了解简单随机抽样的含义及其解决问题的过程.(重点) 2. 掌握两种简单随机抽样；会计算总体均值和样本均值，了解样本与总体的关系.(重点、难点)	1. 借助随机抽样的相关概念培养数学抽象素养. 2. 利用抽签法、随机数法解决实际问题提高数据分析素养. 3. 计算总体平均数和样本平均数有利于提高数学运算素养.

自主预习

情景导思

一家成功的企业会高度关注顾客群的感受和体验，定期对顾客群进行问卷调查，会密切关注市场的供需变化，积极开展市场调查，这些调查既要能提供稳定可靠的数据，反映最真实的情况，又要便于开展，省时省力，随机抽样的知识将帮助我们更科学、更便捷地开展调查.

知新预学

1. 统计的相关概念

(1)普查

像人口普查这样，对每一个调查对象都进行调查的方法，称为全面调查，又称普查.

(2)总体和个体

在一个调查中，我们把调查对象的全体称为总体，组成总体的每一个调查对象称为个体. 为了强调调查目的，也可以把调查对象的某些指标的全体作为总体，每一个调查对象的相应指标作为个体.

(3)抽样调查

根据一定目的，从总体中抽取一部分个体进行调查，并以此为依据对总体的情况作出估计和推断的调查方法，称为<u>抽样调查</u>.

(4)样本和样本量

我们把从总体中抽取的那部分个体称为<u>样本</u>，样本中包含的个体数称为<u>样本量</u>.

2. 简单随机抽样

一般地，设一个总体含有 N(N 为正整数)个个体，从中逐个抽取 $n(1\leqslant n<N)$个个体作为样本，如果抽取是放回的，且每次抽取时总体内的各个个体被抽到的概率都<u>相等</u>，我们把这样的抽样方法叫做<u>放回简单随机抽样</u>；如果抽取是不放回的，且每次抽取时总体内未进入样本的各个个体被抽到的概率都<u>相等</u>，我们把这样的抽样方法叫做<u>不放回简单随机抽样</u>. 除非特殊声明，放回简单随机抽样和不放回简单随机抽样统称为简单随机抽样. 本章所称的简单随机抽样均指不放回简单随机抽样.

3. 简单随机抽样的方法

(1)抽签法

把总体中的 N 个个体<u>编号</u>，把编号写在外观、质地等无差别的小纸片(也可以是卡片、小球等)上作为号签，将这些小纸片放在一个不透明的盒里，充分搅拌. 最后从盒中不放回地<u>逐个</u>抽取号签，使与号签上的编号对应的个体进入样本，直到抽足样本所需的个数.

(2)随机数法

用随机数工具产生编号范围内的整数随机数，把产生的随机数作为抽中的编号，使与编号对应的个体进入样本. 重复上述过程，直到抽足样本所需的个数.

①用随机试验生成随机数；

②用信息技术生成随机数：(a)用计算器生成随机数；(b)用电子表格软件生成随机数；(c)用 **R** 统计软件生成随机数.

4. 总体平均数

一般地，总体中有 N 个个体，它们的变量值分别为 Y_1，Y_2，…，Y_N，则称 $\overline{Y}=\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}Y_i$ 为<u>总体均值</u>，又称<u>总体平均数</u>.

如果总体的 N 个变量值中，不同的值共有 $k(k\leqslant N)$个，不妨记为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$，其中 Y_i 出现的频数记为 $f_i(i=1,2,\cdots,k)$，则总体平均数还可以写成加权平均数的形式<u>$\overline{Y}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{k}f_iY_i$</u>.

5. 样本平均数

如果从总体中抽取一个容量为 n 的样本，它们的变量值分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，则称 $\overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ 为<u>样本均值</u>，又称<u>样本平均数</u>. 在简单随机抽样中，我们常用样本平均数 $\overline{y}$ 去估计总体平均数 $\overline{Y}$.

小试牛刀

1. 关于简单随机抽样,下列说法正确的是 (A)

①它要求被抽取样本的总体的个数有限;②它是从总体中逐个地进行抽取;③它是一种不放回抽样;④它是一种等可能性抽样.

A. ①②③④　　B. ③④

C. ①②③　　D. ①③④

【解析】由简单随机抽样定义可得①②③④均正确,故选 A.

2. 下面抽样方法是简单随机抽样的是 (D)

A. 从平面直角坐标系中抽取 5 个点作为样本

B. 某公司从仓库中的 1 000 箱饮料中一次性抽取 20 箱进行质量检查

C. 某连队从 200 名战士中,挑选出 50 名最优秀的战士去参加某活动

D. 从 10 个手机中逐个不放回地随机抽取 2 个进行质量检验(假设 10 个手机已编号)

【解析】A 中平面直角坐标系中有无数个点,这与要求总体中的个体数有限不相符,故错误;B 中一次性抽取不符合简单随机抽样逐个抽取的特点,故错误;C 中 50 名战士是最优秀的,不符合简单随机抽样的等可能性,故错误. 故选 D.

3. 对于简单随机抽样,每个个体每次被抽到的机会 (A)

A. 相等　　B. 不相等

C. 不确定　　D. 与抽取的次数有关

【解析】根据简单随机抽样的定义可得,每个个体被抽到的机会都是相等的. 故选 A.

互动课堂

合作探究

探究 1 简单随机抽样的概念

【例 1】下列抽取样本的方法是简单随机抽样吗? 为什么?

(1)从无限多个个体中抽取 50 个个体作为样本.

(2)箱子里共有 100 个零件,今从中选取 10 个零件进行检验,在抽样操作时,从中任意地拿出一个零件进行质量检验后再把它放回箱子里.

(3)从 50 个个体中一次性抽取 5 个个体作为样本.

(4)一彩民选号,从装有 36 个大小、形状都相同的号签的箱子中无放回地抽取 6 个号签.

【解析】(1)不是简单随机抽样,因为被抽取的样本的总体中的个体是无限的而不是有限的.

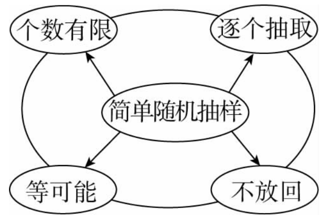
(2)不是简单随机抽样,因为它是有放回的抽样.

(3)不是简单随机抽样,因为它是一次性抽取,而不是逐个抽取.

(4)是简单随机抽样,因为总体中的个体是有限的,并且是从总体中逐个抽取、不放回的、等可能的抽样.

点睛 简单随机抽样的判断方法.

判断所给的抽样法是否为简单随机抽样的依据是简单随机抽样的四个特征:



上述四个特征,如果有一个不满足,就不是简单随机抽样.

【变式训练 1】下列问题中,最适合用简单随机抽样方法抽样的是 (B)

A. 某电影院从观看电影的 1 600 名观众中抽取 16 名观众进行采访

B. 从 10 桶奶粉中抽出 3 桶进行质量检查

C. 某学校有在编人员 160 人,其中行政人员 16 人,教师 112 人,后勤人员 32 人,教育部门为了解在编人员对学校机构改革的意见,要从中抽取一个容量为 20 的样本

D. 某乡农田有山地 800 公顷,丘陵 1 200 公顷,平地 2 400 公顷,洼地 400 公顷,现抽取农田 48 公顷估计全乡农田平均每公顷产量

【解析】A 中总体容量较大,用简单随机抽样法比较麻烦;B 中总体容量较少,用简单随机抽样法比较方便;C 中由于学校各类人员对这一问题的看法可能差异很大,不宜采用简单随机抽样法;D 中总体容量大,且各类田地的差别很大,也不宜采用简单随机抽样法. 故选 B.

探究 2 抽签法的应用

【例 2】2022 年第 19 届亚运会在杭州市举行. 组委会从某高校报名的 20 名志愿者中选取 5 人组成亚运志愿小组,请用抽签法设计抽样方案.

【解析】①将 20 名志愿者编号,号码分别是 01,02,…,20;

②将号码分别写在 20 张大小、形状都相同的纸条上,揉成团,制成号签;

③将所得号签放在一个不透明的袋子中,并搅拌均匀;

④从袋子中依次不放回地抽取 5 个号签,并记录下上面的编号;

⑤所得号码对应的志愿者就是志愿小组的成员.

点睛 抽签法的应用条件及注意点.

(1)一个抽样试验可以采用抽签法的两个关键点:一是总体中个体数不多,二是个体之间差异不明显. 一般地,当样本量和总体容量较小时,可用抽签法.

(2)应用抽签法时应注意以下几点:

①分段时,如果已有分段可不必重新分段;

②号签要求大小、形状完全相同;

③号签要搅拌均匀;

④要逐一不放回地抽取.

【变式训练 2】下列抽样试验中,适合用抽签法的有（ B ）

A. 从某厂生产的 3 000 件产品中抽取 600 件进行质量检验

B. 从某厂生产的两箱(每箱 15 件)产品中抽取 6 件进行质量检验

C. 从甲、乙两工厂生产的两箱(每箱 15 件)产品中抽取 6 件进行质量检验

D. 从某厂生产的 3 000 件产品中抽取 10 件进行质量检验

【解析】A、D 两项总体容量较大,不适合用抽签法;对于 C 项,甲、乙两工厂生产的产品质量可能差异明显. 只有 B 项中的样本量和总体较小适合抽签法. 故选 B.

探究 3 随机数法的应用

【例 3】现有一批编号为 10,11,…,99,100,…,600 的元件,打算从中抽取一个容量为 6 的样本进行质量检验. 如何用随机数法设计抽样方案?

【解析】在电子表格软件的任一单元格中,输入"=RANDBETWEEN(10,600)",即可生成一个 10～600 范围内的整数随机数,再利用电子表格软件的自动填充功能,即可生成 6 个 10～600 范围内的整数随机数,这 6 个随机数对应的元件编号即为所要抽取的元件.(答案不唯一)

点睛 随机数法解题步骤:

第一步,编号;

第二步,生成随机数;

第三步,记录样本编号;

第四步,抽取样本.

【变式训练 3】为了了解某班学生的身高情况,决定从 50 名学生(已编号为 1～50)中选取 10 名进行测量,利用随机数法进行抽取,得到如下 4 组编号,则可作为样本的编号是（ B ）

A. 26,94,29,27,43,99,55,19,81,6

B. 20,26,31,40,24,36,19,34,3,48

C. 2,38,22,41,38,24,49,44,3,11

D. 4,12,45,32,44,22,4,11,8,49

【解析】A 中有超过 50 的编号,则 A 不可取,C,D 中都有重复的编号,也不可取. 故选 B.

探究 4 用样本平均数估计总体平均数

【例 4】某公司的各层人员及相对应工资数构成如下:

经理 1 人,周工资 15 650 元;高层管理人员 3 人,周工资均为 2 500 元;高级技工 4 人,周工资均为 2 000 元;工人 6 人,周工资均为 1 000 元;学徒 1 人,周工资为 500 元. 计算该公司员工周平均工资. 计算出的平均工资是否能反映职场人员的平均收入水平?

【解析】周平均工资为

$$\frac{15\ 650\times1+2\ 500\times3+2\ 000\times4+1\ 000\times6+500\times1}{1+3+4+6+1}=2\ 510(\text{元}).$$

虽然平均工资为 2 510 元,但由给出的数据可知,只有经理的周工资在平均工资以上,其余人的周工资均在平均工资以下,故用平均工资不能反映职场人员的平均收入水平.

点睛 在用样本平均数估计总体平均数的时候,样本中每一个数据都会影响到平均数的大小,因此,在实际操作过程中,一定要注意个别"离群"的数据对平均数的影响.

【变式训练 4】已知一组样本数据 4,6,5,8,7,6,那么这组数据的样本平均数为 _6_.

【解析】由平均数公式可得这组数据的平均数为 $\frac{4+6+5+8+7+6}{6}=6$.

随堂小练

1. 某校期末考试后,为了分析该校高一年级 1 000 名学生的学习成绩,从中随机抽取了 100 名学生的成绩单,就这个问题来说,下面说法正确的是（ D ）

A. 1 000 名学生是总体

B. 每个学生是个体

C. 100 名学生的成绩是一个个体

D. 样本的容量是 100

【解析】总体、个体应该是学生的成绩,而不是学生,故 A,B 错;100 名学生的成绩是一个个体也是错的,应该 100 名学生中每一个学生的成绩是一个个体,故 C 错,样本的容量是 100 正确. 故选 D.

2. 随机抽取某商场 4 月份 5 天的营业额(单位:万元)分别为 3.4,2.9,3.0,3.1,2.6,则这个商场 4 月份的营业额大约是（ A ）

A. 90 万元　B. 450 万元　C. 3 万元　D. 15 万元

【解析】样本平均数为 $\frac{1}{5}\times(3.4+2.9+3.0+3.1+2.6)=3$,所以这个商场 4 月份的营业额约为 $3\times30=90$(万元),故选 A.

3. 在容量为 100 的总体中用随机数法抽取 5 个样本,总体编号为 1,2,…,100,给出下列几组号码:①1,2,3,4,5;②10,30,50,70,90;③49,19,46,4,67;④11,22,33,44,55. 则可能成为所得样本编号的是 _①②③④_

【解析】随机数法是一种简单随机抽样方法,因此每个个体都有可能被抽到,且被抽到的可能性相同,因此所列几组都可能成为所得样本的编号.

4. 采用抽签法从含有 3 个个体的总体{1,3,8}中抽取一个容量为 2 的样本,则所有可能的样本为 _{1,3},{1,8},{3,8}_.

【解析】从总体中任取两个个体即可组成样本,即所有可能的样本为{1,3},{1,8},{3,8}. 故答案为:{1,3},{1,8},{3,8}.

温馨提示:请自主完成课后作业(三十六)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时 分层随机抽样

学习目标	核心素养
1. 理解分层随机抽样的基本思想和适用情形，掌握分层随机抽样的实施步骤.（重点） 2. 了解两种随机抽样方法的区别和联系.（重点、难点） 3. 会用样本平均数估计分层随机抽样中的总体平均数.（难点）	1. 熟悉分层随机抽样的相关概念有利于培养数学抽象素养. 2. 分层随机抽样的应用有利于提高数据分析素养. 3. 分层随机抽样中各层样本量的计算有利于提高数学运算素养.

自主预习

情景导思

简单随机抽样抽取样本会出现极端现象，那么有没有一种抽取方式可以规避这种情况？例如学生的学习成绩受到多方面的影响，不同水平的学生在学习方法、要求及时间上有着不同的差异. 欲了解一个学校某年级学生的学习特点，你认为如何设计合理方案来抽取部分学生座谈，从而得到较为有价值的反馈情况呢？

知新预学

1. 定义

一般地，在抽样时，按一个或多个变量将总体划分成若干个子总体，每个个体属于且仅属于一个子总体，在每个子总体中独立地进行简单随机抽样，再把所有子总体中取出的样本合在一起作为总样本，这样的抽样方法称为__分层随机抽样__，每一个子总体称为__层__. 在分层随机抽样中，如果每层样本量都与层的大小成比例，那么称这种样本量的分配方式为__比例分配__.

2. 适用范围

__当总体是由差异明显的几个部分组成时，往往采用分层随机抽样__.

3. 分层随机抽样的步骤

(1)根据已掌握的信息，将总体分成互不交叉的层.

(2)根据总体中的个体数 N 和样本量 n 计算出抽样比 $k=\frac{n}{N}$.

(3)根据抽样比 k 计算出各层中应抽取的个体数 $\frac{n}{N}\cdot N_i$(其中 N_i 为第 i 层所包含的个体总数)，使得各层所抽取的个体数和为 n.

(4)按步骤(3)所确定的数在各层中随机抽取个体，并合在一起得到容量为 n 的样本.

4. 两种随机抽样方法的区别和联系

类别	共同点	各自特点	相互联系	适用范围
简单随机抽样	抽样过程中各个个体被抽到的机会相等，且都是不放回抽取	从总体中逐个抽取	最基本的抽样方法	总体容量较小
分层随机抽样		将总体分成几部分，每一部分按比例抽取	每层抽样时采用简单随机抽样	总体由差异明显的若干部分组成

5. 样本平均数 $\overline{w}$ 和总体平均数 $\overline{W}$ 在分层随机抽样中，如果层数是 2 层，第 1 层和第 2 层包含的个体数分别为 M 和 N，抽取的样本量分别为 m 和 n，$\overline{x}$，$\overline{y}$ 表示第 1 层、第 2 层的样本平均数，有 $\frac{M}{M+N}\overline{x}+\frac{N}{M+N}\overline{y}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}=\overline{w}$，可以直接用样本平均数 $\overline{w}$ 估计总体平均数 $\overline{W}$.

小试牛刀

1. 从某地区中小学生中抽取部分学生，进行肺活量调查. 经了解，该地区小学、初中、高中三个学段学生的肺活量有较大差异，而同一学段男女生的肺活量差异不大. 在下面的抽样方法中，最合理的抽样方法是 （ C ）

A. 抽签法

B. 按性别分层随机抽样

C. 按学段分层随机抽样

D. 随机数法

【解析】∵小学、初中、高中三个学段学生的肺活量有较大差异，∴学段对统计结果影响较大，∵同一学段男女生肺活量差异不大，即性别对统计结果无明显影响，∴最合理的抽样方法是按学段进行分层随机抽样. 故选 C.

2. 某实验中学共有职工 150 人，其中有高级职称的职工为 15 人，有中级职称的职工为 45 人，一般职员为 90 人，现采用分层随机抽样抽取容量为 30 的样本，则抽取的高级职称、中级职称、一般职员的人数分别为 （ B ）

A. 5，10，15　　B. 3，9，18

C. 3，10，17　　D. 5，9，16

【解析】高级职称的职工应抽取的人数为 $15\times\frac{30}{150}=3$；中级职称的职工应抽取的人数为 $45\times\frac{30}{150}=9$；一般职员应抽取的人数为 $90\times\frac{30}{150}=18$. 故选 B.

3. 某学院 A，B，C 三个专业共有 1 200 名学生，为了调查这些学生勤工俭学的情况，拟采用分层随机抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本. 已知该学院的 A 专业有 380 名学生，B 专业有 420 名学生，则在该学院的 C 专业应抽取的学生人数为 （ B ）

A. 30　　B. 40　　C. 50　　D. 60

【解析】C 专业的学生有 $1\,200-380-420=400$(人).

由分层随机抽样原理，应抽取 $120\times\frac{400}{1\,200}=40$，

故选 B.

互动课堂

合作探究

探究1 分层随机抽样的概念

【例1】为了解某地区的中小学生的视力情况，拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查，事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，而男女生视力情况差异不大．在下面的抽样方法中，最合理的抽样方法是 （ C ）

A. 简单随机抽样 B. 按性别分层随机抽样

C. 按学段分层随机抽样 D. 无法确定

【解析】由于该地区的中小学生人数比较多，不能采用简单随机抽样，所以排除A项；由于该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，可采取按照学段进行分层随机抽样，而男女生视力情况差异不大，不能按照性别进行分层随机抽样，所以排除B，D项．故选C.

点睛 分层随机抽样的依据：

(1)适用于总体由差异明显的几部分组成的情况.

(2)样本能更充分地反映总体的情况.

(3)等可能抽样，每个个体被抽到的可能性都相等.

【变式训练1】下列问题中，最适合用分层随机抽样抽取样本的是 （ B ）

A. 从10名同学中抽取3人参加座谈会

B. 某社区有500户家庭，其中高收入的家庭125户，中等收入的家庭280户，低收入的家庭95户，为了了解生活购买力的某项指标，要从中抽取一个容量为100的样本

C. 从1 000名工人中，抽取100人调查上班途中所用的时间

D. 从生产流水线上，抽取样本检查产品质量

【解析】A项中总体所含个体无差异且个数较少，适合用简单随机抽样；C项和D项中总体所含个体无差异，不适合用分层随机抽样；B项中总体所含个体差异明显，适合用分层随机抽样．故选B.

探究2 分层随机抽样中各层样本量的计算

【例2】某企业三月中旬生产A,B,C三种产品共3 000件，根据分层随机抽样的结果，该企业统计员制作了如下的统计表.

产品类别	A	B	C
产品数量/件	x	1 300	y
样本量	m	130	n

由于不小心，表格中A,C产品的有关数据丢失，统计员记得A产品的样本量比C产品的样本量多10．根据以上信息，可得C产品的数量是__800__件.

【解析】因为C产品的数量为y，则A产品的数量为$x=3\ 000-1\ 300-y=1\ 700-y$，又$C$产品的样本量为$n$，则$A$产品的样本量为$m=10+n$，由分层随机抽样的定义可知$\frac{x}{m}=\frac{1\ 700-y}{n+10}=\frac{y}{n}=\frac{1\ 300}{130}$，解得$y=800$.

点睛 分层随机抽样中每层抽取的个体数的确定方法：

(1)已知总体容量、样本量及各层的个体数时，首先确定抽样比$\frac{n}{N}$，然后确定每层抽取的个体的个数$n_i=N_i\times\frac{n}{N}$.

(2)已知各层个体数之比为$m_1:m_2:\cdots:m_k$，样本量为n时，每层抽取的个体数为$n_i=n\times\frac{m_i}{m_1+m_2+\cdots+m_k}(i=1,2,\cdots,k)$.

【变式训练2】某中学有高中生3 500人，初中生1 500人，为了解学生的学习情况，用分层随机抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为n的样本，已知从高中生中抽取70人，则n为 （ A ）

A. 100 B. 150 C. 200 D. 250

【解析】$n=\frac{(3\ 500+1\ 500)\times 70}{3\ 500}=100$．故选A.

探究3 用样本平均数估计总体平均数

【例3】某农场养殖鸡和鸭，为了了解它们的生长情况用分层随机抽样方法抽取了10只鸡和5只鸭，它们某项数值的平均数分别为100和50，试用样本平均数去估计该农场该项数值的平均数.

【解析】样本平均数为$\frac{10\times100+5\times50}{15}=\frac{250}{3}$，

可以用样本平均数去估计该农场该项数值的平均数，也为$\frac{250}{3}$.

点睛 当总体容量很大时，可以用样本平均数去估计总体平均数.

【变式训练3】欲了解某校高中学生锻炼身体的情况，按总的男女生比例分配抽取男生20人，女生30人，他们每天走的步数的平均数分别为10 000步和8 000步，试估计整个学校学生每天走的步数的平均数.

【解析】样本平均数为$\frac{10\ 000\times20+8\ 000\times30}{50}=8\ 800$(步)，

可以用抽取的这50个高中学生的步数平均数去估计整个学校学生每天走的步数平均数，故8 800步为所求.

随堂小练

1. 某房地产公司为了解小区业主对户型结构——平层与复式结构的满意度，采取分层随机抽样的方式对某小区的业主进行问卷调查. 20 位已购买平层户型的业主满意度平均分为 8，30 位已购买复式户型的业主满意度平均分为 9. 若用样本平均数估计该小区业主对户型结构满意度的平均分，则其值为 (C)

A. 8.4　　B. 8.5　　C. 8.6　　D. 8.7

【解析】估计小区业主对户型结构满意度的平均分为

$\overline{W}=\frac{20}{20+30}\times 8+\frac{30}{20+30}\times 9=8.6$. 故选 C.

2. 某校有高一学生 n 名，其中男生人数与女生人数之比为 6∶5，为了解学生的视力情况，现要求按分层随机抽样的方法抽取一个样本量为 $\frac{n}{10}$ 的样本，若样本中男生比女生多 12 人，则 $n=$ (B)

A. 990　　B. 1 320

C. 1 430　　D. 1 560

【解析】依题意可得 $\left(\frac{6}{11}-\frac{5}{11}\right)\times\frac{n}{10}=12$，解得 $n=1\ 320$，故选 B.

3. 某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点. 公司为了调查产品的销售情况，需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本，记这项调查为①；在丙地区有 10 个特大型销售点，要从中抽取 7 个销售点调查其销售收入和售后服务等情况，记这项调查为②. 则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法分别为__分层随机抽样、简单随机抽样__.

【解析】由调查①可知个体差异明显，故宜用分层随机抽样；调查②中个体较少，且个体之间没有明显差异，故宜用简单随机抽样. 故答案为分层随机抽样、简单随机抽样.

4. 甲、乙两套设备生产的同类产品共 4 800 件，采用分层随机抽样的方法从中抽取一个容量为 80 的样本进行检测. 若样本中有 50 件产品由甲设备生产，则乙设备生产的产品总数为__1 800__件.

【解析】因为样本量为 80，且其中甲设备生产的样本数为 50，可得乙设备生产的样本数为 30，所以可推出甲、乙两套设备生产的同类产品的总数量比为 5∶3，又由题目知甲、乙两套设备生产的产品总数为 4 800 件，则可得乙设备生产的产品总数为 $4\ 800\times\frac{3}{8}=1\ 800$(件).

温馨提示：请自主完成课后作业(三十七)

课后作业·单独成册

第3课时　获取数据的途径

学习目标	核心素养
1. 了解获取数据的途径.(重点) 2. 掌握实际调查中数据获取途径的选择方法.(重点)	1. 了解获取数据的途径有利于培养数据分析素养. 2. 熟悉获取数据的过程有利于培养数学建模素养.

自主预习

情景导思

在统计调查中,获取数据的途径多种多样,根据你的生活习惯,总结一下常见的获取数据的途径有哪些.

知新预学

统计学是通过收集数据和分析数据来认识未知现象的,像统计报表和年鉴、社会调查、普查和抽样、互联网、试验设计等都是常见的获取数据的途径.

(1)通过调查获取数据

适用范围:对于有限总体问题,一般通过抽样调查或普查的方法获取数据.

注意事项:充分有效地利用背景信息选择或创建更好的抽样方法,并有效避免抽样过程中的人为错误.

(2)通过试验获取数据

适用范围:没有现存的数据可以查询,需要通过对比试验的方法去获取样本观测数据.

注意事项:需要严格控制试验环境,通过精心的设计安排试验,以提高数据质量,为获得好的分析结果奠定基础.

(3)通过观察获取数据

适用范围:__自然现象__.

注意事项:需要专业测量设备获取观测数据.

(4)通过查询获得数据

适用范围:__二手数据__.

注意事项:数据来历和渠道多样,导致数据质量参差不齐,必须根据问题背景知识"清洗"数据,去伪存真.

小试牛刀

1. 下列调查中,适合采用普查方式的是　(　C　)

A. 调查某品牌电视机的市场占有率

B. 调查某电视连续剧在全国的观看人数

C. 调查某校七年级各班男女同学的比例

D. 调查某型号炮弹的射程

【解析】A 中调查某品牌电视机的市场占有率,适合采用抽样调查,B 中调查某电视连续剧在全国的观看人数,适合采用抽样调查,C 中调查某校七年级各班男女同学的比例,适合采用普查,D 中调查某型号炮弹的射程,适合采用抽样调查.故选 C.

2. 若要研究某城市家庭的收入情况,获取数据的途径应该是　(　A　)

A. 通过调查获取数据　　B. 通过试验获取数据

C. 通过观察获取数据　　D. 通过查询获得数据

【解析】因为要研究的是某城市家庭的收入情况,所以应该是通过调查获取数据. 故选 A.

3. 下列调查方案中,抽样方法合适、样本具有代表性的是　(　B　)

A. 用一本书第 1 页的字数估计全书的字数

B. 为了调查某校学生对航天科技知识的了解程度,上学期间,在该校门口,每隔 2 分钟随机调查一位学生

C. 在省内选取一所城市中学,一所农村中学,向每个学生发一张卡片,上面印有一些名人的名字,要求每个学生只能在一个名字下面画"√",以了解全省中学生最崇拜的人物是谁

D. 为了调查我国小学生的健康状况,共抽取了 100 名小学生进行调查

【解析】A 中样本缺少代表性(第 1 页的字数一般较少);B 中抽样保证了随机性原则,样本具有代表性;对于 C,城市中学与农村中学的规模往往不同,学生崇拜的人物也未必在所列的名单之中,这些都会影响数据的代表性;D 中总体数量很大,而样本量太小,不足以体现总体特征. 故选 B.

互动课堂

合作探究

探究 1　获取数据的途径

【例 1】下列哪些数据一般是通过试验获取的　(　D　)

A. 2022 年长沙市的降雨量

B. 2022 年湖南省出生人口数量

C. 某学校高三年级同学的高考成绩

D. 某种特效中成药的配方

【解析】某种特效中成药的配方的数据只能通过试验获得. 故选 D.

点睛 选择获取数据的途径主要是根据所要研究问题的类型,以及获取数据的难易程度.有的数据可以有多种获取途径,有的数据只能通过一种途径获取,选择合适的方法和途径能够更好地提高数据的可靠性.

【变式训练1】要得到某乡镇的贫困人口数据,应采取的方法是 (A)

A. 通过调查获取数据　B. 通过试验获取数据

C. 通过观察获取数据　D. 通过查询获得数据

【解析】某乡镇的贫困人口数据属于有限总体问题,所以可以通过调查获取数据.

探究2 获取数据的方法及注意事项

【例2】某商场打算在开业一周年之际对顾客进行问卷调查(内容包括:职员的服务态度、商品的质量、商品的价格、商品的种类、售后服务、商场的环境等),以了解顾客的要求,进一步提高服务质量,促进商场的发展.请代拟一份调查问卷.

【解析】提示:问卷中应当涉及顾客关心且对商场发展有影响的问题,如职员的服务态度、商品的质量、售后服务等,这些重要的问题应放在问卷的最前面,较难回答的或涉及顾客个人因素、主观见解的问题则应放在后面.问卷内容除题中要求的几个方面外,还需包括被调查者的一些信息,以便必要时进一步了解情况.具体问卷略.

点睛 统计活动的注意事项.

在统计活动中,尤其是大型的统计活动,为避免一些外界因素的干扰,通常需要确定调查的对象、调查的方法与策略,并且精心设计前期的准备工作和收集数据的方法,然后对数据进行分析,得出统计推断.

【变式训练2】为了缓解城市的交通拥堵情况,某市准备出台限制私家车的政策,为此要进行民意调查.某个调查小组调查了一些拥有私家车的市民,你认为这样的调查结果能很好地反映该市市民的意愿吗?

【解析】(1)一个城市的交通状况的好坏将直接影响着生活在这个城市中的每个人,关系到每个人的利益.为了调查这个问题,在抽样时应当关注到各种人群,既要抽到拥有私家车的市民,也要抽到没有私家车的市民.

(2)调查时,如果只对拥有私家车的市民进行调查,结果一定是片面的,不能代表所有市民的意愿.因此,在调查时,要对生活在该城市的所有市民进行随机抽样调查,不要只关注到拥有私家车的市民.

随堂小练

1. 影响获取数据可靠程度的因素不包括 (D)

A. 获取方法的设计

B. 所用专业测量设备的精度

C. 调查人员的认真程度

D. 数据的大小

【解析】数据的大小不影响获取数据的可靠程度.故选D.

2. 研究下列问题:

①某城市元旦前后的气温;②某种新型电器元件使用寿命的测定;③电视台想知道某一个节目的收视率;④银行在收进储户现金时想知道有没有假钞.

一般通过试验获取数据的是 (C)

A. ①②　B. ③④　C. ②　D. ④

【解析】①通过观察获取数据,③④通过调查获取数据,只有②通过试验获取数据.故选C.

3. 下列调查所抽取的样本具有代表性的是 (D)

A. 利用某地七月份的日平均最高气温值估计该地全年的日平均最高气温

B. 在农村调查市民的平均寿命

C. 利用一块试验水稻田的产量估计水稻的实际产量

D. 为了了解一批洗衣粉的质量情况,从仓库中任意抽取100袋进行检验

【解析】A项中某地七月份的日平均最高气温值不能代表全年的日平均最高气温;B项中在农村调查得到的平均寿命不能代表市民的平均寿命;C项中试验水稻田的产量与水稻的实际产量相差可能较大,只有D项正确.

4. 某地气象台记录了本地6月份的日最高气温(如下表所示).

日最高气温/℃	20	22	24	25	26	28	29	30
天数	5	4	6	6	4	2	2	1

气象台获取数据的途径是<u>通过观察获取数据</u>,本地6月份的日最高气温的平均数约为<u>24.3</u>℃.

【解析】由题意可知气象台获取数据的途径是通过观察获取数据;本地6月份的日最高气温的平均数为

$$y=\frac{20\times5+22\times4+24\times6+25\times6+26\times4+28\times2+29\times2+30\times1}{30}\approx 24.3℃.$$

5. 为了调查本班同学对班级体育活动的意见,应该如何合理安排抽样才能提高样本的代表性?答:<u>按照男女生人数分层随机抽样</u>.

【解析】根据本班的实际情况可按照男女生人数分层随机抽样.

6. 学校兴趣小组要对本市某社区的居民睡眠时间进行研究,得到了以下10个数据(单位:h):

3.2,7.8,8.0,7.3,7.2,7.9,6.8,7.5,8.6,7.8.

去掉数据<u>3.2</u>能很好地提高样本数据的代表性.

【解析】因为数据3.2明显低于其他几个数据,是极端值,所以去掉这个数据,能够更好地提高样本数据的代表性.

温馨提示:请自主完成课后作业(三十八)

课后作业·单独成册

9.2　用样本估计总体

第 1 课时　总体取值规律的估计

学习目标	核心素养
1. 理解频率分布表、频率分布直方图、折线图、条形图、扇形图的作用并会识图.(重点) 2. 掌握不同的统计图在表示数据上的不同的特点.(重点、难点)	1. 加深对各种统计图的理解有利于培养直观想象素养. 2. 各种统计图的相关计算,有利于培养数学运算素养.

自主预习

情景导思

我国是世界上严重缺水的国家之一,城市缺水问题较为突出,某市政府为了节约生活用水,计划在本市试行居民生活用水阶梯式水价,即确定一个居民月用水量标准 a,用水量不超过 a 的部分按平价收费,超出 a 的部分按议价收费. 如果希望大部分居民的水费支出不受影响,那么标准 a 定为多少比较合理呢?你认为为了较为合理地确定出这个标准需要做哪些工作?

知新预学

1. 频率分布直方图的绘制步骤

(1)求极差. 极差即一组数据中的最大值与最小值的差.

(2)决定组距与组数. 组距与组数的确定没有固定的标准,一般数据的个数越多,所分组数越多. 当样本容量不超过 100 时,常分成 5~12 组. 为方便起见,一般取等长组距,并且组距应力求“取整”.

(3)将数据分组.

(4)列频率分布表. 计算各小组的频率,第 i 组的频率是$\dfrac{\text{第}i\text{组频数}}{\text{样本容量}}$.

(5)画频率分布直方图. 横轴表示分组,纵轴表示$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$. 这里,$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$实际上就是频率分布直方图中各小长方形的高度,它反映了各组样本观测数据的疏密程度.

2. 频率分布直方图的意义

各小长方形的面积表示相应各组的频率,频率分布直方图以面积的形式反映数据落在各个小组的频率的大小,各小长方形的面积的总和等于 __1__ . 即样本数据落在整个区间的频率为 __1__ .

3. 总体取值规律的估计

我们可以用样本观测数据的频率分布估计总体的取值规律.

4. 频率分布直方图的特征

当频率分布直方图的组数少、组距大时,容易从中看出数据整体的分布特点,但由于无法看出每组内的数据分布情况,损失了较多的原始数据信息;当频率分布直方图的组数多、组距小时,保留了较多的原始数据信息,但由于小长方形较多,有时图形会变得非常不规则,不容易从中看出总体数据的分布特点.

5. 各个统计图的特点

(1)不同的统计图在表示数据上有不同的特点. 如扇形图主要用于直观描述各类数据占总数的比例,条形图和直方图主要用于直观描述不同类别或分组数据的频数和频率,折线图主要用于描述数据随时间的变化趋势.

(2)不同的统计图适用的数据类型也不同. 如条形图适用于描述离散型数据,直方图适用于描述连续型数据.

小试牛刀

1. 某地 2022 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下:

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215 830	200 250	154 676	74 570	65 280
行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124 620	102 935	89 115	76 516	70 436

若用同一行业中应聘人数和招聘人数的比值的大小来衡量该行业的就业情况,则根据表中数据,就业形势一定是 (B)

A. 计算机行业好于化工行业

B. 建筑行业好于物流行业

C. 机械行业最紧张

D. 营销行业比贸易行业紧张

【解析】就业形势的好坏,主要看招聘人数与应聘人数的比值,比值越大,就业形势越好,故选 B.

2. 在一次模拟考试后,从高三某班随机抽取了 20 名学生的数学成绩,其分布如下:

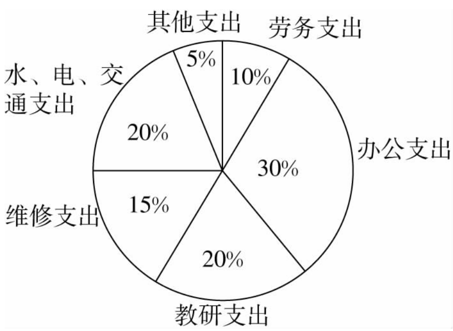
分组	[90,100)	[100,110)	[110,120)	[120,130)	[130,140)	[140,150]
频数	1	2	6	7	3	1

分数在 130 分以上(包括 130 分)者为优秀,据此估计该班的优秀率约为　(　B　)

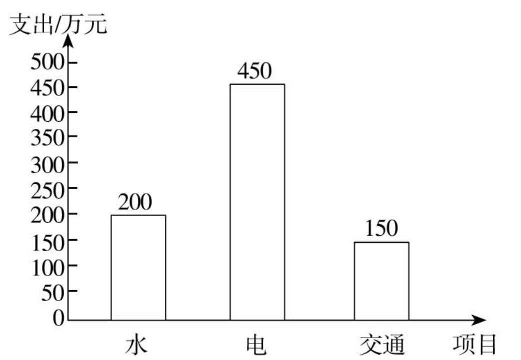
A. 10%　　B. 20%　　C. 30%　　D. 40%

【解析】由表可知优秀的人数为 $3+1=4$,则优秀率为:$\frac{4}{20}=20\%$,据此估计该班的优秀率约为 20%. 故选 B.

3. 某所学校在一个学期的费用支出分布如图①所示,在该学期的水、电、交通支出(单位:万元)如图②所示,则该学期的水、电支出占总支出的百分比为　(　B　)



图①

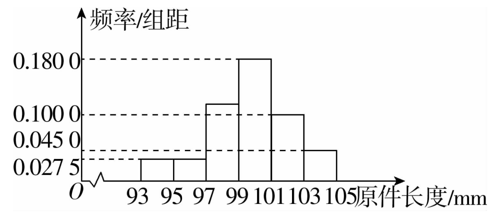


图②

A. 12.25%　　B. 16.25%　　C. 11.25%　　D. 9.25%

【解析】由图②知,水、电支出占水、电、交通支出的比例为 $\frac{200+450}{200+450+150}=\frac{13}{16}$,由图①知,水、电、交通支出占学校一个学期总开支的比例为 $\frac{1}{5}$,因此,该学期的水电费开支占总开支的百分比为 $\frac{13}{16}\times\frac{1}{5}=\frac{13}{80}=16.25\%$,故选 B.

4. 某工厂对一批元件进行抽样检测. 经检测,抽出的元件的长度(单位:mm)全部介于 93 至 105 之间. 将抽出的元件的长度以 2 为组距分成 6 组:[93,95),[95,97),[97,99),[99,101),[101,103),[103,105],得到如图所示的频率分布直方图. 若长度在[97,103)内的元件为合格品,根据频率分布直方图,估计这批元件的合格率是　(　A　)

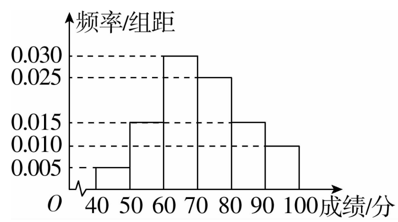


A. 80%　　B. 90%　　C. 20%　　D. 85.5%

【解析】由频率分布直方图可知元件长度在[97,103)内的频率为:$1-(0.0275+0.0275+0.0450)\times 2=0.8$,

故这批元件的合格率约为 80%. 故选 A.

5. 某校从高一年级学生中随机抽取部分学生,将他们的模块测试成绩分成 6 组:[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]加以统计,得到如图所示的频率分布直方图. 已知高一年级共有学生 600 名,据此估计,该模块测试成绩不少于 60 分的学生人数为　(　B　)



A. 588　　B. 480　　C. 450　　D. 120

【解析】根据频率分布直方图得,该模块测试成绩不少于 60 分的频率是 $1-(0.005+0.015)\times 10=0.8$. ∴对应的学生人数是 $600\times 0.8=480$. 故选 B.

互动课堂

合作探究

探究 1　频率分布直方图的绘制与应用

【例 1】某农技站为了考察某种麦穗长度的分布情况,在一块试验地里抽取了 100 个麦穗,量得长度如下(单位:cm):

6.5	6.4	6.7	5.8	5.9	5.9	5.2	4.0	5.4	4.6
5.8	5.5	6.0	6.5	5.1	6.5	5.3	5.9	5.5	5.8
6.2	5.4	5.0	5.0	6.8	6.0	5.0	5.7	6.0	5.5
6.8	6.0	6.3	5.5	5.0	6.3	5.2	6.0	7.0	6.4
6.4	5.8	5.9	5.7	6.8	6.6	6.0	6.4	5.7	7.4
6.0	5.4	6.5	6.0	6.8	5.8	6.3	6.0	6.3	5.6
5.3	6.4	5.7	6.7	6.2	5.6	6.0	6.7	6.7	6.0
5.8	5.3	7.0	6.0	6.0	5.6	6.2	6.1	5.3	6.2
6.8	6.6	4.7	5.7	5.7	5.9	5.4	6.0	5.2	6.0
6.3	5.7	6.8	6.1	4.5	5.6	6.3	6.0	5.8	6.3

根据上面的数据列出频率分布表、画出频率分布直方图,并用自己的语言描述一下这批麦穗长度的情况.

【解析】(1)计算极差:7.4−4.0=3.4(cm).

(2)决定组距与组数.

若取组距为 0.3,由于$\frac{3.4}{0.3}=11\frac{1}{3}$,需分成 12 组,组数合适.于是取定组距为 0.3,组数为 12.

(3)将数据分组.

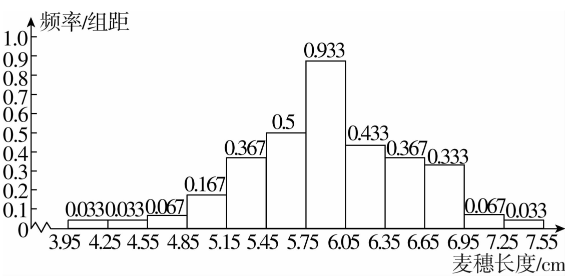
使分点比数据多一位小数,并且把第 1 小组的起点稍微减小一点.则所分的 12 个小组可以是[3.95,4.25),[4.25,4.55),[4.55,4.85),…,[7.25,7.55].

(4)列频率分布表.

对各个小组作频数累计,然后数频数,算频率,列频率分布表,如下表所示:

分组	频数累计	频数	频率
[3.95,4.25)	一	1	0.01
[4.25,4.55)	一	1	0.01
[4.55,4.85)	丅	2	0.02
[4.85,5.15)	正	5	0.05
[5.15,5.45)	正正一	11	0.11
[5.45,5.75)	正正正	15	0.15
[5.75,6.05)	正正正正正下	28	0.28
[6.05,6.35)	正正下	13	0.13
[6.35,6.65)	正正一	11	0.11
[6.65,6.95)	正正	10	0.10
[6.95,7.25)	丅	2	0.02
[7.25,7.55]	一	1	0.01
合计		100	1.00

(5)画频率分布直方图,如图.



从图中可以看出,绝大部分麦穗长度集中在[5.15,6.95),并且[5.75,6.05)占比最大.

点睛 1.在列频率分布表时,极差、组距、组数有如下关系:

(1)若$\frac{极差}{组距}$为整数,则$\frac{极差}{组距}$=组数;

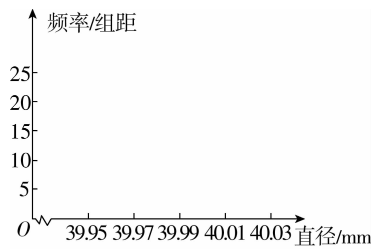
(2)若$\frac{极差}{组距}$不为整数,则$\frac{极差}{组距}$的整数部分+1=组数.

2.组距和组数的确定没有固定的标准,将数据分组时,组数力求合适,使数据的分布规律能较清楚地呈现出来,组数太多或太少,都会影响我们了解数据的分布情况,若样本容量不超过 100,按照数据的多少常分为 5~12 组,一般样本容量越大,所分组数越多.

【变式训练 1】某制造商 3 月份生产了一批乒乓球,随机抽样 100 个进行检查,测得每个球的直径(单位:mm),其频率分布表如下:

分组	频数	频率
[39.95,39.97)	10	
[39.97,39.99)	20	
[39.99,40.01)	50	
[40.01,40.03]	20	
合计	100	

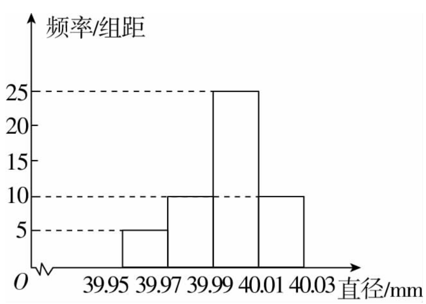
补充完成频率分布表(结果保留两位小数),并在下图中画出频率分布直方图.



【解析】频率分布表如下:

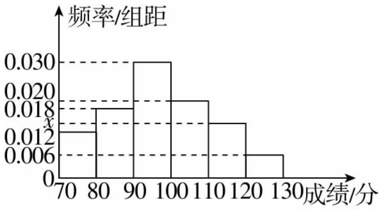
分组	频数	频率
[39.95,39.97)	10	0.10
[39.97,39.99)	20	0.20
[39.99,40.01)	50	0.50
[40.01,40.03]	20	0.20
合计	100	1.00

频率分布直方图如下:



探究 2 频率分布直方图中的相关计算问题

【例 2】在某次数学测验后,将参加考试的 500 名学生的数学成绩制成频率分布直方图(如图),则在该次测验中成绩不低于 100 分的学生人数是 (C)



A. 210　　B. 205　　C. 200　　D. 195

【解析】由频率分布直方图，得在该次测验中成绩不低于100分的学生的频率为 $1-(0.012+0.018+0.030)\times10=0.4$，∴在该次测验中成绩不低于100分的学生人数为 $500\times0.4=200$. 故选C.

点睛 频率分布直方图中的计算规律.

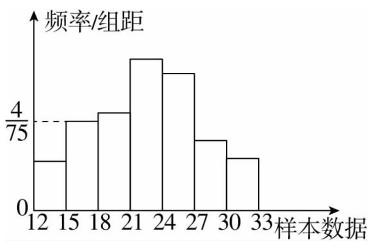
(1)因为小长方形的面积＝组距×$\frac{频率}{组距}$＝频率，所以各小长方形的面积表示相应各组的频率. 这样，频率分布直方图就以面积的形式反映了数据落在各个小组内的频率大小.

(2)在频率分布直方图中，各小长方形的面积之和等于1.

(3)$\frac{频数}{相应的频率}$＝样本量.

(4)在频率分布直方图中，各长方形的面积之比等于频率之比，各长方形的高度之比也等于频率之比.

【变式训练2】如图所示是由总体的一个样本绘制的频率分布直方图，且在[15,18)内的频数为8.



(1)求样本在[15,18)内的频率；

(2)求样本量；

(3)若在[12,15)内的小矩形面积为0.06，求在[18,33]内的频数.

【解析】由样本频率分布直方图可知组距为3.

(1)由样本频率分布直方图得样本在[15,18)内的频率等于 $\frac{4}{75}\times3=\frac{4}{25}$.

(2)样本在[15,18)内的频数为8，由(1)可知，样本量为 $\frac{8}{\frac{4}{25}}=8\times\frac{25}{4}=50$.

(3)因为在[12,15)内的小矩形面积为0.06，故样本在[12,15)内的频率为0.06，故样本在[15,33]内的频数为 $50\times(1-0.06)=47$. 又因为在[15,18)内的频数为8，故在[18,33]内的频数为 $47-8=39$.

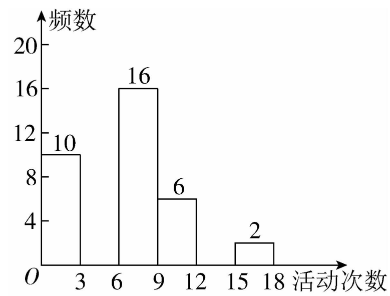
探究3 折线图、扇形图、条形图的识读

【例3】某校为了解全校学生上学期参加社区活动的情况，随机调查了本校50名学生参加社区活动的次数，并将调查所得的数据整理如下：

参加社区活动次数的频数、频率分布表

活动次数 x	频数	频率
$0<x\leqslant3$	10	0.20
$3<x\leqslant6$	a	0.24
$6<x\leqslant9$	16	0.32
$9<x\leqslant12$	6	0.12
$12<x\leqslant15$	m	b
$15<x\leqslant18$	2	n

参加社区活动次数的频数分布直方图



根据以上图表信息，解答下列问题：

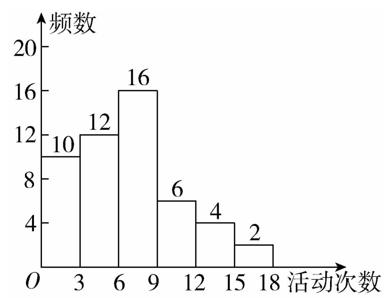
(1)表中的 $a=$__12__，$b=$__0.08__；

(2)请把频数分布直方图补充完整；(画图后请标注相应的数据)

(3)若该校共有1 200名学生，请估计该校在上学期参加社区活动超过6次的学生有多少人.

【解析】(1)$a=50\times0.24=12$，$b=\frac{4}{50}=0.08$.

(2)补图如下：



(3)$1\ 200\times(1-0.20-0.24)=672$(人).

点睛 各类统计图的特点.

(1)条形统计图反映各组数据的频数或频率；

(2)扇形统计图反映各组数据占总数的比例；

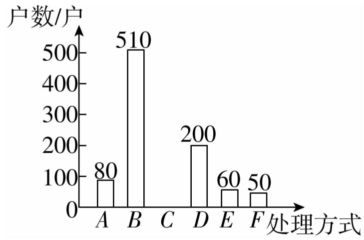
(3)折线统计图反映数据随时间的变化趋势.

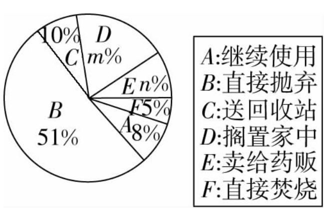
【变式训练 3】家庭过期药品属于危险废物,处理不当将污染环境,危害健康.某市药监部门为了解市民家庭处理过期药品的方式,决定对全市家庭进行一次简单随机抽样调查.

(1)下列选取样本的方法最合理的一种是__③__.

①在市中心某个居民区以家庭为单位随机抽取;②在全市医务工作者中以家庭为单位随机抽取;③在全市常住人口中以家庭为单位随机抽取.

(2)本次抽样调查发现,接受调查的家庭都有过期药品,现将有关数据呈现如图:





①$m=$__20__,$n=$__6__;

②补全条形统计图;

③根据调查数据,你认为该市市民家庭处理过期药品最常见的方式是什么?

④家庭过期药品的正确处理方式是送回收站,若该市有180万户家庭,请估计大约有多少户家庭处理过期药品的方式是送回收站.

【解析】(1)根据抽样调查时选取的样本需具有代表性,可知选取样本最合理的方法是③.

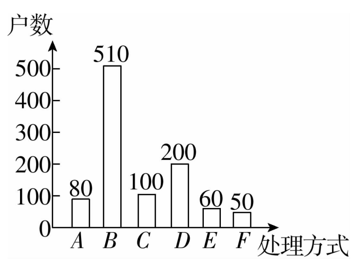
(2)①抽样调查的家庭总户数为 $80\div8\%=1\ 000$(户),

$m\%=\frac{200}{1\ 000}\times100\%=20\%$,$m=20$,

$n\%=\frac{60}{1\ 000}\times100\%=6\%$,$n=6$.

②C 类家庭户数为 $1\ 000-(80+510+200+60+50)=100$(户).

条形统计图补充如下:



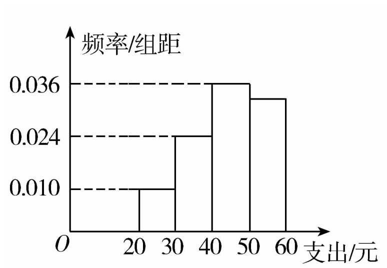
③根据调查数据,可知该市市民家庭处理过期药品最常见的方式是直接抛弃.

④$180\times10\%=18$(万户).

若该市有 180 万户家庭,估计大约有 18 万户家庭处理过期药品的方式是送回收站.

随堂小练

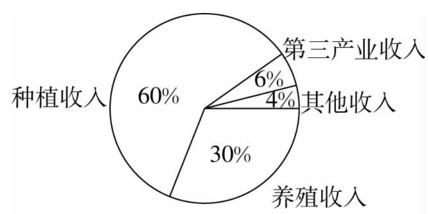
1. 学校为了调查学生在课外读物方面的支出情况,抽取了一个容量为 n 的样本,其频率分布直方图如图所示,其中支出在[50,60]的同学有 30 人,则 n 的值为 (A)



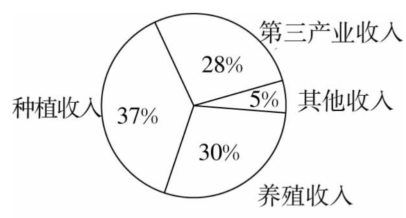
A. 100　　B. 1 000　　C. 90　　D. 900

【解析】由频率分布直方图可知,支出在[50,60]的同学的频率为 $0.03\times10=0.3$,$\therefore n=\frac{30}{0.3}=100$.故选 A.

2. **(多选题)**某地区经过一年的新农村建设,农村的经济收入增加了一倍.为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况,统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例,得到如下扇形统计图:



新农村建设前经济收入构成比例



新农村建设后经济收入构成比例

则下面结论中正确的是 (BCD)

A. 新农村建设后,种植收入减少

B. 新农村建设后,其他收入增加了一倍以上

C. 新农村建设后,养殖收入增加了一倍

D. 新农村建设后,养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

【解析】设新农村建设前的经济收入为 M,则新农村建设后

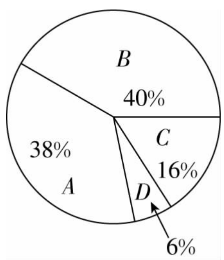
的经济收入为 $2M$,新农村建设前种植收入为 $0.6M$,而新农村建设后的种植收入为 $0.74M$,所以种植收入增加了,所以A 项不正确;

新农村建设前其他收入为 $0.04M$,新农村建设后其他收入为 $0.1M$,故增加了一倍以上,所以 B 项正确;

新农村建设前,养殖收入为 $0.3M$,新农村建设后为 $0.6M$,所以增加了一倍,所以 C 项正确;

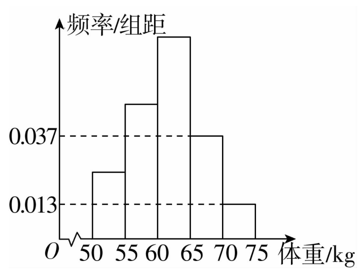
新农村建设后,养殖收入与第三产业收入的总合占经济收入的 $30\%+28\%=58\%>50\%$,所以超过了经济收入的一半,所以 D 正确.故选 BCD.

3.某校高一(1)班有 50 名学生,综合素质评价"体育与健康"方面的等级统计如图所示,则该班"体育与健康"评价等级为 A 的人数是 __19__.



【解析】该班"体育与健康"评价等级为 A 的人数是 $50\times38\%=19$.

4.为了解某校今年准备报考飞行员学生的体重情况,将所得的数据整理后,画出了频率分布直方图(如下图),已知图中从左到右的前 3 个小组的频率之比为 $1:2:3$,其中第 2 小组的频数为 12,则报考飞行员的总人数是 __48__.



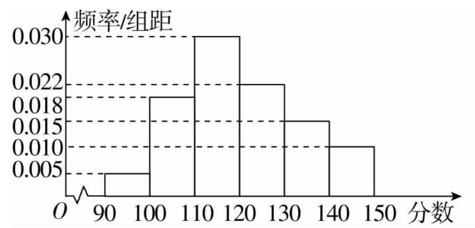
【解析】设图中从左到右的第 1 小组的频率为 x,则第 2 小组的频率为 $2x$,第 3 小组的频率为 $3x$,由频率分布直方图的性质得,

$x+2x+3x+0.037\times5+0.013\times5=1$,解得 $x=0.125$,

∴第 2 小组的频率为 $2x=0.25$,又第 2 小组的频数为 12,

∴报考飞行员的学生人数是 $12\div0.25=48$.

5.某校 100 名学生的数学测试成绩的频率分布直方图如图所示,分数不低于 a 即为优秀,若优秀的人数为 47,则 a 的值是 __120__.



【解析】由题意可知,分数在[90,100)的频率为 $0.005\times10=0.05$,频数为 5;

分数在[100,110)的频率为 $0.018\times10=0.18$,频数为 18;

分数在[110,120)的频率为 $0.03\times10=0.3$,频数为 30;

分数在[120,130)的频率为 $0.022\times10=0.22$,频数为 22;

分数在[130,140)的频率为 $0.015\times10=0.15$,频数为 15;

分数在[140,150]的频率为 $0.010\times10=0.1$,频数为 10;

而优秀的人数为 47 人,分数在[120,150]的有 47 人,

∴分数不低于 120 即为优秀.

温馨提示:请自主完成课后作业(三十九)

课后作业·单独成册

第 2 课时　总体百分位数的估计

学习目标	核心素养
1. 理解总体百分位数的统计含义.(重点) 2. 会求样本数据的第 p 百分位数.(重点、难点)	1. 理解百分位数的统计含义便于提高数学抽象素养. 2. 求样本数据的第 p 百分位数有利于提高数学运算素养.

自主预习

情景导思

某校举行数学竞赛,有 100 名学生参加,现在已知这 100 名学生的考试成绩,如果想要划定 5%的人为一等奖,那么该如何确定一等奖的分数线呢?

知新预学

1. 第 p 百分位数的定义

一般地,一组数据的第 p 百分位数是这样一个值,它使得这组数据中至少有 p%的数据小于或等于这个值,且至少有 $(100-p)$%的数据大于或等于这个值.

2. 计算第 p 百分位数的步骤

第 1 步,按从小到大排列原始数据.

第 2 步,计算 $i=n\times p\%$.

第 3 步,若 i 不是整数,而大于 i 的比邻整数为 j,则第 p 百分位数为第 j 项数据;若 i 是整数,则第 p 百分位数为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的平均数.

3. 四分位数

常用的分位数有第 25 百分位数、第 50 百分位数(中位数)、第 75 百分位数,这三个分位数把一组由小到大排列后的数据分成四等份,因此称为__四分位数__.其中第 25 百分位数也称为第一四分位数或下四分位数等,第 75 百分位数也称为第三四分位数或上四分位数等.

小试牛刀

1. 对于考试成绩的统计,如果你的成绩处在第 95 百分位数以上,以下说法正确的是　(　C　)

A. 你得了 95 分

B. 你答对了 95%的试题

C. 95%的参加考试者得到了和你一样或比你低的分数

D. 你的排名在第 95 名

【解析】第 95 百分位数是指把数据从小到大排序,至少有 95%的数据小于或等于这个值,至少有 5%的数据大于或等于这个值,故选 C.

2. 某校调查某班 30 名同学所穿的鞋的尺码数据如下表所示:

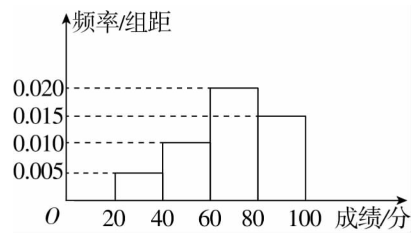
尺码	33	34	35	36	37
人数	7	6	14	1	2

则这组数据的 25%分位数是　(　B　)

A. 33　　B. 34　　C. 35　　D. 36

【解析】因为 $30\times25\%=7.5$,所以这组数据的 25%分位数为 34. 故选 B.

3. 某班的全体学生参加消防安全知识竞赛,成绩的频率分布直方图如图,数据的分组依次为:$[20,40)$,$[40,60)$,$[60,80)$,$[80,100]$. 估计本班学生的消防安全知识成绩的第 90 百分位数是　(　A　)



A. 93　　B. 80　　C. 90　　D. 95

【解析】由直方图得,从左到右的第一、二、三、四小组的频率分别是 0.10,0.20,0.40,0.30. 第一、二、三小组的频率之和为 $0.10+0.20+0.40=0.70<0.90$,所以第 90 百分位数处在第四组 $[80,100]$ 内,为 $80+20\times\frac{0.90-0.70}{0.30}\approx93$. 故选 A.

互动课堂

合作探究

探究 1　百分位数在具体数据中的应用

【例 1】 一个样本的数据为 3 310,3 355,3 450,3 480,3 490,3 520,3 540,3 550,3 650,3 730,3 925,求这组数据的第 50 百分位数和第 75 百分位数.

【解析】$\because 50\%\times11=5.5$,

$\therefore$ 第 50 百分位数是第 6 项的值 3 520.

$\because 75\%\times11=\frac{33}{4}=8.25$,

∴第 75 百分位数是第 9 项的值 3 650.

∴第 50 百分位数和第 75 百分位数分别为 3 520,3 650.

点睛 求样本数据的第 p 百分位数,一定要注意样本容量 n 与 $p\%$ 的乘积是否为整数,要区别对待.

【变式训练 1】 某中学高二(2)班甲、乙两名学生自进入高中以来,多次数学考试成绩情况如下:

甲:95,81,75,91,86,89,71,65,76,88,94,110,107;

乙:83,86,93,99,88,103,98,114,98,79,78,106,101.

分别计算出甲、乙两名学生的数学成绩的第 25,50 百分位数.

【解析】 把甲、乙两名学生的数学成绩从小到大排序,可得

甲:65,71,75,76,81,86,88,89,91,94,95,107,110;

乙:78,79,83,86,88,93,98,98,99,101,103,106,114.

由 $13\times25\%=3.25$,$13\times50\%=6.5$.

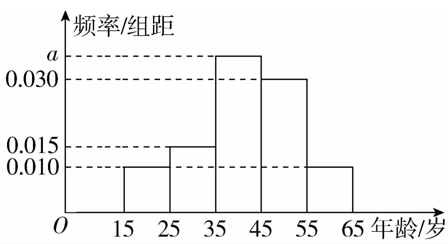
可得数据的第 25,50 百分位数为第 4,7 项数据,

即学生甲的第 25,50 百分位数为 76,88,

学生乙的第 25,50 百分位数为 86,98.

探究 2 百分位数在统计表或统计图中的应用

【例 2】 树立和践行"绿水青山就是金山银山,坚持人与自然和谐共生"的理念越来越深入人心,已形成了全民自觉参与,造福百姓的良性循环.据此,某网站推出了关于生态文明建设进展情况的调查,现从参与调查的人群中随机选出 20 人的样本,并将这 20 人按年龄分组:第 1 组[15,25),第 2 组[25,35),第 3 组[35,45),第 4 组[45,55),第 5 组[55,65],得到的频率分布直方图如图所示.



(1)求 a 的值;

(2)根据频率分布直方图,估计参与调查人群的样本数据的 50%分位数(保留两位小数).

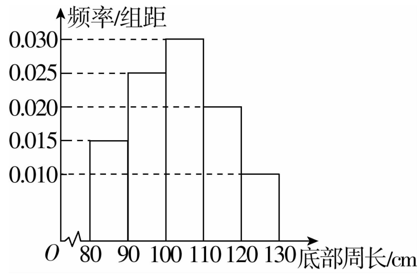
【解析】 (1)由频率分布直方图得,$(0.010+0.015+a+0.030+0.010)\times10=1$,解得 $a=0.035$.

(2)由频率分布直方图得,[15,35)的频率为 $(0.010+0.015)\times10=0.25$,[35,45)的频率为 $0.035\times10=0.35$,

∴估计参与调查人群的样本数据的 50%分位数为 $35+\dfrac{0.5-0.25}{0.35}\times10\approx42.14$.

点睛 在频率分布直方图中求第 p 百分位数的估计值,即求满足其左侧小矩形的面积和为 $p\%$ 的数.

【变式训练 2】 为了解一片经济林的生长情况,随机抽测了其中 60 株树木的底部周长(单位:cm),所得数据均在区间[80,130]上,其频率分布直方图如图所示,你能估计一下 60 株树木底部周长的第 50 百分位数和第 75 百分位数吗?



【解析】 由题意知,

在[80,90)上有 $60\times0.15=9$,

在[90,100)上有 $60\times0.25=15$,

在[100,110)上有 $60\times0.3=18$,

在[110,120)上有 $60\times0.2=12$,

在[120,130]上有 $60\times0.1=6$.

从以上数据可知,第 50 百分位数一定落在区间[100,110)上,

为 $100+10\times\dfrac{0.5-0.4}{0.3}=100+\dfrac{10}{3}\approx103.3$;

第 75 百分位数一定落在区间[110,120)上,

为 $110+10\times\dfrac{0.75-0.7}{0.2}=110+\dfrac{10}{4}=112.5$.

综上可知,估计第 50 百分位数和第 75 百分位数分别为 103.3 cm,112.5 cm.

随堂小练

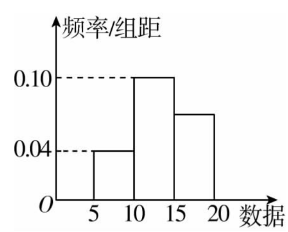
1. 已知一组数据:125,121,123,125,127,129,125,128,130,129,126,124,125,127,126.则这组数据的第 25 百分位数和第 80 百分位数分别是 (D)

A. 125,128　　B. 124,128

C. 125,129　　D. 125,128.5

【解析】 把这 15 个数据按从小到大排序,可得 121,123,124,125,125,125,125,126,126,127,127,128,129,129,130,由 $25\%\times15=3.75$,$80\%\times15=12$,可知这组数据的第 25 百分位数为第 4 项数据,即 125,第 80 百分位数为第 12 项与第 13 项数据的平均数,即 $\dfrac{1}{2}\times(128+129)=128.5$.故选 D.

2. 如图所示是一样本的频率分布直方图,样本数据共分为 3 组,分别是[5,10),[10,15),[15,20].



估计该样本数据的第 60 百分位数是 (A)

A. 14　　B. 15

C. 16　　D. 17

【解析】第 1 组[5,10)的频率为 $0.04\times(10-5)=0.20$；
第 2 组[10,15)的频率为 $0.10\times5=0.50$；
所以第 60 百分位数是 $10+5\times\frac{0.60-0.20}{0.50}=14$. 故选 A.

3. 从某校随机抽取 100 名学生，获得了他们一周课外阅读时间(单位：h)的数据，整理得到下列频率分布表.

分组	频数	频率
[0,2)	6	0.06
[2,4)	8	0.08
[4,6)	17	0.17
[6,8)	22	0.22
[8,10)	25	0.25
[10,12)	12	0.12
[12,14)	6	0.06
[14,16)	2	0.02
[16,18]	2	0.02
合计	100	1.00

估计本校学生的一周课外阅读时间的第 90 百分位数是 __12__.

【解析】因为前 6 组的频率之和为 0.90，所以第 90 百分位数为 12. 据此可以估计本校学生的一周课外阅读时间的第 90 百分位数约为 12.

4. 从某城市随机抽取 14 台自动售货机，对其销售额进行统计，数据如下：8，8，10，12，22，23，20，23，32，34，31，34，42，43. 则这 14 台自动售货机的销售额的第 50 百分位数是 __23__.

【解析】把这 14 台自动售货机的销售额按从小到大排序，得 8，8，10，12，20，22，23，23，31，32，34，34，42，43. 因为 $14\times50\%=7$，所以第 50 百分位数是第 7 项和第 8 项数据的平均数，即 $\frac{1}{2}\times(23+23)=23$.

温馨提示：请自主完成课后作业(四十)

课后作业 · 单独成册

第3课时　总体集中趋势的估计

学习目标	核心素养
1. 结合实例，能用样本的集中趋势估计总体的集中趋势（众数、中位数、平均数）.（重点） 2. 会求样本数据的众数、中位数、平均数.（重点） 3. 理解众数、中位数、平均数的统计含义.（难点）	1. 求样本数据的众数、中位数、平均数便于提高数学运算素养. 2. 求频率分布直方图中的众数、中位数、平均数有利于提高数据分析素养.

自主预习

情景导思

在初中我们学过众数、中位数和平均数的概念，它们都是描述一组数据的集中趋势的特征数，只是描述的角度不同，回忆它们的定义及特点，思考在频率分布直方图中怎样求这些值.

知新预学

1. 众数、中位数、平均数

(1)众数：一组数据中重复出现次数最多的数.

(2)中位数：把一组数据按从小到大的顺序排列，处在中间位置的数(或中间两个数的平均数).

(3)平均数：已知 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，那么 $\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 叫做这 n 个数的平均数.

2. 频率分布直方图中的众数、中位数、平均数

(1)在频率分布直方图中，<u>众数</u>是最高矩形中点的横坐标；

(2)<u>中位数</u>的左边和右边的直方图的面积应该相等；

(3)<u>平均数</u>的估计值等于频率分布直方图中每个小矩形的面积与小矩形底边中点的横坐标的乘积之和.

小试牛刀

1. 一组数据 12，13，x，17，18，19 的众数是 13，则这组数据的中位数是　　（ C ）

A. 13　　B. 14

C. 15　　D. 17

【解析】因为数据 12，13，x，17，18，19 的众数是 13，所以 $x=13$，则这组数据的中位数是 $\frac{13+17}{2}=15$，故选 C.

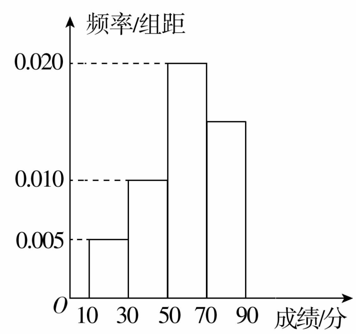
2. 某同学使用计算器求 30 个数据的平均数时，错将其中一个数据 105 输入成 15，那么由此求出的平均数与实际平均数的差是　　（ D ）

A. 3.5　　B. 3

C. -0.5　　D. -3

【解析】因为错将其中一个数据 105 输入成 15，所以此时求出的数与实际数的差是 $15-105=-90$，因此平均数之间的差是 $(-90)\div 30=-3$. 故选 D.

3. 下图是高二(20)班一次物理考试成绩的频率分布直方图，由此可以估计出这个班此次物理成绩的中位数是　　（ B ）



A. 58　　B. 60　　C. 62　　D. 50

【解析】在区间[10，30)中的频率为 $0.005\times 20=0.1$，

在区间[30，50)中的频率为 $0.010\times 20=0.2$，

在区间[50，70)中的频率为 $0.020\times 20=0.4$.

因为 $0.1+0.2=0.3<0.5$，$0.1+0.2+0.4=0.7>0.5$. 故中位数在[50，70)内，设为 x.

则 $0.3+(x-50)\times 0.020=0.5$，解得 $x=60$.

故选 B.

互动课堂

合作探究

探究 1　平均数、中位数、众数在具体数据中的应用

【例 1】某小区广场上有甲、乙两群市民正在做游戏，两群市民的年龄如下(单位：岁)：

甲群：13，13，14，15，15，15，15，16，17，17；

乙群：54，3，4，4，5，5，6，6，6，57.

(1)甲群市民年龄的平均数、中位数和众数各是多少岁？其中哪个统计量能较好地反映甲群市民的年龄特征？

(2)乙群市民年龄的平均数、中位数和众数各是多少岁？其中哪个统计量能较好地反映乙群市民的年龄特征？

【解析】(1)甲群市民年龄的平均数为

$\frac{13+13+14+15+15+15+15+16+17+17}{10}=15$(岁)，

中位数为 15 岁，众数为 15 岁. 故平均数、中位数和众数相等，因此它们都能较好地反映甲群市民的年龄特征.

(2)乙群市民年龄的平均数为

$\frac{54+3+4+4+5+5+6+6+6+57}{10}=15$(岁),

中位数为 5.5 岁,众数为 6 岁.

由于乙群市民大多数是儿童,所以中位数和众数能较好地反映乙群市民的年龄特征,而平均数的可靠性较差.

点睛 众数、中位数、平均数的意义.

(1)样本的众数、中位数和平均数常用来表示样本数据的"中心值",其中众数和中位数容易计算,不受少数几个极端值的影响,但只能表达样本数据中的少量信息,平均数代表了数据更多的信息,但受样本中每个数据的影响,越极端的数据对平均数的影响也越大.

(2)当一组数据中有不少数据重复出现时,其众数往往更能反映问题,当一组数据中个别数据较大时,可用中位数描述其集中趋势.

【变式训练 1】某校在一次考试中,甲、乙两班学生的数学成绩统计如下表:

成绩/分	50	60	70	80	90	100
甲班人数	1	6	12	11	15	5
乙班人数	3	5	15	3	13	11

请根据所学知识,分别从平均数、众数、中位数等不同角度来评估这两个班的成绩.

【解析】甲班平均数 79.6 分,乙班平均数 80.2 分,从平均分看成绩较好的是乙班;

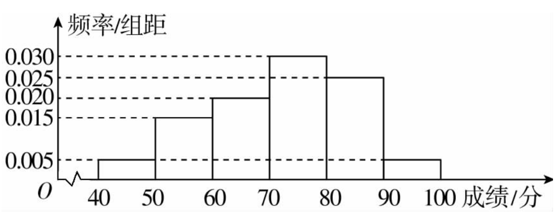
甲班众数为 90 分,乙班众数为 70 分,从众数看成绩较好的是甲班;

按从高到低(或从低到高)的顺序排列之后,甲班的第 25 个和第 26 个数据都是 80,所以中位数是 80 分,同理乙班中位数也是 80 分,但是甲班成绩在中位数以上(含中位数)的学生有 31 人,占全班学生的 62%,同理乙班有 27 人,占全班学生的 54%,所以从中位数看成绩较好的是甲班.

如果记 90 分以上(含 90 分)为优秀,甲班有 20 人,优秀率为 40%,乙班有 24 人,优秀率为 48%,从优秀率来看成绩较好的是乙班.可见,一个班学生成绩的评估方法很多,需视要求而定.如果不考虑优秀率的话,显然以中位数去评估比较合适.

探究 2 在频率分布直方图中求平均数、中位数、众数

【例 2】某校从参加高二年级学业水平测试的学生中抽出 80 名学生,其数学成绩(均为整数)的频率分布直方图如图所示.



(1)估计这次测试数学成绩的众数;

(2)估计这次测试数学成绩的中位数(结果保留一位小数);

(3)估计这次测试数学成绩的平均数.

【解析】(1)由图知众数为$\frac{70+80}{2}=75$.

(2)设中位数为 x,由图知,前三个矩形面积之和为 0.4,第四个矩形面积为 0.3,$0.3+0.4>0.5$,因此中位数位于第四个矩形内,得 $0.1=0.03(x-70)$,所以 $x\approx73.3$.

(3)由图知这次数学成绩的平均分为:

$\frac{40+50}{2}\times0.005\times10+\frac{50+60}{2}\times0.015\times10+\frac{60+70}{2}\times0.02\times10+\frac{70+80}{2}\times0.03\times10+\frac{80+90}{2}\times0.025\times10+\frac{90+100}{2}\times0.005\times10=72$.

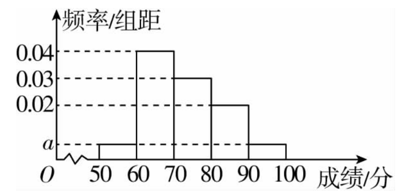
点睛 在频率分布直方图中求平均数、中位数、众数.

(1)众数:在频率分布直方图中,最高矩形的底边中点的横坐标.

(2)中位数:在频率分布直方图中,把频率分布直方图划分为左右两个面积相等的部分的分界线与 x 轴交点的横坐标.

(3)平均数:平均数在频率分布直方图中等于每个小矩形底边中点的横坐标与小矩形的面积的乘积之和.

【变式训练 2】某校 100 名学生期中考试语文成绩的频率分布直方图如图所示,其中成绩分组区间分别是[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100].



(1)求图中 a 的值;

(2)根据频率分布直方图,估计这 100 名学生语文成绩的平均数、众数和中位数.(要求写出计算过程,结果为小数的保留一位小数)

【解析】(1)由频率分布直方图中所有小矩形面积之和为 1,得 $10\times(2a+0.02+0.03+0.04)=1$,解得 $a=0.005$.

(2)这 100 名学生语文成绩的平均数为 $55\times0.05+65\times0.4+75\times0.3+85\times0.2+95\times0.05=73$,

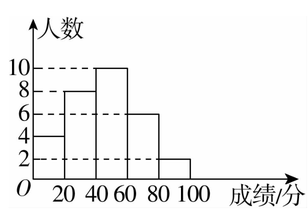
众数为$\frac{60+70}{2}=65$.

∵这 100 名学生语文成绩在[50,70)内的频率为 $(0.005+0.04)\times10=0.45$,这 100 名学生语文成绩在[70,80)内的频率为 $0.03\times10=0.3$,

∴这 100 名学生语文成绩的中位数为 $70+10\times\frac{0.5-0.45}{0.3}\approx71.7$.

随堂小练

1. 如图是一次考试成绩的统计图,根据该图可估计,这次考试的平均分为 (A)



A. 46　　B. 36

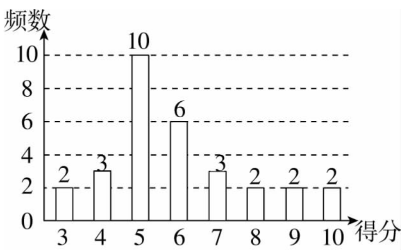
C. 56　　D. 60

【解析】根据题中统计图，可估计有 4 人成绩在$[0,20)$内，其考试分数之和为 $4\times10=40$；有 8 人成绩在$[20,40)$内，其考试分数之和为 $8\times30=240$；有 10 人成绩在$[40,60)$内，其考试分数之和为 $10\times50=500$；有 6 人成绩在$[60,80)$内，其考试分数之和为 $6\times70=420$；有 2 人成绩在$[80,100]$内，其考试分数之和为 $2\times90=180$. 由此可知，考生总人数为 $4+8+10+6+2=30$，考试总成绩为 $40+240+500+420+180=1\ 380$，平均数为$\frac{1\ 380}{30}=46$.

2. 一组数据 12，13，17，18，x，19 的众数是 18，则这组数据的中位数是__17.5__.

【解析】因为数据 12，13，17，18，x，19 的众数是 18，所以 $x=18$，则这组数据的中位数是$\frac{17+18}{2}=17.5$.

3. 为了普及环保知识，增强环保意识，某高中随机抽取 30 名学生参加环保知识测试，得分(十分制)如图所示. 假设得分的中位数为 m，众数为 n，平均数为 $\overline{x}$，则这三个数的大小关系为__$n<m<\overline{x}$__.



【解析】由图可得 $n=5$，$m=5.5$，$\overline{x}>5.5\Rightarrow n<m<\overline{x}$.

4. 为调查甲、乙两校高三年级学生某次联考数学成绩情况，现用简单随机抽样从这两个学校高三年级学生中各抽取 30 名，以他们的数学成绩(百分制)作为样本，样本数据如下：

甲：	47	52	53	53	55	60	60	61	63	65
	63	64	65	65	70	70	71	71	72	72
	76	76	78	82	84	84	85	87	90	92
乙：	45	53	55	58	60	60	60	61	61	62
	62	63	63	65	70	70	72	72	72	73
	73	76	76	79	81	81	85	85	88	90

设甲、乙两校高三年级学生这次联考的数学平均成绩分别为 $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$，估计 $\overline{x}_1-\overline{x}_2$ 的值.

【解析】用样本估计总体，甲、乙两校高三年级学生这次联考的数学平均成绩分别为 $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$，由题中数据可知：

$\overline{x}_1=\frac{1}{30}\times(47+52+53+\cdots+87+90+92)=\frac{2\ 086}{30}$，

$\overline{x}_2=\frac{1}{30}\times(45+53+55+\cdots+85+88+90)=\frac{2\ 071}{30}$，

$\therefore \overline{x}_1-\overline{x}_2=\frac{2\ 086-2\ 071}{30}=\frac{15}{30}=0.5$，

$\therefore$ 估计 $\overline{x}_1-\overline{x}_2$ 的值为 0.5.

温馨提示：请自主完成课后作业(四十一)

课后作业 · 单独成册

第 4 课时　总体离散程度的估计

学习目标	核心素养
1. 结合实例,能用样本的离散程度估计总体的离散程度(标准差、方差、极差).(重点) 2. 理解标准差、方差、极差的统计含义.(重点、难点)	1. 方差、标准差有关概念的理解与计算可以提高数学抽象与数学运算素养. 2. 用样本平均数和样本标准差估计总体,培养数据分析素养.

自主预习

情景导思

上节课我们学习了众数、中位数和平均数,它们从不同角度刻画了一组数据的集中趋势,但是仅根据数据的集中趋势,有时我们会对总体作出片面判断,那么什么数据可以刻画一组数据的离散程度呢?

知新预学

1. 方差和标准差

假设一组数据为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,用 $\overline{x}$ 表示这组数据的平均数,则 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 称为这组数据的方差.

$\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ 称为这组数据的标准差.

2. 总体方差和总体标准差

如果总体中所有个体的变量值分别为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_N$,总体平均数为 $\overline{Y}$,则称 $S^2=\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2$ 为总体方差,$S=\sqrt{S^2}$ 为总体标准差.

3. 样本方差和样本标准差

如果一个样本中个体的变量值分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,样本平均数为 $\overline{y}$,则称 $s^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$ 为样本方差,$s=\sqrt{s^2}$ 为样本标准差.

4. 数据离散程度的刻画

(1)极差在一定程度上刻画了数据的离散程度.

(2)标准差刻画了数据的离散程度或波动幅度,标准差越大,数据的离散程度__越大__;标准差越小,数据的离散程度__越小__.在刻画数据的分散程度上,方差和标准差是一样的.但在解决实际问题中,一般多采用标准差.

小试牛刀

1. 在某次测量中得到的 A 样本数据如下:22,23,25,26,31,30;若 B 样本数据恰好是 A 样本中每个数据都减去 10 后所得的数据,则 A,B 两个样本的下列数字特征相同的是 (　A　)

A. 方差　　B. 平均数
C. 众数　　D. 中位数

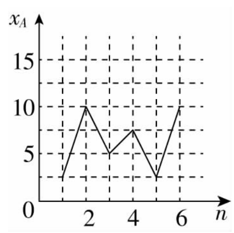
【解析】方差反映一组数据的波动大小,将一组数据中的每个数据都加上或减去同一个常数后,方差恒不变.故选 A.

2. 某射击手在一次训练中五次射击的成绩分别为 9.4,9.4,9.4,9.6,9.7,则该射击手五次射击的成绩的方差是 (　B　)

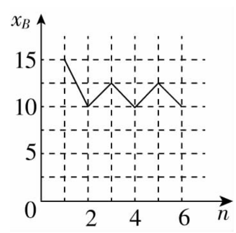
A. 0.127　　B. 0.016
C. 0.08　　D. 0.216

【解析】由已知得,$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(9.4+9.4+9.4+9.6+9.7)=9.5$,所以 $s^2=\frac{1}{5}\times[(9.4-9.5)^2+(9.4-9.5)^2+(9.4-9.5)^2+(9.6-9.5)^2+(9.7-9.5)^2]=0.016$,故选 B.

3. 如图,样本 A 和 B 分别取自两个不同的总体,它们的样本平均数分别为 $\overline{x}_A$ 和 $\overline{x}_B$,样本标准差分别为 s_A 和 s_B,则 (　B　)



A



B

A. $\overline{x}_A>\overline{x}_B,s_A>s_B$　　B. $\overline{x}_A<\overline{x}_B,s_A>s_B$
C. $\overline{x}_A>\overline{x}_B,s_A<s_B$　　D. $\overline{x}_A<\overline{x}_B,s_A<s_B$

【解析】∵样本 A 的数据均不大于 10,
而样本 B 的数据均不小于 10,∴$\overline{x}_A<\overline{x}_B$,
由图可知 A 中数据波动程度较大,B 中数据较稳定,
∴$s_A>s_B$.故选 B.

互动课堂

合作探究

探究 1　样本方差和样本标准差的计算

【例 1】从甲、乙两种玉米苗中各抽 10 株,分别测得它们的株高(单位:cm)如下:

甲:25,41,40,37,22,14,19,39,21,42;

乙:27,16,44,27,44,16,40,40,16,40.

试计算甲、乙两组数据的方差和标准差(保留到小数点后三位).

【解析】$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(25+41+40+37+22+14+19+39+21+42)=30$,

$s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[(25-30)^2+(41-30)^2+\cdots+(42-30)^2]=104.2$,

$s_{甲}=\sqrt{104.2}\approx10.208$.

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(27+16+44+27+44+16+40+40+16+40)=31$,

同理 $s_{乙}^2=128.8$,$s_{乙}=\sqrt{128.8}\approx11.349$.

点睛 计算样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差有两种方法:

(1)$s^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$;

(2)$s^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2$.

【变式训练 1】(1)若一组样本数据 9,8,x,10,11 的平均数为 10,则该组样本数据的方差为 <u>2</u>.

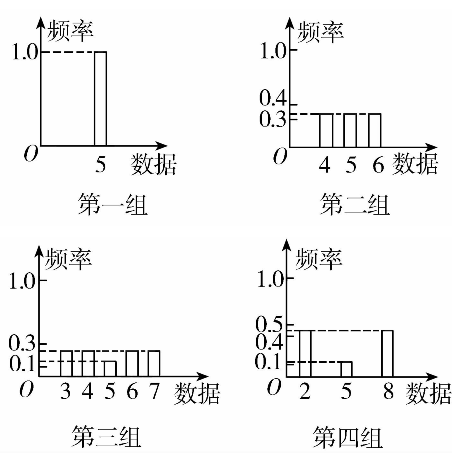
(2)已知一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$,且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=180$,平均数 $\overline{x}=4$,则该组样本数据的方差为 <u>2</u>.

【解析】(1)$\frac{9+8+x+10+11}{5}=10$,故 $x=12$,所以方差 $s^2=\frac{1}{5}\times(81+64+144+100+121)-100=2$.

(2)$s^2=\frac{1}{10}\times(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-\overline{x}^2=\frac{1}{10}\times180-16=2$.

探究 2 方差与标准差的图形分析

【例 2】样本量为 9 的四组数据,每组数的平均数都是 5,条形图如下图,则标准差最大的一组是 (D)



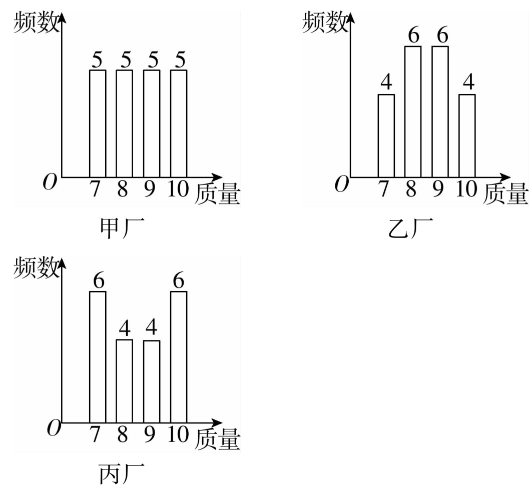
A. 第一组　　B. 第二组

C. 第三组　　D. 第四组

【解析】由所给的几个选项观察数据的波动情况,得到方差之间的大小关系,A 的 9 个数据都是 5,方差为 0,B 和 C 数据分布比较均匀,前者的方差较小,后者的方差较大,D 数据主要分布在 2 和 8 处,距离平均数是最远的一组,所以最后一个条形图对应的数据的方差最大,则标准差最大,故选 D.

点睛 由图形分析标准差、方差的大小:本例中,从四个图形可以直观看出第一组数据没有波动性,第二、三组的波动性都比较小,而第四组数据波动性相对较大,利用标准差的意义可以直观得到答案.

【变式训练 2】对甲、乙、丙三厂所生产的袋装食品各抽检了 20 袋,称得质量如下面条形图所示.



s_1,s_2,s_3 分别表示甲厂、乙厂、丙厂这次抽检质量的标准差,则有 (C)

A. $s_2>s_1>s_3$　　B. $s_1>s_3>s_2$

C. $s_3>s_1>s_2$　　D. $s_3>s_2>s_1$

【解析】由题得甲厂的平均数 $\overline{x}_1=\frac{1}{20}\times(5\times7+5\times8+5\times9+5\times10)=8.5$,

方差 $s_1^2=\frac{1}{20}\times[5\times(7-8.5)^2+5\times(8-8.5)^2+5\times(9-8.5)^2+5\times(10-8.5)^2]=1.25$,

标准差 $s_1=\sqrt{1.25}$;

乙厂的平均数 $\overline{x}_2=\frac{1}{20}\times(4\times7+6\times8+6\times9+4\times10)=8.5$,

方差 $s_2^2=\frac{1}{20}\times[4\times(7-8.5)^2+6\times(8-8.5)^2+6\times(9-8.5)^2+4\times(10-8.5)^2]=1.05$,

标准差 $s_2=\sqrt{1.05}$;

丙厂的平均数 $\overline{x}_3=\frac{1}{20}\times(6\times7+4\times8+4\times9+6\times10)=8.5$,

方差 $s_3^2=\frac{1}{20}\times[6\times(7-8.5)^2+4\times(8-8.5)^2+4\times(9-8.5)^2+6\times(10-8.5)^2]=1.45$,

标准差 $s_3=\sqrt{1.45}$.

所以 $s_3>s_1>s_2$.

故选 C.

探究 3 具体问题中的数据分析

【例 3】在一次科技知识竞赛中，某学校的两组学生的成绩如下表：

成绩/分	50	60	70	80	90	100
甲组人数	2	5	10	13	14	6
乙组人数	4	4	16	2	12	12

请根据你所学过的统计知识，判断这两个组在这次竞赛中的成绩谁优谁劣，并说明理由.

【解析】(1)甲组成绩的众数为 90，乙组成绩的众数为 70，从成绩的众数比较看，甲组成绩好些.

(2)$\overline{x}_甲=\dfrac{1}{2+5+10+13+14+6}\times(50\times2+60\times5+70\times10+80\times13+90\times14+100\times6)=\dfrac{1}{50}\times4\ 000=80$,

$\overline{x}_乙=\dfrac{1}{4+4+16+2+12+12}\times(50\times4+60\times4+70\times16+80\times2+90\times12+100\times12)=\dfrac{1}{50}\times4\ 000=80$.

$s_甲^2=\dfrac{1}{2+5+10+13+14+6}\times[2\times(50-80)^2+5\times(60-80)^2+10\times(70-80)^2+13\times(80-80)^2+14\times(90-80)^2+6\times(100-80)^2]=172$,

$s_乙^2=\dfrac{1}{4+4+16+2+12+12}\times[4\times(50-80)^2+4\times(60-80)^2+16\times(70-80)^2+2\times(80-80)^2+12\times(90-80)^2+12\times(100-80)^2]=256$.

$\because\overline{x}_甲=\overline{x}_乙$，$s_甲^2<s_乙^2$，$\therefore$甲组成绩较乙组成绩稳定，故甲组好些.

(3)甲、乙两组成绩的中位数、平均数都是 80 分. 其中，甲组成绩在 80 分以上(包括 80 分)的有 33 人，乙组成绩在 80 分以上(包括 80 分)的有 26 人. 从这一角度看，甲组的成绩较好.

(4)从成绩统计表看，甲组成绩大于等于 90 分的有 20 人，乙组成绩大于等于 90 分的有 24 人，所以乙组成绩集中在高分段的人数多. 同时，乙组得 100 分的人数比甲组得 100 分的人数多 6 人. 从这一角度看，乙组的成绩较好.

点睛 准备使用中位数、众数、平均数、标准差等数据对具体问题进行分析是解题的关键.

【变式训练 3】对甲、乙两名自行车比赛选手在相同条件下进行了 6 次测试，测得他们的最大速度(单位：m/s)的数据如下：

甲	27	38	30	37	35	31
乙	33	29	38	34	28	36

分别求出甲、乙两名自行车比赛选手最大速度数据的平均数、极差、方差，并判断选谁参加比赛比较合适？

【解析】$\overline{x}_甲=\dfrac{27+38+30+37+35+31}{6}=33$,

$\overline{x}_乙=\dfrac{33+29+38+34+28+36}{6}=33$,

$s_甲^2=\dfrac{1}{6}\times[(27-33)^2+(38-33)^2+(30-33)^2+(37-33)^2+(35-33)^2+(31-33)^2]\approx15.67$,

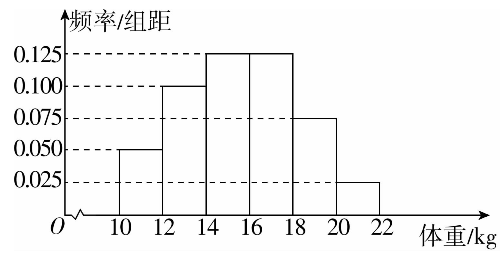
$s_乙^2=\dfrac{1}{6}\times[(33-33)^2+(29-33)^2+(38-33)^2+(34-33)^2+(28-33)^2+(36-33)^2]\approx12.67$,

甲的极差为 11，乙的极差为 10.

由甲、乙平均数相等，乙的方差较小，知选乙参加比赛比较合适.

随堂小练

1. 某宠物商店对 30 只宠物狗的体重(单位：kg)进行了测量，并根据所得数据画出了频率分布直方图，如下图所示，则这 30 只宠物狗体重的平均值大约为 (B)



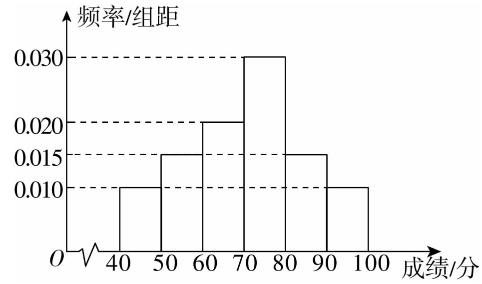
A. 15.5　　B. 15.6　　C. 15.7　　D. 16

【解析】由频率分布直方图可以计算出各组频率分别为：0.1，0.2，0.25，0.25，0.15，0.05. 频数为：3，6，7.5，7.5，4.5，1.5. 则平均值为：

$\dfrac{11\times3+13\times6+15\times7.5+17\times7.5+19\times4.5+21\times1.5}{30}=15.6$.

故选 B.

2. 在某次高中学科竞赛中，4 000 名考生的参赛成绩统计数据如图所示，60 分以下视为不及格，若同一组中的数据用该组区间中点值为代表，则下列说法中错误的是 (D)



A. 成绩在[70，80)内的考生人数最多

B. 不及格的考生人数为 1 000

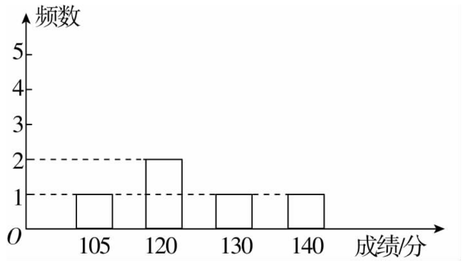
C. 考生竞赛成绩的平均分约为 70.5

D. 考生竞赛成绩的中位数为 75

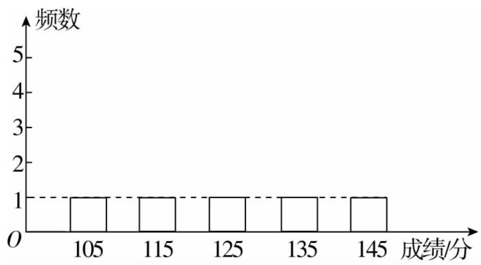
【解析】由频率分布直方图可得，成绩在[70，80)内的频率最高，这个分数区间考生人数最多，故 A 正确；由频率分布直

方图可得，成绩在[40,60)内的频率为 0.25，因此，不及格的人数为 4 000×0.25=1 000，故 B 正确；由频率分布直方图可得，平均分为 45×0.1+55×0.15+65×0.2+75×0.3+85×0.15+95×0.1=70.5，故 C 正确；因为成绩在[40,70)内的频率为 0.45，在[70,80)内的频率为 0.3，所以中位数为 $70+10\times\frac{0.05}{0.3}\approx71.67$，D 错误. 故选 D.

3. 下面是甲、乙两位同学高三上学期的 5 次联考的数学成绩，已知两位同学从第 1 次到第 5 次的成绩条形图(从左至右依次为第 1 至第 5 次)如下，则从图中可以读出的一定正确的信息是　　(D)



甲同学



乙同学

A. 甲同学成绩的平均数大于乙同学成绩的平均数
B. 甲同学成绩的方差大于乙同学成绩的方差
C. 甲同学成绩的极差大于乙同学成绩的极差
D. 甲同学成绩的中位数小于乙同学成绩的中位数

【解析】对于 A，甲同学成绩的平均数 $\overline{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(105+120\times2+130+140)=123$，

乙同学成绩的平均数 $\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(105+115+125+135+145)=125$，故 A 错误；

甲同学成绩的方差 $s_{甲}^2=\frac{18^2+3^2+3^2+7^2+17^2}{5}=136$，

乙同学成绩的方差 $s_{乙}^2=\frac{20^2+10^2+0+10^2+20^2}{5}=200$.

明显甲同学成绩的方差小于乙同学成绩的方差. 故 B 错.
对于 C，由图知，甲同学成绩的极差为 35，乙同学成绩的极差为 40，所以甲同学成绩的极差小于乙同学成绩的极差，故 C 错误；
对于 D，甲同学成绩的中位数为 120，乙同学成绩的中位数为 125，所以甲同学成绩的中位数小于乙同学成绩的中位数，故 D 正确.

4. 已知样本 9，10，11，x，y 的平均数是 10，标准差是$\sqrt{2}$，则 $xy=$ _96_.

【解析】由已知得，$9+10+11+x+y=50$，所以 $x+y=20$，
又 $1+1+(x-10)^2+(y-10)^2=10$，
即 $x^2+y^2-20(x+y)=-192$，
$(x+y)^2-2xy-20(x+y)=-192$，
所以 $xy=96$.

5. 抽样统计甲、乙两位射击运动员的 5 次训练成绩(单位：环)，结果如下：

运动员	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

(1)计算甲、乙两位射击运动员成绩的平均数和方差；
(2)比较两个人的成绩，分析谁的成绩较稳定.

【解析】(1)$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(87+91+90+89+93)=90$，

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(89+90+91+88+92)=90$.

则 $s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(87-90)^2+(91-90)^2+(90-90)^2+(89-90)^2+(93-90)^2]=4$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}\times[(89-90)^2+(90-90)^2+(91-90)^2+(88-90)^2+(92-90)^2]=2$.

(2)$\because s_{乙}^2<s_{甲}^2$，
$\therefore$乙的成绩更稳定.

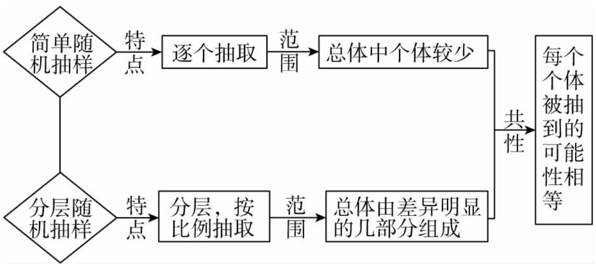
温馨提示：请自主完成课后作业(四十二)
课后作业·单独成册

三、知能拓展

统计复习

核心梳理

1. 简单随机抽样与分层随机抽样



2. 分层随机抽样是当总体由差异明显的几部分组成时采用的抽样方法，进行分层随机抽样时应注意以下几点：

(1)分层随机抽样中分多少层、如何分层要视具体情况而定，总的原则是，层内样本的差异要小，各层之间的样本差异要大，且互不重叠.

(2)为了保证每个个体等可能入样，所有层应采用同一分配比例等可能抽样.

(3)在每层抽样时，一般采用简单随机抽样方法进行抽样.

3. 绘制频率分布直方图应注意的问题

数据要合理分组，组距要选取恰当，尽量取整，数据为30～100个左右时，应分成5～12组，在频率分布直方图中，各个小长方形的面积等于各组的频率，小长方形的高与频数成正比，各组频数之和等于样本容量，频率之和为1.

4. 频率分布直方图的性质

(1)因为小矩形的面积$=$组距$\times\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}=$频率，所以各小矩形的面积表示相应各组的频率. 这样，频率分布直方图就以面积的形式反映了数据落在各个小组内的频率大小.

(2)在频率分布直方图中，各小矩形的面积之和等于1.

(3)样本容量$=\dfrac{\text{频数}}{\text{相应的频率}}$.

5. 折线统计图的读图方法

(1)读折线统计图时，首先要看清楚直角坐标系中横、纵坐标表示的意义，其次要明确图中的数量及其单位.

(2)在折线统计图中，从折线的上升、下降可分析统计数量的增减变化情况，从陡峭程度上，可分析数据间相对增长、下降的幅度.

6. 计算一组n个数据的第p百分位数的一般步骤

(1)排列：按照从小到大排列原始数据.

(2)计算i：计算$i=n\times p\%$.

(3)定数：若i不是整数，大于i的最小整数为j，则第p百分位数为第j项数据；若i是整数，则第p百分位数为第i项与第$(i+1)$项数据的平均数.

7. 根据频率分布直方图计算样本数据的百分位数，首先要理解频率分布直方图中各组数据频率的计算，其次估计百分位数在哪一组，再应用方程的思想方法，设出百分位数，解方程可得.

8. 求样本数据的中位数和众数时，把数据按照从小到大的顺序排列后，按照相应求法进行.

9. 利用样本数字特征进行决策时的两个关注点

(1)平均数与每一个数据都有关，可以反映更多的总体信息，但受极端值的影响大；中位数是样本数据所占频率的等分线，不受几个极端值的影响；众数只能体现数据的最大集中点，无法客观反映总体特征.

(2)平均数大于中位数时，说明数据中存在许多较大的极端值.

10. 标准差、方差的意义

(1)标准差、方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小. 标准差、方差越大，数据的离散程度越大；标准差、方差越小，数据的离散程度越小，标准差的大小不会超过极差.

(2)标准差、方差的取值范围是$[0,+\infty)$. 标准差、方差为0时，样本各数据相等，说明数据没有波动幅度，数据没有离散性.

11. 数据分析的探究点

(1)要正确处理此类问题，首先要抓住问题中的关键词语，全方位地进行必要的计算、分析，而不能习惯性地仅从样本方差的大小去决定哪一组的成绩好，实际问题还得从实际的角度去分析；其次要在恰当地评估后，组织好正确的语言作出结论.

(2)在进行数据分析时，因为标准不同，所以不存在对和错的问题，也不存在唯一解的问题，而是根据需要来选择“好”的决策，至于决策的好坏，是根据提出的标准而定的.

重难突破

要点1 随机抽样方法的应用

【例1】某政府机关有在编人员100人，其中副处级以上干部10人，一般干部70人，干事20人，上级机关为了了解机关人员对政府机构的改革意见，要从中抽取一个容量为20的样本，试确定用何种方法抽取，如何抽取？

【解析】用分层随机抽样抽取.

$\because 20:100=1:5$，$\therefore \dfrac{10}{5}=2$，$\dfrac{70}{5}=14$，$\dfrac{20}{5}=4$，

即从副处级以上干部中抽取2人，一般干部中抽取14人，干事中抽取4人.

副处级以上干部与干事人数都较少，他们分别按 1～10 编号和 1～20 编号，然后采用抽签法分别抽取 2 人和 4 人，对一般干部采用 00，01，…，69 编号，然后用随机数法抽取 14 人.

点睛 1. 判断抽样方法是否为分层随机抽样，主要是依据分层随机抽样的特点：

(1)适用于总体由差异明显的几部分组成的情况.

(2)能更充分地反映总体的情况.

(3)等可能抽样，每个个体被抽到的可能性都相等.

2. 分层随机抽样又称为"按比例抽样"，这里所说的"按比例"是指：

(1)$\dfrac{\text{总体中第 } m \text{ 层的个体数}}{\text{总体中第 } n \text{ 层的个体数}}=\dfrac{\text{样本中第 } m \text{ 层的个体数}}{\text{样本中第 } n \text{ 层的个体数}}$；

(2)$\dfrac{\text{样本中第 } n \text{ 层的个体数}}{\text{总体中第 } n \text{ 层的个体数}}=\dfrac{\text{样本容量}}{\text{总体容量}}$.

【变式训练 1】某高中共有 900 人，其中高一年级 300 人，高二年级 200 人，高三年级 400 人. 现采用分层随机抽样抽取容量为 45 的样本，那么高一、高二、高三各年级抽取的人数分别为 (D)

A. 15，5，25　　B. 15，15，15

C. 10，5，30　　D. 15，10，20

【解析】因为 300∶200∶400＝3∶2∶4，于是将 45 分成 3∶2∶4 的三部分. 设三部分抽取的个体数分别为 $3x$，$2x$，$4x$，由 $3x+2x+4x=45$，得 $x=5$，故高一、高二、高三各年级抽取的人数分别为 15，10，20，故选 D.

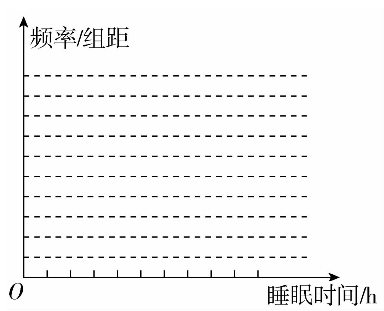
要点 2 频率分布直方图

【例 2】从某校高一年级随机抽取 n 名学生，获得了他们日平均睡眠时间(单位：h)的数据，整理得到数据分组及频率分布表：

分组	频数	频率
[5，6)	2	0.04
[6，7)		0.20
[7，8)	a	
[8，9)	b	
[9，10]		0.16

(1)求 n 的值；

(2)若 $a=10$，补全表中数据，并绘制频率分布直方图.



【解析】(1)∵小组[5，6)内的频数是 2，对应的频率是 0.04，∴样本容量为 $n=\dfrac{2}{0.04}=50$.

(2)小组[6，7)内的频数为 $50\times0.20=10$，

小组[7，8)内的频率为 $\dfrac{10}{50}=0.20$，

小组[9，10]内的频数为 $50\times0.16=8$，

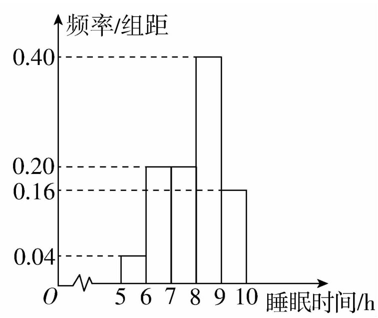
小组[8，9)内的频数为 $50-2-10-10-8=20$，

频率为 $\dfrac{20}{50}=0.40$，

由此补全数据如下表：

分组	频数	频率
[5，6)	2	0.04
[6，7)	10	0.20
[7，8)	10	0.20
[8，9)	20	0.40
[9，10]	8	0.16

绘制频率分布直方图如下：



点睛 画频率分布直方图的步骤.

(1)求极差：极差是一组数据中最大值与最小值的差.

(2)决定组距与组数：当样本容量不超过 100 时，常分成 5～12 组，为了方便起见，一般取等长组距，并且组距应力求"取整".

(3)将数据分组.

(4)列频率分布表：一般分四列(分组、频数累计、频数、频率)，其中频数合计应是样本容量，频率合计是 1.

(5)画频率分布直方图：横轴表示分组，纵轴表示$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$. 小长方形的面积＝组距×$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$＝频率. 各小长方形的面积和等于 1.

【变式训练 2】某花木公司为了调查某种树苗的生长情况，抽取了一个容量为 100 的样本，测得树苗的高度(单位：cm)数据的分组及相应频数如下：

[107，109)，3 株；[109，111)，9 株；[111，113)，13 株；

[113，115)，16 株；[115，117)，26 株；[117，119)，20 株；

[119，121)，7 株；[121，123)，4 株；[123，125]，2 株.

(1)列出频率分布表；

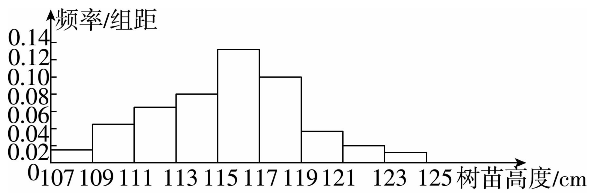
(2)画出频率分布直方图；

(3)据上述图表,估计数据在[109,121)内的可能性是百分之几.

【解析】(1)频率分布表如下:

分组	频数	频率	累积频率
[107,109)	3	0.03	0.03
[109,111)	9	0.09	0.12
[111,113)	13	0.13	0.25
[113,115)	16	0.16	0.41
[115,117)	26	0.26	0.67
[117,119)	20	0.20	0.87
[119,121)	7	0.07	0.94
[121,123)	4	0.04	0.98
[123,125]	2	0.02	1.00
合计	100	1.00	

(2)频率分布直方图如下:



(3)由上述图表可知,数据落在[109,121)内的频率为0.94−0.03=0.91,即数据落在[109,121)内的可能性是91%.

要点3 第 p 百分位数的计算

【例3】从某珍珠公司生产的产品中,任意抽取12颗珍珠,得到它们的质量(单位:g)如下:

7.9,9.0,8.9,8.6,8.4,8.5,8.5,8.5,9.9,7.8,8.3,8.0.

(1)分别求出这组数据的第25,75,95百分位数;

(2)请你找出珍珠质量较小的前15%的珍珠质量;

(3)若用第25,50,95百分位数把公司生产的珍珠划分为次品、合格品、优等品和特优品,依照这个样本的数据,给出该公司珍珠等级的划分标准.

【解析】(1)将所有数据从小到大排列,得

7.8,7.9,8.0,8.3,8.4,8.5,8.5,8.5,8.6,8.9,9.0,9.9,

因为共有12个数据,所以12×25%=3,12×75%=9,12×95%=11.4,

则第25百分位数是$\frac{8.0+8.3}{2}=8.15$,

第75百分位数是$\frac{8.6+8.9}{2}=8.75$,

第95百分位数是第12个数据,为9.9.

(2)因为共有12个数据,所以12×15%=1.8,则第15百分位数是第2个数据,即为7.9.

产品质量较小的前15%的产品有2个,它们的质量分别为7.8 g,7.9 g.

(3)由(1)可知样本数据的第25百分位数是8.15 g,第50百分位数为8.5 g,第95百分位数是9.9 g,所以质量小于或等于8.15 g的珍珠为次品,质量大于8.15 g且小于或等于8.5 g的珍珠为合格品,质量大于8.5 g且小于等于9.9 g的珍珠为优等品,质量大于9.9 g的珍珠为特优品.

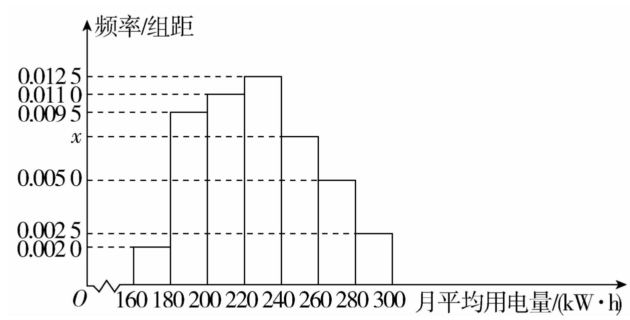
点睛 计算一组 n 个数据的第 p 百分位数的步骤:

第1步,按从小到大排列原始数据.

第2步,计算 $i=n\times p\%$.

第3步,若 i 不是整数,而大于 i 的比邻整数为 j,则第 p 百分位数为第 j 项数据;若 i 是整数,则第 p 百分位数为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的平均数.

【变式训练3】某城市100户居民的月平均用电量(单位:kW·h)以[160,180),[180,200),[200,220),[220,240),[240,260),[260,280),[280,300]分组的频率分布直方图如下:



(1)求直方图中 x 的值;

(2)试估计该城市用电量的80%分位数(保留两位小数);

(3)根据(2)的结果说明如何对用电量进行阶梯定价.

【解析】(1)$x=[1-(0.002+0.009\ 5+0.011+0.012\ 5+0.005+0.002\ 5)\times20]\div20=0.007\ 5$.

(2)由直方图可知,月平均用电量在240 kW·h以下的居民用户所占的比例为(0.002+0.009 5+0.011+0.012 5)×20×100%=70%,

在260 kW·h以下的有70%+0.007 5×20×100%=85%,

因此80%分位数一定位于[240,260)内,

则$240+\frac{0.8-0.7}{0.85-0.7}\times20\approx253.33$(kW·h),

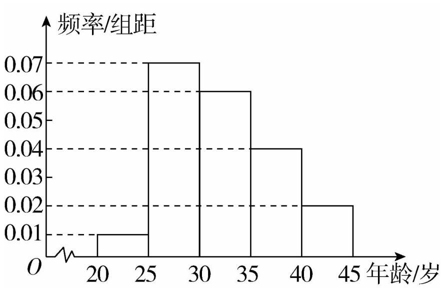
即80%分位数大约为253.33 kW·h.

(3)根据(2)的结果可知,月用电量超过253.33 kW·h的只有大约20%,为了使大多数居民生活不受影响,可把月用电量超过253 kW·h的用电量部分定为议价电,提高电价,而把月用电量在253 kW·h以内的定为平价电.

要点4 估计总体的数字特征

【例4】"一带一路"是"丝绸之路经济带"和"21世纪海上丝绸之路"的简称,某市为了了解人们对"一带一路"的认知程度,对不同年龄和不同职业的人举办了一次"一带一路"知识竞赛,

满分 100 分(90 分及以上为认知程度高),现从参赛者中抽取了 x 人,按年龄分成 5 组(第一组:[20,25),第二组:[25,30),第三组:[30,35),第四组:[35,40),第五组:[40,45]),得到如图所示的频率分布直方图,已知第一组有 6 人.



(1)求 x 的值.

(2)求抽取的 x 人的年龄的中位数(结果保留整数).

(3)从该市大学生、军人、医务人员、工人、个体户五种人中用分层抽样的方法依次抽取 6 人,42 人,36 人,24 人,12 人,分别记为 1~5 组,从这 5 个按年龄分的组和 5 个按职业分的组中每组各选派 1 人参加知识竞赛代表相应的成绩,年龄组中 1~5 组的成绩分别为 93,96,97,94,90,职业组中 1~5 组的成绩分别为 93,98,94,95,90.

①分别求 5 个年龄组和 5 个职业组成绩的平均数和方差;

②以上述数据为依据,评价 5 个年龄组和 5 个职业组对"一带一路"的认知程度,并谈谈你的感想.

【解析】(1)根据频率分布直方图得第一组频率为 $0.01\times5=0.05$,

$\therefore \dfrac{6}{x}=0.05$,$\therefore x=120$,

(2)设中位数为 a,则 $0.01\times5+0.07\times5+(a-30)\times0.06=0.5$,

解得 $a=\dfrac{95}{3}\approx32$.

$\therefore$中位数为 32.

(3)①5 个年龄组的平均数为 $\bar{x}_1=\dfrac{1}{5}\times(93+96+97+94+90)=94$,

方差为 $S_1^2=\dfrac{1}{5}\times[(-1)^2+2^2+3^2+0^2+(-4)^2]=6$,

5 个职业组的平均数为 $\bar{x}_2=\dfrac{1}{5}\times(93+98+94+95+90)=94$,

方差为 $S_2^2=\dfrac{1}{5}\times[(-1)^2+4^2+0^2+1^2+(-4)^2]=6.8$.

②评价:从平均数来看两组的认知程度相同,从方差来看年龄组的认知程度更好.

感想:"一带一路"是指"丝绸之路经济带"和"21 世纪海上丝绸之路"的简称,它将充分依靠中国与有关国家既有的双多边机制,借助既有的、行之有效的区域合作平台."一带一路"目标是要建立一个政治互信、经济融合、文化包容的利益共同体、命运共同体和责任共同体.(结合本题和实际,符合社会主义核心价值观即可)

点睛 众数、中位数、平均数与频率分布直方图的关系.

(1)平均数:在频率分布直方图中,样本平均数可以用每个小矩形底边中点的横坐标与小矩形的面积的乘积之和近似代替.

(2)中位数:在频率分布直方图中,中位数左边和右边的直方图的面积应该相等.

(3)众数:众数是最高小矩形底边的中点的横坐标所对应的数据.

【变式训练 4】甲、乙两机床同时加工直径为 100 cm 的零件,为检验质量,从中各抽取 6 件测量,数据如下:

甲:99　100　98　100　100　103

乙:99　100　102　99　100　100

(1)分别计算两组数据的平均数及方差;

(2)根据计算结果判断哪台机床加工零件的质量更稳定.

【解析】(1)$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{6}\times(99+100+98+100+100+103)=100$,

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{6}\times(99+100+102+99+100+100)=100$.

$s_{甲}^2=\dfrac{1}{6}\times[(99-100)^2+(100-100)^2+(98-100)^2+(100-100)^2+(100-100)^2+(103-100)^2]=\dfrac{7}{3}$,

$s_{乙}^2=\dfrac{1}{6}\times[(99-100)^2+(100-100)^2+(102-100)^2+(99-100)^2+(100-100)^2+(100-100)^2]=1$.

(2)因为两台机床所加工零件的直径的平均值相同,且 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$,所以乙机床加工零件的质量更稳定.

要点 5　分层随机抽样的方差

【例 5】甲、乙两支田径队队员体重(单位:kg)的数据为:甲队队员体重的平均数为 60,方差为 200;乙队队员体重的平均数为 70,方差为 300. 又已知甲、乙两队的队员人数之比为 1∶4,那么甲、乙两队全部队员体重的平均数和方差分别是多少?

【解析】由题意可知 $\bar{x}_{甲}=60$,甲队队员在所有队员中所占权重为 $\dfrac{1}{1+4}=\dfrac{1}{5}$,

$\bar{x}_{乙}=70$,乙队队员在所有队员中所占权重为 $\dfrac{4}{1+4}=\dfrac{4}{5}$,

则甲、乙两队全部队员体重的平均数为 $\bar{x}=\dfrac{1}{5}\times60+\dfrac{4}{5}\times70=68$,

甲、乙两队全部队员的体重的方差为 $s^2=\dfrac{1}{5}\times[200+(60-68)^2]+\dfrac{4}{5}\times[300+(70-68)^2]=296$.

点睛 分层随机抽样的方差:设样本容量为 n,平均数为 $\bar{x}$,其中两层的个体数量分别为 n_1,n_2,两层的平均数分别为 $\bar{x}_1$,$\bar{x}_2$,方差分别为 s_1^2,s_2^2,则这个样本的方差为 $s^2=\dfrac{n_1}{n}[s_1^2+$

$(\overline{x}_1-\overline{x})^2]+\frac{n_2}{n}[s_2^2+(\overline{x}_2-\overline{x})^2]$.

【变式训练 5】某校拟派一名跳高运动员参加一项校际比赛,对甲、乙两名跳高运动员进行了 8 次选拔比赛,他们的成绩(单位:m)如下:

甲:1.70,1.65,1.68,1.69,1.72,1.73,1.68,1.67;

乙:1.60,1.73,1.72,1.61,1.62,1.71,1.70,1.75.

经预测,跳 1.65 m 就可获得冠军,该校为了获取冠军,可能选哪位选手参赛?若预测跳 1.70 m 方可获得冠军呢?

【解析】甲的平均成绩和方差如下:

$\overline{x}_甲=\frac{1}{8}\times(1.70+1.65+1.68+1.69+1.72+1.73+1.68+1.67)=1.69$,

$s_甲^2=\frac{1}{8}\times[(1.70-1.69)^2+(1.65-1.69)^2+\cdots+(1.67-1.69)^2]=0.000\ 6$.

乙的平均成绩和方差如下:

$\overline{x}_乙=\frac{1}{8}\times(1.60+1.73+1.72+1.61+1.62+1.71+1.70+1.75)=1.68$,

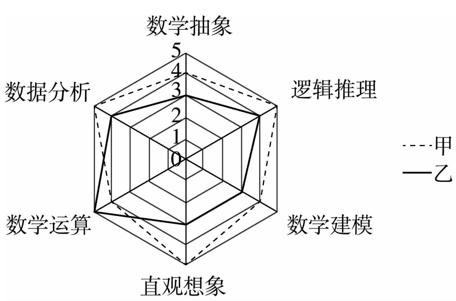
$s_乙^2=\frac{1}{8}\times[(1.60-1.68)^2+(1.73-1.68)^2+\cdots+(1.75-1.68)^2]=0.003\ 15$.

显然,甲的平均成绩高于乙的平均成绩,而且甲的方差小于乙的方差,说明甲的成绩比乙稳定.由于甲的平均成绩高于乙,且成绩稳定,所以若跳高 1.65 m 就很可能获得冠军,应派甲参赛.

在这 8 次选拔赛中乙有 5 次成绩在 1.70 m 以上,虽然乙的平均成绩不如甲,成绩的稳定性也不如甲,但成绩突破 1.70 m 的可能性大于甲,所以若跳高 1.70 m 方可获得冠军,应派乙参赛.

拓展提升

1. 为比较甲、乙两名高二学生的数学素养,对课程标准中规定的数学六大素养进行指标测验(指标值满分为 5 分,分值高者为优),根据测验情况绘制了如图所示的六大素养指标雷达图,则下列叙述正确的是 (C)



A. 乙的数据分析素养优于甲

B. 乙的数学建模素养优于数学抽象素养

C. 甲的六大素养整体水平优于乙

D. 甲的六大素养中数据分析最差

【解析】根据雷达图得到如下数据:

	数学抽象	逻辑推理	数学建模	直观想象	数学运算	数据分析
甲	4	5	4	5	4	5
乙	3	4	3	3	5	4

由上表数据可知选 C.

2. 某中学共有 360 名教师,其中一线教师 280 名,行政人员 55 名,后勤人员 25 名.拟采取分层随机抽样抽取一个容量为 72 的样本,则一线教师应该抽取的人数为 (A)

A. 56　　B. 28　　C. 11　　D. 5

【解析】一线教师所占的比例为 $\frac{280}{360}=\frac{7}{9}$,故应抽取的一线教师人数为 $72\times\frac{7}{9}=56$,故选 A.

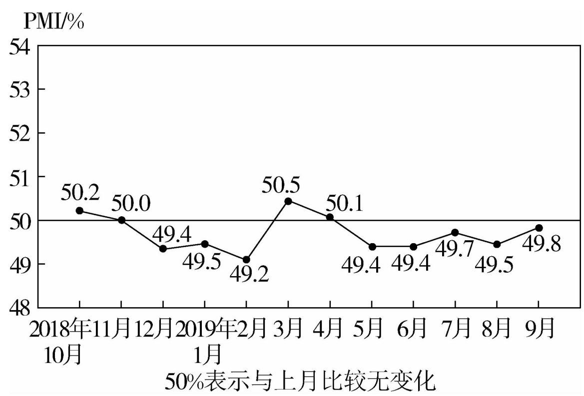
3. 以下数据为参加数学竞赛决赛的 15 人的成绩(单位:分):78,70,72,86,88,79,80,81,94,84,56,98,83,90,91.则这 15 人成绩的第 80 百分位数是 (D)

A. 90　　B. 91.5　　C. 91　　D. 90.5

【解析】将该组数据从小到大排列为 56,70,72,78,79,80,81,83,84,86,88,90,91,94,98.

且 $15\times80\%=12$,所以这 15 人成绩的第 80 百分位数是 $\frac{1}{2}\times(90+91)=90.5$.故选 D.

4. 国家统计局服务业调查中心和中国物流与采购联合会发布的 2018 年 10 月份至 2019 年 9 月份共 12 个月的中国制造业采购经理指数(PMI)如下图所示.则下列结论中错误的是 (D)



A. 12 个月的 PMI 的标准差不大于 1.3

B. 12 个月的 PMI 的平均值低于 50%

C. 12 个月的 PMI 的众数为 49.4%

D. 12 个月的 PMI 的中位数为 50.3%

【解析】从图中数据变化看,PMI 值的平均数为 49.725,12 个月的 PMI 值的平方和为 29 672.65,求得标准差约为 0.145,所以 A 正确;由图可以看出,PMI 值的平均值低于 50%,所以 B 正确;12 个月的 PMI 值的众数为 49.4%,所以 C 正确;12 个月的 PMI 值的中位数为 49.6%,所以 D 错误.故选 D.

5. 为了了解刀鱼数量，对刀鱼进行有效保护，某科研机构从长江中捕捉 a 条刀鱼，标记后放回，过了一段时间，再从同地点捕捉 b 条，发现其中有 c 条带有标记，据此估计长江中刀鱼的数量为 （ D ）

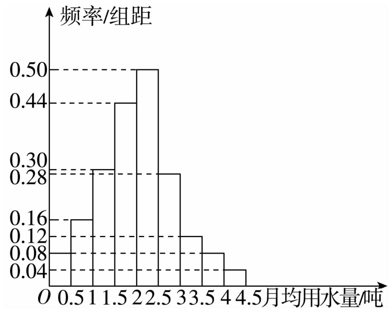
A. $\frac{ac}{b}$　　B. $a+b-c$　　C. $\frac{bc}{a}$　　D. $\frac{ab}{c}$

【解析】设长江中刀鱼的数量为 x 条，根据随机抽样的等可能性，得 $\frac{a}{x}=\frac{c}{b}$，解得 $x=\frac{ab}{c}$. 故选 D.

6. 某工厂生产甲、乙、丙、丁四种不同型号的产品，产量分别为 200，400，300，100 件. 为检验产品的质量，现用分层随机抽样的方法从以上所有的产品中抽取 60 件进行检验，则应从丙种型号的产品中抽取__18__件.

【解析】设应从丙种型号的产品中抽取 n 件，
产品总数为 $200+400+300+100=1\ 000$ 件.
则 $\frac{60}{1\ 000}=\frac{n}{300}$，解得 $n=18$.

7. 为了解某市居民用水情况，通过抽样，获得了 100 位居民某年的月均用水量（单位：吨），将该数据按照 $[0,0.5)$，$[0.5,1)$，…，$[4,4.5]$ 分成 9 组，绘制了如图所示的频率分布直方图. 政府要试行居民用水阶梯式水价制度，制定了一个用水量标准 a，使 85% 的居民用水量不超过 a（假设 a 为整数），按平价收水费，超出 a 的部分按议价收费，则 a 的最小值为__3__吨.



【解析】$[0,0.5)$ 内的频数为 $0.08\times0.5\times100=4$，
$[0.5,1)$ 内的频数为 $0.16\times0.5\times100=8$，
$[1,1.5)$ 内的频数为 $0.3\times0.5\times100=15$，
$[1.5,2)$ 内的频数为 $0.44\times0.5\times100=22$，
$[2,2.5)$ 内的频数为 $0.5\times0.5\times100=25$，
$[2.5,3)$ 内的频数为 $0.28\times0.5\times100=14$，
$[3,3.5)$ 内的频数为 $0.12\times0.5\times100=6$，
$[3.5,4)$ 内的频数为 $0.08\times0.5\times100=4$，
$[4,4.5]$ 内的频数为 $0.04\times0.5\times100=2$，
$\because 4+8+15+22+25+14=88$，
$\therefore$ 前 6 组占 88%，a 的最小值为 3.

温馨提示：请自主完成课后作业（四十三）
课后作业·单独成册

第十章 概率

一、课标导向

课标要求

1. 随机事件与概率

(1)结合具体实例,理解样本点和有限样本空间的含义,理解随机事件与样本点的关系.了解随机事件的并、交与互斥的含义,能结合实例进行随机事件的并、交运算.

(2)结合具体实例,理解古典概型,能计算古典概型中简单随机事件的概率.

(3)通过实例,理解概率的性质,掌握随机事件概率的运算法则.

(4)结合实例,会用频率估计概率.

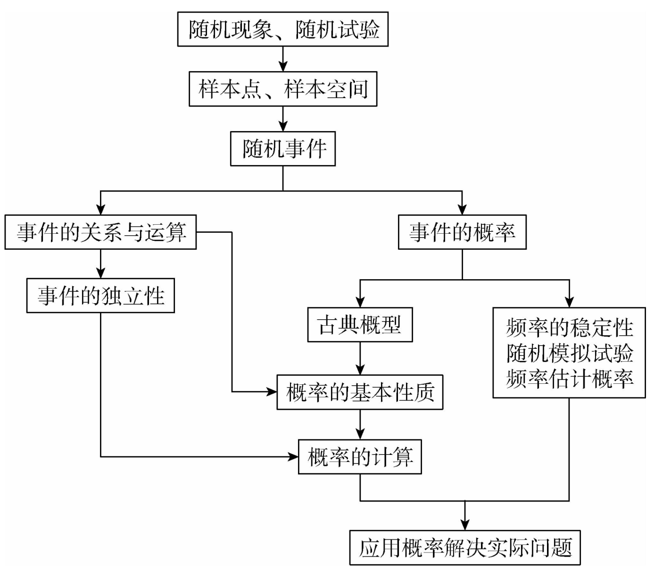
2. 随机事件的独立性

结合有限样本空间,了解两个随机事件独立性的含义.结合古典概型,利用独立性计算概率.

学习建议

1. 理解样本点、有限样本空间、随机事件的概念,掌握三种事件的判断方法.
2. 理解事件的包含、并事件、交事件的概念,并能掌握简单的事件关系运算.理解并能判断事件的互斥与对立.
3. 理解古典概型的特征,学会判断古典概型,会计算古典概型中简单随机事件的概率.
4. 掌握概率的基本性质,能够利用概率的加法公式解决问题.
5. 了解两个随机事件相互独立的含义,了解频率和概率的区别与联系,会利用它们求解一些简单的概率问题.

知识网络



二、精讲精练

10.1 随机事件与概率

第 1 课时 有限样本空间与随机事件

学习目标	核心素养
1. 掌握样本空间及样本点的概念，会写出某些随机试验的样本点与样本空间.(重点) 2. 理解随机事件的概念，会判断随机事件的类型.(重点)	通过对样本空间与随机事件的学习，培养数学抽象与直观想象素养.

自主预习

情景导思

随机现象是否为一种杂乱无章的现象？自然界和人类社会中存在着必然现象和随机现象，下列几个现象是必然现象吗？为什么？

(1)把一石块抛向空中，它会掉到地面上来；

(2)我们生活的地球，每天都在绕太阳转动；

(3)一个人随着岁月的消逝，一定会衰老、死亡.

答案 随机现象不是一种杂乱无章的现象，是有一定规律可循的. 以上都是必然现象. 因为这些现象是在一定条件下必然要发生的.

知新预学

1. 随机试验

我们把对随机现象的__实现__和对它的__观察__称为随机试验，简称试验，常用字母__E__表示. 我们感兴趣的是具有以下特点的随机试验：

(1)试验可以在__相同__条件下重复进行；

(2)试验的所有可能结果是__明确可知__的，并且不止一个；

(3)每次试验总是恰好出现这些可能结果中的__一__个，但事先__不能__确定出现哪一个结果.

2. 样本点与样本空间

我们把随机试验 E 的每个可能的__基本结果__称为样本点，__全体样本点__的集合称为试验 E 的样本空间. 一般地，我们用__Ω__表示样本空间，用__ω__表示样本点. 如果一个随机试验有 n 个可能结果 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，则称样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为__有限样本空间__.

3. 随机事件

(1)一般地，随机试验中的每个随机事件都可以用这个试验的样本空间的子集来表示. 为了叙述方便，我们将样本空间 Ω 的__子集__称为随机事件，简称__事件__，并把只包含一个样本点的事件称为__基本事件__. 随机事件一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当 A 中某个样本点出现时，称为事件 A 发生.

(2)Ω 作为自身的子集，包含了所有的样本点，在每次试验中总有一个样本点发生，所以 Ω 总会发生，我们称 Ω 为__必然__事件. 而空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，我们称 $\varnothing$ 为__不可能__事件.

小试牛刀

1. 下列事件中的随机事件为 (C)

A. 若 a,b,c 都是实数，则 $a(bc)=(ab)c$

B. 没有水和空气，人也可以生存下去

C. 抛掷一枚硬币，反面向上

D. 在标准大气压下，温度达到 60 ℃时水沸腾

【解析】A 中的等式是实数乘法的结合律，对任意实数 a,b,c 是恒成立的，故 A 是必然事件. 在没有空气和水的条件下，人是绝对不能生存下去的，故 B 是不可能事件. 抛掷一枚硬币时，在没得到结果之前，并不知道会是正面向上还是反面向上，故 C 是随机事件. 在标准大气压的条件下，只有温度达到 100 ℃，水才会沸腾，当温度是 60 ℃时，水是绝对不会沸腾的，D 是不可能事件. 故选 C.

2. 在 12 件同类产品中，有 10 件是正品，2 件是次品，从中任意抽出 3 件，则下列事件为必然事件的是 (D)

A. 3 件都是正品　　B. 至少有一件是次品

C. 3 件都是次品　　D. 至少有一件是正品

【解析】12 件产品中，有 2 件次品，任取 3 件，必包含正品，因

而事件“抽取的 3 件产品中,至少有一件是正品”为必然事件,故选 D.

3. 下列事件中,是随机事件的是 ②④ .

①长度为 3,4,5 的三条线段可以构成一个直角三角形;②打开电视机,正好在播新闻;③从装有 3 个黄球、5 个红球的袋子中任摸 4 个,全部都是黄球;④下周六是晴天.

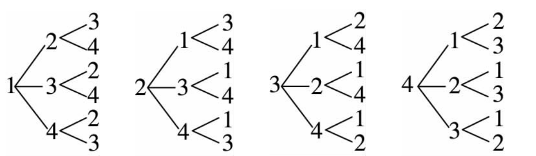
【解析】①是必然事件,③是不可能事件,②④是随机事件.

4. 从 a,b,c,d 中任取两个字母,则该试验的样本空间为 $\Omega=$ $\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$.

【解析】含 a 的有 ab,ac,ad;不含 a,含 b 的有 bc,bd;不含 a,b,含 c 的有 cd. $\therefore\Omega=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$.

5. 从 1,2,3,4 中任取三个数字组成三位数,求该试验的样本空间.

【解析】画出树形图,如图:



可知样本空间 $\Omega=\{123,124,132,134,142,143,213,214,231,234,241,243,312,314,321,324,341,342,412,413,421,423,431,432\}$.

互动课堂

合作探究

探究 1 随机事件的判断

【例 1】判断下列事件是必然事件还是随机事件.

(1)抛掷一枚质地均匀的硬币出现正面;

(2)某人购买的彩票号码恰好是中奖号码;

(3)标准大气压下,把水加热至 100 ℃沸腾;

(4)骑车经过十字路口时,遇到红灯.

【解析】(1)随机事件. 因为出现的结果可能是正面,也可能是反面,结果并不确定.

(2)随机事件. 因为彩票号码是否为中奖号码,本身无法预测,是不可知的.

(3)必然事件. 因为标准大气压下,水加热至 100 ℃时沸腾这个结果一定会发生,是确定的.

(4)随机事件. 因为信号灯的颜色对每位经过路口的人来说事先都是不可知的,是无法确定的.

点睛 判断某一事件是随机事件还是必然事件的关键,是看在一定条件下,事件的结果是否可以预知、确定. 若在一定条件下,出现的结果是可以预知、会发生的,这类事件为必然事件;若在一定条件下,出现的结果是无法预知、无法事先确定的,这类事件称为随机事件.

【变式训练 1】下列事件是随机事件的是 (C)

①当 x 是实数时,$x-|x|=2$;

②某班一次数学测试,及格率低于 75%;

③从分别标有 0,1,2,3,…,9 这 10 个数字的纸团中任取一个,取出的纸团上标的是偶数;

④某期体育彩票的特等奖号码.

A. ①②③　　B. ①③④

C. ②③④　　D. ①②④

【解析】由于方程 $x-|x|=2$ 无解,故①不可能发生,不是随机事件,由随机事件的定义知②③④正确.

探究 2 确定样本空间

【例 2】连续抛掷 3 枚硬币,观察落地后这 3 枚硬币出现的是正面还是反面.

(1)写出这个试验的样本空间;

(2)求这个试验的基本事件的总数;

(3)“恰有两枚硬币正面向上”这一事件包含哪几个基本事件?

【解析】(1)这个试验的样本空间 $\Omega=$ {(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(正,反,反),(反,正,正),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反)}.

(2)基本事件的总数是 8.

(3)“恰有两枚正面向上”包含以下 3 个基本事件:(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正).

点睛 当基本事件的总数比较大时,首先要列举基本事件,在列举时要按照一定的顺序,才能确保基本事件不重不漏.

【变式训练 2】一个盒子中装有 5 个完全相同的球,分别标有号码 1,2,3,4,5,现从中任取两球.

(1)写出这个试验的样本空间;

(2)求这个试验的基本事件总数;

(3)写出“取出的两球上的数字之和是 6”这一事件中所包含的基本事件.

【解析】(1) $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$.

(2)基本事件总数为 10.

(3)“取出的两球上的数字之和是 6”这一事件所包含的基本事件为(1,5),(2,4).

随堂小练

1. 某校高一年级要组建数学、计算机、航空模型 3 个兴趣小组,某学生只选报其中的 2 个,则基本事件共有 (C)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

【解析】该生选报的所有可能情况是:{(数学和计算机),(数学和航空模型),(计算机和航空模型)},所以基本事件有 3 个. 故选 C.

2. 下列事件是必然事件的是 (B)

A. 某路口单位时间内通过的车辆数

B. n 边形的内角和为$(n-2)\cdot 180^\circ$

C. 某同学在期末考试中数学成绩高于 60 分

D. 一名篮球运动员每场比赛所得的分数

【解析】A,C,D 选项为随机事件,B 选项为必然事件. 故选 B.

3. 将一枚硬币向上抛掷 10 次,其中"恰有 5 次正面向上"是 (B)

A. 必然事件　　B. 随机事件

C. 不可能事件　　D. 无法确定

【解析】抛掷 10 次硬币正面向上的次数可能为 0～10,都有可能发生,正面向上 5 次是随机事件. 故选 B.

4. 抛掷两个各面上分别记有数字 1 至 6 的正方体骰子,设事件 A 为"点数之和恰好为 6",则 A 所包含的基本事件个数为 (D)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解析】设抛掷两个正方体骰子所得点数分别为(x,y),则事件 A 为"点数之和恰好为 6"所包含的基本事件为$(1,5)$,$(2,4)$,$(3,3)$,$(4,2)$,$(5,1)$,共计 5 个. 故选 D.

温馨提示:请自主完成课后作业(四十四)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　事件的关系和运算

学习目标	核心素养
1. 理解事件之间的关系与运算，并能进行事件的混合运算.（重点） 2. 理解互斥事件、对立事件的概念，并会区分二者，会用加法公式求事件的概率.（重点、难点）	1. 通过对事件的关系的概念的理解，培养数学抽象素养. 2. 通过事件间的运算培养数学运算素养.

自主预习

情景导思

某班数学建模课分成 5 个小组（编号为 1，2，3，4，5）采用合作学习的方式进行，课堂上教师会随机选择一个小组的成果进行展示.

不难看出，这一试验的样本空间可记为 $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$.

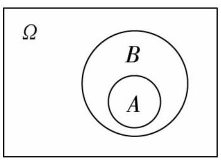
记事件 $E=\{1\}$，$F=\{1,2\}$，$G=\{1,3\}$，$H=\{1,2,3\}$，$I=\{4,5\}$，说出每一事件的实际意义，并尝试理解上述各事件之间的关系.

前面我们将事件和集合之间建立对应关系，从而可用集合的一些术语和符号去描述事件之间的关系与运算.

知新预学

1. 事件的包含与相等

（1）一般地，如果事件 A 发生时，事件 B 一定发生，则称<u>事件 A 包含于事件 B</u>（或<u>事件 B 包含事件 A</u>），记作<u>$A\subseteq B$</u>（或<u>$B\supseteq A$</u>）. 这一关系可用下图表示.



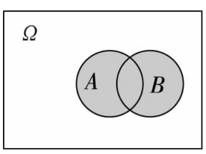
注：$A\subseteq B$ 也可用充分必要条件表述为：事件 A 发生是事件 B 发生的<u>充分条件</u>，事件 B 发生是事件 A 发生的<u>必要条件</u>.

（2）如果事件 B 包含事件 A，事件 A 也包含事件 B，则称事件 A 与事件 B <u>相等</u>，记作<u>$A=B$</u>.

注：不难看出，$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，$A=B$ 也可以用充分必要条件表述为：事件 A 发生是事件 B 发生的<u>充分必要条件</u>.

2. 并事件（或和事件）

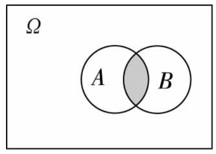
事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样的一个事件中的样本点或者在事件 A 中，或者在事件 B 中，我们称这个事件为事件 A 与事件 B 的<u>和事件（或并事件）</u>，记作<u>$A\cup B$（或 $A+B$）</u>. 事件 A 与事件 B 的并事件可以用如图所示的阴影部分表示.



注：事件 $A+B$ 发生，当且仅当事件 A 与事件 B <u>至少有一个发生</u>.

3. 交事件（或积事件）

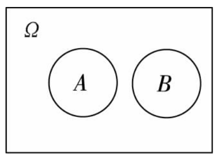
事件 A 与事件 B 同时发生，这样的一个事件中的样本点既在事件 A 中，也在事件 B 中，我们称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的<u>交事件</u>（或<u>积事件</u>）. 记作<u>$A\cap B$</u>（或<u>AB</u>）. 事件 A 与事件 B 的交事件可以用如图所示的阴影部分表示.



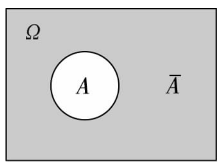
注：事件 AB 发生，当且仅当事件 A 与事件 B <u>都发生</u>.

4. 事件的互斥与对立

（1）若事件 A 与事件 B 不能同时发生，也就是说 $A\cap B$ 是一个不可能事件，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B <u>互斥（或互不相容）</u>，这一关系可用下图表示.



（2）给定样本空间 Ω 与事件 A、事件 B，如果事件 A 和事件 B 在任何一次试验中有且仅有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$，且 $A\cap B=\varnothing$，那么称事件 A 与事件 B <u>互为对立</u>. 事件 A 的对立事件记为<u>$\overline{A}$</u>. 用集合的观点看，$\overline{A}$ 是 A 在 Ω 中的补集，如图所示. 如果 $B=\overline{A}$，则称 A 与 B 互为对立.



5. 事件的混合运算

事件 A 与事件 B 中恰有一个发生，换句话说就是事件 A 发生且事件 B 不发生，或者事件 A 不发生且事件 B 发生.

我们可以定义多个事件的和事件以及积事件. 例如，对于三个事件 A，B，C，$A\cup B\cup C$（或 $A+B+C$）发生当且仅当 A，B，C 中至少有一个发生，$A\cap B\cap C$（或 ABC）发生当且仅当 A，B，C 同时发生，等等.

小试牛刀

1. 抛掷一枚骰子，记“向上的点数是 1 或 2”为事件 A，“向上的点数是 2 或 3”为事件 B，则 (C)

A. $A\subseteq B$

B. $A=B$

C. $A+B$ 表示向上的点数是 1 或 2 或 3

D. AB 表示向上的点数是 1 或 2 或 3

【解析】设 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\cap B=\{2\}$，$A\cup B=\{1,2,3\}$，∴$A+B$ 表示向上的点数为 1 或 2 或 3. 故选 C.

2. 从 1，2，…，9 中任取两个数，其中：①恰有一个偶数和恰有一个奇数；②至少有一个奇数和两个数都是奇数；③至少有一个奇数和两个数都是偶数；④至少有一个奇数和至少有一个偶数.

在上述各对事件中，是对立事件的是 (C)

A. ① B. ②④ C. ③ D. ①③

【解析】从 1，2，…，9 中任取两数，包括一奇一偶、两奇、两偶，共三种互斥事件，所以只有③中的两个事件才是对立事件. 故选 C.

3. 将标有数字 3，4，5 的三张扑克牌随机分给甲、乙、丙三人，每人一张，事件 A：“甲得到的扑克牌数字小于乙得到的扑克牌数字”与事件 B：“乙得到的扑克牌数字为 3”是 (A)

A. 互斥但不对立事件

B. 对立事件

C. 既不互斥也不对立事件

D. 以上都不对

【解析】用数对 (x,y) 中的 x 表示甲的扑克牌数字，y 表示乙得到的扑克牌数字. 事件 A 为：(3，4)，(3，5)，(4，5)，事件 B 为：(4，3)，(5，3)，事件 A 与事件 B 不能同时发生，但能同时不发生，所以事件 A 与事件 B 是互斥但不对立事件. 故选 A.

4. 对空中某一运动的目标连续射击两次，每次发射一发彩弹，设事件 $A=$“两次都击中目标”，$B=$“两次都没击中目标”，$C=$“恰有一次击中目标”，$D=$“至少有一次击中目标”，下列说法不正确的是 (D)

A. $A\subseteq D$ B. $B\cap D=\varnothing$

C. $A\cup C=D$ D. $A\cup C=B\cup D$

【解析】由于至少有一次击中目标包括两种情况：两次都击中目标、只有一次击中目标，故有 $A\subsetneqq D$，故 A 正确. 由于事件 B，D 是互斥事件，故 $B\cap D=\varnothing$，故 B 正确. 再由 $A\cup C=D$ 成立可得 C 正确. $A\cup C=D=$“至少有一次击中目标”，不是必然事件，而 $B\cup D$ 为必然事件，D 不正确，故选 D.

5. 一箱产品中有正品 4 件，次品 3 件，从中任取 2 件，下列四组事件：①恰有一件次品和恰有两件次品；②至少有一件次品和全是次品；③至少有一件正品和至少有一件次品；④至少有一件次品和全是正品.

其中两个事件互斥的是 ①④ .

【解析】∵从一箱产品中任取 2 件，观察正品件数和次品件数，其中正品、次品都多于 2 件，∴恰有一件次品和恰有两件次品是互斥的，至少有一件次品和全是正品是互斥的，∴①④是互斥事件，故答案为①④.

互动课堂

合作探究

探究 1 事件关系的判断

【例 1】从 40 张扑克牌(红桃、黑桃、方块、梅花，点数从 1～10 各 10 张)中，任取一张.

(1)“抽出红桃”与“抽出黑桃”；

(2)“抽出红色牌”与“抽出黑色牌”；

(3)“抽出的牌点数为 5 的倍数”与“抽出的牌点数大于 9”.

判断上面给出的每对事件是否为互斥事件，是否为对立事件，并说明理由.

【解析】(1)是互斥事件，不是对立事件.

理由是：从 40 张扑克牌中任意抽取 1 张，“抽出红桃”和“抽出黑桃”是不可能同时发生的，所以是互斥事件. 同时，不能保证其中必有一个发生，这是由于还可能抽出“方块”或者“梅花”，因此，二者不是对立事件.

(2)既是互斥事件，又是对立事件.

理由是：从 40 张扑克牌中，任意抽取 1 张，“抽出红色牌”与“抽出黑色牌”，两个事件不可能同时发生，但其中必有一个发生，所以它们既是互斥事件，又是对立事件.

(3)不是互斥事件，当然不可能是对立事件.

理由是：从 40 张扑克牌中任意抽取 1 张，“抽出的牌点数为 5 的倍数”与“抽出的牌点数大于 9”这两个事件可能同时发生，如抽出的牌点数为 10，因此，二者不是互斥事件，当然不可能是对立事件.

点睛 1. 事件 A 与事件 B 互斥的条件是 $A\cap B=\varnothing$，事件 A 与事件 B 对立，则在 A，B 互斥的基础上还要求 $A\cup B=\Omega$.

2. 事件 A 与事件 B 互斥是事件 A 与事件 B 对立的必要不充分条件.

【变式训练 1】从装有 5 个红球和 3 个白球的口袋内任取 3 个球，那么下列各对事件中，互斥而不对立的是 (D)

A. 至少有一个红球与都是红球

B. 至少有一个红球与都是白球

C. 至少有一个红球与至少有一个白球

D. 恰有一个红球与恰有两个红球

【解析】根据互斥事件与对立事件的定义判断. A 中两事件不是互斥事件，事件“3 个球都是红球”是两事件的交事件；B 中两事件是对立事件；C 中两事件能同时发生，如“恰有一个红球和两个白球”，故不是互斥事件；D 中两事件是互斥而不对立事件. 故选 D.

探究2 事件的运算

【例2】设 A,B 为两个事件,试用 A,B 表示下列各事件:

(1)A,B 两个事件中至少有一个发生;

(2)A 事件发生且 B 事件不发生;

(3)A,B 两个事件都不发生.

【解析】(1)按照定义有 $A+B$;

(2)因为 B 不发生可以表示为 $\overline{B}$,因此可以写成 $A\overline{B}$;

(3)按照定义有 $\overline{A}\,\overline{B}$.

点睛 事件的三种运算:求两个事件的和、求两个事件的积、求一个事件的对立事件.因为事件运算的结果仍是事件,所以也可以进行事件的混合运算.

【变式训练2】在试验"连续抛掷一枚质地均匀的骰子2次,观察每次出现的点数"中,事件 A 表示随机事件"第一次掷出1点";事件 A_j 表示随机事件"第一次掷出1点,第二次掷出 j 点";事件 B 表示随机事件"2次掷出的点数之和为6";事件 C 表示随机事件"第二次掷出的点数比第一次的大3".

(1)试用样本点表示事件 $A\cap B$ 与 $A\cup B$;

(2)试分别判断事件 A 与 B,A 与 C,B 与 C 是否为互斥事件;

(3)试用事件 A_j 表示随机事件 A.

【解析】依照题意可知样本空间为:

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\}$$

(1)因为事件 A 表示随机事件"第一次掷出1点",

所以 $A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$.

因为事件 B 表示随机事件"2次掷出的点数之和为6",所以 $B=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

所以 $A\cap B=\{(1,5)\}$,$A\cup B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

(2)因为事件 C 表示随机事件"第二次掷出的点数比第一次的大3",所以 $C=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$.

因为 $A\cap B=\{(1,5)\}\neq\varnothing$,$A\cap C=\{(1,4)\}\neq\varnothing$,$B\cap C=\varnothing$,所以事件 A 与事件 B 不是互斥事件,事件 A 与事件 C 不是互斥事件,事件 B 与事件 C 是互斥事件.

(3)因为事件 A_j 表示随机事件"第一次掷出1点,第二次掷出 j 点",所以 $A_1=\{(1,1)\}$,$A_2=\{(1,2)\}$,$A_3=\{(1,3)\}$,$A_4=\{(1,4)\}$,$A_5=\{(1,5)\}$,$A_6=\{(1,6)\}$,

所以 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6$.

随堂小练

1. 从装有完全相同的4个红球和2个黄球的盒子中任取2个小球,则互为对立事件的是 (B)

A. 至少一个红球与至少一个黄球

B. 至多一个红球与都是红球

C. 都是红球与都是黄球

D. 至少一个红球与至多一个黄球

【解析】从装有完全相同的4个红球和2个黄球的盒子中任取2个小球,在A中,"至少一个红球"与"至少一个黄球"能同时发生,不是互斥事件,A错误;在B中,"至多一个红球"与"都是红球"是对立事件,B正确;在C中,"都是红球"与"都是黄球"是互斥事件,但不是对立事件,C错误;在D中,"至少一个红球"与"至多一个黄球"能同时发生,不是互斥事件,D错误.故选B.

2. 在8件同类产品中,有6件是正品,2件是次品,从这8件产品中任意抽取3件产品,则下列说法错误的是 (C)

A. 事件"至少有一件是正品"是必然事件

B. 事件"都是次品"是不可能事件

C. 事件"都是正品"与"至少有一件正品"是互斥事件

D. 事件"至少有一件次品"与"都是正品"是对立事件

【解析】在8件同类产品中,有6件是正品,2件是次品,从这8件产品中任意抽取3件产品,在A中,事件"至少有一件是正品"是必然事件,A正确;在B中,事件"都是次品"是不可能事件,B正确;在C中,事件"都是正品"和"至少有一件正品"能同时发生,不是互斥事件,C错误;在D中,事件"至少有一件次品"和"都是正品"是对立事件,D正确.故选C.

3. 抛掷一枚质地均匀的硬币三次,得到如下三个事件:$A=$"3次正面向上",$B=$"只有1次正面向上",$C=$"至少有1次正面向上",试判断事件 A,B,C 之间的包含关系.

【解析】当事件 A 发生时,事件 C 一定发生,当事件 B 发生时,事件 C 一定发生,因此有 $A\subseteq C$,$B\subseteq C$;当事件 A 发生时,事件 B 一定不发生,当事件 B 发生时,事件 A 一定不发生,因此事件 A 与事件 B 之间不存在包含关系.综上,事件 A,B,C 之间的包含关系为:$A\subseteq C$,$B\subseteq C$.

4. 盒子里有6个红球,4个白球,现从中任取3个球,设事件 $A=$"3个球中有1个红球,2个白球",事件 $B=$"3个球中有2个红球,1个白球",事件 $C=$"3个球中至少有1个红球",事件 $D=$"3个球中既有红球又有白球".

(1)事件 D 与事件 A,B 是什么样的运算关系?

(2)事件 C 与事件 A 的交事件是什么事件?

【解析】(1)对于事件 D,可能的结果为1个红球2个白球,或2个红球1个白球,故 $D=A\cup B$.

(2)对于事件 C,可能的结果为1个红球2个白球,2个红球1个白球,或3个红球,故 $C\cap A=A$.

温馨提示:请自主完成课后作业(四十五)

课后作业·单独成册

第 3 课时　古典概型

学习目标	核心素养
1. 了解概率的定义，理解古典概型及其概率计算公式.（重点） 2. 会计算事件和样本空间包含的样本点个数，及事件发生的概率.（重点、难点）	1. 通过学习古典概型，培养数学抽象素养. 2. 借助古典概型的应用可以培养数学运算与逻辑推理素养.

自主预习

情景导思

掷一枚质地均匀的硬币，结果只有 2 个，即“正面朝上”或“反面朝上”，它们都是随机事件.

一个盒子中有 10 个完全相同的球，分别标以号码 1，2，3，…，10，从中任取一球，只有 10 种不同的结果，即标号为 1，2，3，…，10.

根据上述情况，你能发现它们有什么共同特点？它们的概率公式是什么？

知新预学

1. 对随机事件发生可能性大小的度量（数值）称为事件的概率，事件 A 的概率用 <u>$P(A)$</u> 表示.

2. 古典概型的特征

（1）有限性：样本空间的样本点只有 <u>有限个</u>.

（2）等可能性：每个样本点发生的可能性 <u>相等</u>.

3. 古典概型的概率计算公式

一般地，设试验 E 是古典概型，样本空间 Ω 包含 n 个样本点，事件 A 包含其中的 k 个样本点，则定义事件 A 的概率 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$. 其中，$n(A)$ 和 $n(\Omega)$ 分别表示事件 A 和样本空间 Ω 包含的样本点个数.

小试牛刀

1. 下列不是古典概型的是　　（ C ）

A. 从 6 名同学中，选出 4 人参加数学竞赛，每人被选中的可能性的大小

B. 同时掷两颗骰子，点数和为 7 的概率

C. 近三天中有一天降雨的概率

D. 10 个人站成一排，其中甲、乙相邻的概率

【解析】A,B,D 为古典概型，因为都适合古典概型的两个特征：有限性和等可能性，而 C 不满足等可能性，不为古典概型. 故选 C.

2. 从长度分别为 1，2，3，4 的四条线段中，任取 3 条不同的线段，以取出的 3 条线段为边可以组成三角形的概率为　　（ B ）

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

【解析】从中任取三条线段共有 4 种取法，能构成三角形的只有长度为 2，3，4 的线段，所以 $P=\frac{1}{4}$，故选 B.

3. 从数字 1，2，3，4，5 中任取 2 个不同的数字构成一个两位数，则这个两位数大于 40 的概率是　　（ B ）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

【解析】从数字 1，2，3，4，5 中任取 2 个不同的数字能构成 20 个两位数：12，13，14，15，21，23，24，25，31，32，34，35，41，42，43，45，51，52，53，54，而大于 40 的数有 8 个：41，42，43，45，51，52，53，54，故所求的概率是 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$. 故选 B.

4. 从 2，3，8，9 中任取 2 个不同的数字，分别记为 a，b，则 $\log_a b$ 为整数的概率为 <u>$\frac{1}{6}$</u>.

【解析】从 2，3，8，9 中任取 2 个分别记为 (a,b)，则有 $(2,3)$，$(3,2)$，$(2,8)$，$(8,2)$，$(2,9)$，$(9,2)$，$(3,8)$，$(8,3)$，$(3,9)$，$(9,3)$，$(8,9)$，$(9,8)$，共有 12 种情况，其中符合 $\log_a b$ 为整数的有 $\log_3 9$ 和 $\log_2 8$ 两种情况，$\therefore P=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

5. 现有 6 道题，其中 4 道甲类题，2 道乙类题，张同学从中任选 2 道题解答. 求所选的 2 道题不是同一类题的概率.

【解析】将 4 道甲类题依次编号为 1，2，3，4；2 道乙类题依次编号为 5，6. 任取 2 道题，基本事件为 $\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{1,5\}$，$\{1,6\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{2,5\}$，$\{2,6\}$，$\{3,4\}$，$\{3,5\}$，$\{3,6\}$，$\{4,5\}$，$\{4,6\}$，$\{5,6\}$，共 15 个，而且这些基本事件的出现是等可能的. 用 B 表示“不是同一类题”这一事件，则 B 包含的基本事件有 $\{1,5\}$，$\{1,6\}$，$\{2,5\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$，$\{3,6\}$，$\{4,5\}$，$\{4,6\}$，共 8 个，所以 $P(B)=\frac{8}{15}$.

互动课堂

合作探究

探究 1　古典概型的判断

【例 1】某同学随机地向一靶心进行射击，这一试验的结果只有有限个：命中 10 环、命中 9 环……命中 5 环和不中环. 你认为这是古典概型吗？为什么？

【解析】不是古典概型，虽然试验的所有可能结果只有 7 个，而命中 10 环、命中 9 环……命中 5 环和不中环的出现不是等可能的，即不满足古典概型的等可能性.

点睛 判断一个试验是否为古典概型，要看这个试验是否具有古典概型的两个特征：一是有限性，二是等可能性.

【变式训练 1】在“从所有整数中任取一个数”的试验中，“抽取一个整数”是古典概型吗？

【解析】不是，因为有无数个基本事件.

探究 2 古典概型的概率计算

【例 2】将一枚质地均匀的正方体骰子先后抛掷两次，观察出现点数的情况.

(1)一共有多少种不同的结果？

(2)点数之和为 5 的结果有多少种？

(3)点数之和为 5 的概率是多少？

【解析】(1)将一枚质地均匀的正方体骰子抛掷一次，得到的点数有 1,2,3,4,5,6，共 6 种结果，故先后将这枚骰子抛掷两次，一共有 $6\times6=36$(种)不同的结果.

(2)点数之和为 5 的结果有(1,4)，(2,3)，(3,2)，(4,1)，共 4 种.

(3)正方体骰子是质地均匀的，将它先后抛掷两次所得的 36 种结果是等可能出现的，其中点数之和为 5(记为事件 A)的结果有 4 种，因此所求概率 $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

点睛 古典概型问题包含的题型较多，但都必须紧扣古典概型的定义，进而用公式进行计算. 列举法是求解古典概型问题的常用方法，借助于图表等有时更实用更有效.

【变式训练 2】在两个袋中分别装着写有 0,1,2,3,4,5 六个数字的 6 张卡片，从每个袋中各任取 1 张卡片，则 2 张卡片上数字之和等于 7 的概率为__$\frac{1}{9}$__.

【解析】试验结果如表所示：

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

由表可知两张卡片上数字之和共有 36 种情况，其中和为 7 的有 4 种情况，

∴所求事件的概率为 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

随堂小练

1. 下列是古典概型的是 (C)

A. 任意抛掷两枚骰子，所得点数之和作为基本事件时

B. 求任意的一个正整数平方的个位数字是 1 的概率，将取出的正整数作为基本事件时

C. 从甲地到乙地共 n 条路线，求某人正好选中最短路线的概率

D. 抛掷一枚均匀硬币至首次出现正面为止

【解析】A 项中由于点数的和出现的可能性不相等，故 A 不是古典概型；B 项中的基本事件是无限的，故 B 不是古典概型；C 项满足古典概型的有限性和等可能性，故 C 是古典概型；D 项中的基本事件既不是有限个也不具有等可能性，D 不是古典概型. 故选 C.

2. 从甲、乙、丙、丁、戊 5 人中选取 3 人参加演讲比赛，则甲、乙都入选的概率为 (C)

A. $\frac{2}{5}$　B. $\frac{2}{10}$　C. $\frac{3}{10}$　D. $\frac{3}{5}$

【解析】从五个人中选取 3 个人有 10 种不同结果：(甲，乙，丙)，(甲，乙，丁)，(甲，乙，戊)，(甲，丙，丁)，(甲，丙，戊)，(甲，丁，戊)，(乙，丙，丁)，(乙，丙，戊)，(乙，丁，戊)，(丙，丁，戊)，而甲、乙都入选的结果有 3 种，所求的概率为 $\frac{3}{10}$. 故选 C.

3. 甲、乙两人有三个不同的学习小组 A,B,C 可以参加，若每人必须参加且仅能参加一个学习小组(两人参加各小组的可能性相同)，则两人参加同一个学习小组的概率为 (A)

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{5}$　D. $\frac{1}{6}$

【解析】甲、乙两人参加学习小组，若以 (A,B) 表示甲参加学习小组 A，乙参加学习小组 B，则一共有：(A,A)，(A,B)，(A,C)，(B,A)，(B,B)，(B,C)，(C,A)，(C,B)，(C,C)，共 9 种情形，其中两人参加同一个学习小组共有 3 种情形，根据古典概型概率公式，得 $P=\frac{1}{3}$. 故选 A.

4. 先后抛掷两枚骰子，所得点数之和为 7 的概率为 (C)

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{12}$　C. $\frac{1}{6}$　D. $\frac{5}{36}$

【解析】抛掷两颗骰子，一共有 36 种结果，其中点数之和为 7 的共有 6 种结果，根据古典概型的概率公式，得 $P=\frac{1}{6}$. 故选 C.

5. 从含有 3 件正品和 1 件次品的 4 件产品中不放回地任取 2 件，则取出的 2 件中恰有 1 件是次品的概率为__$\frac{1}{2}$__.

【解析】设 3 件正品为 A,B,C，1 件次品为 D，从中不放回地任取 2 件，有以下基本事件：AB,AC,AD,BC,BD,CD，共 6 个. 其中恰有 1 件是次品的基本事件有：AD,BD,CD，共 3 个，故 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

6. 从 3 男 3 女共 6 名学生中任选 2 名(每名同学被选中的概率均相等)，则 2 名都是女同学的概率为__$\frac{1}{5}$__.

【解析】用 A,B,C 表示三名男同学，用 a,b,c 表示三名女同学，则从 6 名同学中选出 2 人的所有选法为 $AB,AC,Aa,Ab,Ac,BC,Ba,Bb,Bc,Ca,Cb,Cc,ab,ac,bc$ 共 15 种，其中 2 名都是女同学的有 ab,ac,bc 共 3 种，故所求的概率为 $P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(四十六)

课后作业 · 单独成册

第4课时 概率的基本性质

学习目标	核心素养
1. 掌握概率的基本性质.(重点) 2. 能够利用概率的加法公式及对立事件的概率公式解题.(重点、难点)	1. 通过学习概率的基本性质,培养数学抽象素养. 2. 借助概率性质的应用可以培养数学运算素养.

自主预习

情景导思

两个集合之间存在着包含与相等的关系,集合可以进行交、并、补运算,你还记得子集、交集、并集和补集的含义及其符号表示吗?我们可以把一次试验可能出现的结果看成一个集合,那么必然事件对应全集,随机事件对应子集,不可能事件对应空集,从而可以类比集合的关系与运算,分析事件之间的关系与运算,使我们对概率有进一步的理解和认识.

知新预学

概率的几个基本性质

(1)对任意的事件 A,都有 $\underline{P(A)\geqslant 0}$.

(2) $\underline{\text{必然事件}}$ 的概率为1,$\underline{\text{不可能事件}}$ 的概率为0. 即有 $\underline{P(\Omega)=1,P(\varnothing)=0}$.

(3)互斥事件的概率加法公式

①如果事件 A 与事件 B 互斥,那么 $P(A\cup B)=\underline{P(A)+P(B)}$.

②一般地,如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,那么事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 发生的概率,等于这 n 个事件分别发生的概率之和,即 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\underline{P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)}$.

(4)如果事件 A 与事件 B 互为对立事件,那么 $P(B)=\underline{1-P(A)}$,$P(A)=\underline{1-P(B)}$.

(5)如果 $A\subseteq B$,那么 $P(A)\ \underline{\leqslant}\ P(B)$.

(6)设 A,B 是一个随机试验中的两个事件,我们有 $P(A\cup B)=\underline{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$.

小试牛刀

1. 打靶3次,事件 A_i 表示"击中 i 发",其中 $i=0,1,2,3$. 那么 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示 (B)

A. 全部击中　　B. 至少击中1发

C. 至少击中2发　　D. 以上均不正确

【解析】$A_1\cup A_2\cup A_3$ 所表示的含义是 A_1,A_2,A_3 这三个事件中至少有一个发生,即可能击中1发,2发或3发,故选B.

2. 从一批羽毛球中任取一个,如果其质量小于4.8 g的概率为0.3,质量不小于4.85 g的概率是0.32,那么质量在[4.8,4.85)g内的概率是 (B)

A. 0.62　　B. 0.38

C. 0.70　　D. 0.68

【解析】利用对立事件的概率公式可得 $P=1-(0.3+0.32)=0.38$.

3. 一箱灯泡有50个,合格率为90%,从中任意拿一个,它是次品的概率是 (A)

A. 10%　　B. 90%　　C. 20%　　D. 100%

【解析】从中任意拿一个,不是合格品就是次品,两者必有一个发生,而且也只能有一个发生,符合对立事件的特征,因此运用对立事件的概率加法公式得 $P(\text{次品})=1-P(\text{合格})=1-90\%=10\%$. 故选A.

互动课堂

合作探究

探究1 利用概率性质认识事件关系

【例1】下列叙述错误的是 (D)

A. 若事件 A 发生的概率为 $P(A)$,则 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

B. 互斥事件不一定是对立事件,但是对立事件一定是互斥事件

C. 两个对立事件的概率之和为1

D. 对于任意两个事件 A 和 B,都有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

【解析】概率的加法公式的适用条件是事件 A,B 必须是互斥的,选项D中事件 A 和 B 是任意的,没有说明是互斥的,所以选项D是错误的,故选D.

点睛 熟练掌握概率的基本性质是解题的关键.

【变式训练1】设 A,B 为两个事件,且 $P(A)=0.3$,则使 $P(B)=0.7$ 一定成立的条件是 (B)

A. A 与 B 互斥　　B. A 与 B 对立

C. $A\subseteq B$　　D. A 不包含 B

【解析】根据概率的知识可以知道,对立事件的概率和为1.

探究2 利用概率性质求概率

【例2】在数学考试(满分100分)中,小明的成绩在90分及以上的概率是0.18,在80~89分的概率是0.51,在70~79分的概率是0.15,在60~69分的概率是0.09,计算小明在数学考试中取得80分及以上成绩的概率和小明考试及格的概率.

【解析】分别记小明的考试成绩在90分及以上,80~89分,70~79分,60~69分分别为事件 B,C,D,E,这四个事件是彼此互斥的.

根据概率的加法公式,小明的考试成绩在80分及以上的

概率是 $P(B\cup C)=P(B)+P(C)=0.18+0.51=0.69$.

小明考试及格的概率为 $P(B\cup C\cup D\cup E)=P(B)+P(C)+P(D)+P(E)=0.18+0.51+0.15+0.09=0.93$.

点睛 在求某些较为复杂的事件的概率时，先将它分解为一些较为简单的、并且概率已知(或较容易求出)的彼此互斥的事件，然后利用概率的加法公式求出概率.因此互斥事件的概率加法公式具有"化整为零、化难为易"的作用，但需要注意的是使用该公式时必须检验是否满足前提条件"彼此互斥".

【变式训练 2】 假设向三个相邻的机关投掷一个小球，触发第一个机关的概率为 0.025，其余两个各为 0.1，只要触发其中一个，另两个也会触发，求投掷一个小球，机关会触发的概率.

【解析】 因为只投掷了一个小球，故触发第一、第二、第三个机关的事件是彼此互斥的.

令事件 A,B,C 分别表示触发第一、第二、第三个机关，则 $P(A)=0.025,P(B)=P(C)=0.1$.

令 D 表示机关被触发这个事件，则有 $D=A\cup B\cup C$，

又因为 A,B,C 是两两互斥事件，

故所求概率为 $P(D)=P(A)+P(B)+P(C)=0.025+0.1+0.1=0.225$.

随堂小练

1. 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 (D)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{7}{8}$

【解析】 由题意知 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，其中 4 位同学都选周六的概率为 $\frac{1}{16}$，4 位同学都选周日的概率为 $\frac{1}{16}$，故周六、周日都有同学参加公益活动的概率 $P=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{7}{8}$，故选 D.

2. 某兴趣小组有 3 名男生和 2 名女生，从中任选 2 名去参加比赛，则下列各对事件中是互斥事件的有 (D)

①恰有 1 名男生和全是男生；②至少有 1 名男生和至少有 1 名女生；③至少有 1 名男生和全是男生；④至少有 1 名男生和全是女生.

A. ①③④　　B. ②③④

C. ②③　　D. ①④

【解析】 ①是互斥事件.恰有一名男生的实质是选出的两名同学中有一名男生和一名女生，它与全是男生不可能同时发生；②不是互斥事件；③不是互斥事件；④是互斥事件.至少有一名男生与全是女生不可能同时发生.故选 D.

3. 若 A,B 为互斥事件，$P(A)=0.4,P(A\cup B)=0.7$，则 $P(B)=$ <u>0.3</u>.

【解析】 因为 A,B 为互斥事件，所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.所以 $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3$.

4. 在 30 瓶饮料中，有 3 瓶已过了保质期.从这 30 瓶饮料中任取 2 瓶，已知所取的 2 瓶全在保质期内的概率为 $\frac{117}{145}$，则至少取到 1 瓶已过保质期的概率为 <u>$\frac{28}{145}$</u>.

【解析】 事件"至少取到 1 瓶已过保质期的饮料"与事件"没有取到已过保质期的饮料"是对立事件，根据对立事件的概率公式得 $P=1-\frac{117}{145}=\frac{28}{145}$.

5. 抛掷一枚骰子两次，若至少有一个 1 点或 2 点的概率为 $\frac{5}{9}$，则没有 1 点或 2 点的概率是 <u>$\frac{4}{9}$</u>.

【解析】 记事件 A 为"没有 1 点或 2 点"，B 为"至少有一个 1 点或 2 点"，则 A 与 B 是互斥事件，且 A 与 B 是对立事件，故 $P(A)=1-P(B)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(四十七)

课后作业 · 单独成册

10.2 事件的相互独立性

学习目标	核心素养
1. 在具体情境中,了解两个事件相互独立的概念.(重点) 2. 能利用相互独立事件同时发生的概率公式解决一些简单的实际问题.(重点、难点)	1. 通过事件的相互独立性的学习,提高数学抽象的素养. 2. 借助件的相互独立性的应用便于培养直观想象的素养.

自主预习

情景导思

3 张奖券只有 1 张能中奖,3 名同学有放回地抽取.事件 A 为"第一名同学没有抽到中奖奖券",事件 B 为"第三名同学抽到中奖奖券",事件 A 的发生是否会影响事件 B 发生的概率?

答案 因为抽取是有放回的,所以 A 的发生不会影响 B 发生的概率,事件 A 和事件 B 相互独立.

知新预学

1. 设 A,B 为任意两个事件,如果 $P(AB)=$ $\underline{P(A)P(B)}$,则称事件 A 与事件 B 相互独立.

2. 如果事件 A 与 B 相互独立,那么 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

小试牛刀

1. 袋子中放有 3 个白球,2 个黑球,从中进行不放回地取球两次,每次取 1 个球,用事件 A_1 表示第一次取得白球,事件 A_2 表示第二次取得白球,则 A_1 和 A_2 是 (D)

A. 互斥的事件　　B. 相互独立的事件
C. 对立的事件　　D. 不相互独立的事件

【解析】$\because P(A_1)=\frac{3}{5}$.若 A_1 发生了,$P(A_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;若 A_1 不发生,$P(A_2)=\frac{3}{4}$,即 A_1 发生的结果对 A_2 发生的结果有影响,$\therefore A_1$ 与 A_2 不是相互独立事件.故选 D.

2. 甲、乙、丙三人独立地去破译同一个密码,破译的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$,则此密码能被破译的概率是 (C)

A. $\frac{1}{60}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{59}{60}$

【解析】用 A,B,C 分别表示甲、乙、丙三人破译出密码,则 $P(A)=\frac{1}{5},P(B)=\frac{1}{3},P(C)=\frac{1}{4}$,且 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$,所以此密码被译出的概率为 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.故选 C.

3. 甲、乙两人独立地解同一道题,甲解开这道题的概率是 p_1,乙解开这道题的概率是 p_2,那么恰好有一人解开这道题的概率是 (B)

A. p_1p_2　　B. $p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$
C. $1-p_1p_2$　　D. $1-(1-p_1)(1-p_2)$

【解析】恰好有 1 人解开可分为甲解开乙没解开、甲没解开乙解开.这两个事件显然是互斥的,所以恰好有 1 人解决这个问题的概率为 $p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$.故选 B.

4. 某班甲、乙、丙三名同学竞选班委,甲当选的概率为 $\frac{4}{5}$,乙当选的概率为 $\frac{3}{5}$,丙当选的概率为 $\frac{7}{10}$.

(1)求恰有一名同学当选的概率;
(2)求至多有两人当选的概率.

【解析】设甲、乙、丙当选的事件分别为 A,B,C,

则有 $P(A)=\frac{4}{5},P(B)=\frac{3}{5},P(C)=\frac{7}{10}$.

(1)因为事件 A,B,C 相互独立,

所以恰有一名同学当选的概率为

$P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$

$=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{47}{250}$.

(2)至多有两人当选的概率为

$1-P(ABC)=1-P(A)P(B)P(C)$

$=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{83}{125}$.

互动课堂

合作探究

探究 1 相互独立事件的判断

【例 1】从一副不含大小王的 52 张扑克牌中任抽 1 张,设事

件 A＝“抽到 K”，事件 B＝“抽到红牌”，判断事件 A 与事件 B 是否相互独立？是否互斥？是否对立？为什么？

【解析】由于事件 A 为“抽得 K”，事件 B 为“抽得红牌”，故抽得红牌中有可能抽到红桃 K 或方块 K，即有可能抽到 K，故事件 A，B 有可能同时发生，显然它们不是互斥事件，更不是对立事件，以下考虑它们是否互为独立事件：抽到 K 的概率为 $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$，抽到红牌的概率 $P(B)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$，故 $P(A)P(B)=\frac{1}{13}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{26}$，事件 AB 即为“既抽得 K 又抽得红牌”，亦即“抽得红桃 K 或方块 K”，故 $P(AB)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$，从而有 $P(A)\cdot P(B)=P(AB)$，因此 A 与 B 互为独立事件.

点睛 对于事件 A，B，在一次试验中，A，B 如果不能同时发生，则称 A，B 互斥. 一次试验中，如果 A，B 两个事件互斥且 A，B 中必然有一个发生，则称 A，B 对立，显然 $A\cup\overline{A}$ 为一个必然事件. A，B 互斥则不能同时发生，但有可能同时不发生. 两个事件相互独立是指一个事件的发生与否对另一个事件发生的概率没有影响.

【变式训练 1】掷一枚正方体骰子一次，设事件 A＝“出现偶数点”，事件 B＝“出现 3 点或 6 点”，则事件 A，B 的关系是（ B ）

A. 互斥但不相互独立

B. 相互独立但不互斥

C. 互斥且相互独立

D. 既不相互独立也不互斥

【解析】事件 $A=\{2,4,6\}$，事件 $B=\{3,6\}$，事件 $AB=\{6\}$，基本事件空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

所以 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(AB)=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，因此，事件 A 与 B 相互独立. 当“出现 6 点”时，事件 A，B 同时发生，所以 A，B 不是互斥事件. 故选 B.

探究 2 相互独立事件同时发生的概率

【例 2】甲、乙两名射击运动员分别对一个目标射击一次，甲射中目标的概率为 0.8，乙射中目标的概率为 0.9，求：

(1)两人都射中目标的概率；

(2)两人中恰有一人射中目标的概率；

(3)两人中至少有一人射中目标的概率；

(4)两人中至多有一人射中目标的概率.

【解析】设“甲射击 1 次，射中目标”为事件 A，“乙射击 1 次，射中目标”为事件 B，则 A 与 B，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为相互独立事件.

(1)2 人都射中目标的概率为 $P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.9=0.72$.

(2)“2 人各射击 1 次，恰有 1 人射中目标”包括两种情况：一种是甲射中、乙未射中(事件 $A\overline{B}$ 发生)，另一种是甲未射中、乙射中(事件 $\overline{A}B$ 发生). 根据题意，事件 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥，根据互斥事件的概率加法公式和相互独立事件的概率乘法公式，所求的概率为

$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$

$=0.8\times(1-0.9)+(1-0.8)\times0.9$

$=0.08+0.18=0.26$.

(3)“2 人中至少有 1 人射中”包括“2 人都射中”和“2 人中有 1 人射中”2 种情况，其概率为 $P=P(AB)+[P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)]=0.72+0.26=0.98$.

(4)“2 人至多有 1 人射中目标”包括“有 1 人射中”和“2 人都未射中”两种情况，

故所求概率为 $P=P(\overline{A}\,\overline{B})+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$=P(\overline{A})P(\overline{B})+P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.02+0.08+0.18=0.28$.

点睛 解决此类问题要求熟练掌握相互独立事件的判断依据，若 A，B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是相互独立的，代入相互独立事件的概率公式求解.

【变式训练 2】甲、乙两人独立地破译一个密码，他们各自能破译的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$. 求：

(1)两人都能破译的概率；

(2)两人都不能破译的概率；

(3)恰有一人能破译的概率；

(4)至多有一人能破译的概率.

【解析】设“甲能破译”为事件 A，“乙能破译”为事件 B，则 A，B 相互独立，从而 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均相互独立.

(1)“两人都能破译”为事件 AB，则

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

(2)“两人都不能破译”为事件 $\overline{A}\,\overline{B}$，则

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[1-P(A)][1-P(B)]$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

(3)“恰有一人能破译”为事件 $(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$，

又 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥，

则 $P((A\overline{B})\cup(\overline{A}B))=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$

$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.

(4)“至多有一人能破译”为事件 $(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $A\overline{B}$，$\overline{A}B$，$\overline{A}\,\overline{B}$ 互斥，故

$P(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\,\overline{B})$

$=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B})$

$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})$

$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{11}{12}$.

探究3 相互独立事件概率的综合应用

【例3】某学生语、数、英三科考试成绩，在一次考试中排名全班第一的概率：语文为0.9，数学为0.8，英语为0.85，问这次考试中：

(1)三科成绩均未获得第一名的概率是多少？

(2)恰有一科成绩未获得第一名的概率是多少？

【解析】分别记该生语、数、英三科考试成绩排名全班第一的事件为 A,B,C，则 A,B,C 两两相互独立且 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$，$P(C)=0.85$.

(1)"三科成绩均未获得第一名"可以用 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 表示，

$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$

$=[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]$

$=(1-0.9)(1-0.8)(1-0.85)=0.003$，

所以三科成绩均未获得第一名的概率是0.003.

(2)"恰有一科成绩未获得第一名"可以用 $(\overline{A}BC)\cup(A\overline{B}C)\cup(AB\overline{C})$ 表示.

由于事件 $\overline{A}BC$，$A\overline{B}C$ 和 $AB\overline{C}$ 两两互斥，

根据概率加法公式和相互独立事件的意义，

所求的概率为 $P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})$

$=P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})$

$=[1-P(A)]P(B)P(C)+P(A)[1-P(B)]P(C)+P(A)P(B)[1-P(C)]$

$=(1-0.9)\times0.8\times0.85+0.9\times(1-0.8)\times0.85+0.9\times0.8\times(1-0.85)$

$=0.329$，

所以恰有一科成绩未获得第一名的概率是0.329.

点睛 求复杂事件的概率，应先列出题中涉及的各事件，并用适当的符号表示，再理清各事件之间的关系，最后根据事件之间的关系选取相应的公式进行计算.

【变式训练3】某机械厂制造一种汽车零件，已知甲机床的正品率是0.96，乙机床的次品率是0.05，现从它们制造的产品中各任意抽取一件，试求：

(1)两件产品都是正品的概率；

(2)恰有一件是正品的概率；

(3)至少有一件正品的概率.

【解析】用 A 表示"从甲机床生产的产品中抽得正品"，用 B 表示"从乙机床生产的产品中抽得正品"，用 C 表示"抽得的两件产品中恰有一件是正品"，用 D 表示"抽得的两件产品中至少有一件正品"，则 $C=(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$，$D=C\cup(AB)$.

(1)由题意知，A 与 B 是相互独立事件，$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.05=0.95$，$P(A)=0.96$，

所以两件都是正品的概率为

$P(AB)=P(A)P(B)=0.96\times0.95=0.912$.

(2)由于事件 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥，所以恰有一件是正品的概率为 $P(C)=P[(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)]=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.96\times0.05+0.04\times0.95=0.086$.

(3)由于事件 AB 与 C 互斥，

所以 $P(D)=P[(AB)\cup C]=P(AB)+P(C)=0.912+0.086=0.998$.

随堂小练

1. 一袋中装有5只白球，3只黄球，在有放回地摸球中，用事件 A_1 表示第一次摸得白球，事件 A_2 表示第二次摸得白球，则事件 A_1 与 $\overline{A_2}$ 是 (A)

A. 相互独立事件　　B. 不相互独立事件

C. 互斥事件　　D. 对立事件

【解析】由题意可得 $\overline{A_2}$ 表示"第二次摸到的不是白球"，即 $\overline{A_2}$ 表示"第二次摸到的是黄球"，由于采用有放回地摸球，故每次是否摸到黄球或白球互不影响，故事件 A_1 与 $\overline{A_2}$ 是相互独立事件.

2. 在某段时间内，甲地不下雨的概率为0.3，乙地不下雨的概率为0.4，假设在这段时间内两地是否下雨互不影响，则这段时间内两地都下雨的概率是 (D)

A. 0.12　　B. 0.88　　C. 0.28　　D. 0.42

【解析】甲、乙两地不下雨的概率分别为0.3，0.4，则甲、乙两地下雨的概率为 $P=(1-0.3)(1-0.4)=0.42$.

3. 空军从应届高中生中选拔飞行员，已知这批学生体型合格的概率为 $\frac{1}{3}$，视力合格的概率为 $\frac{1}{6}$，其他几项标准合格的概率为 $\frac{1}{5}$，从中任选一名学生，则该生各项均合格的概率为(假设每项标准互不影响) (B)

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{1}{90}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{9}$

【解析】该生各项均合格的概率为 $P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{90}$.

4. 某大街在甲、乙、丙三处设有红绿灯，汽车在这三处因遇绿灯而通行的概率分别是 $\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}$，则汽车在这三处因遇红灯而停车一次的概率为 (D)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{7}{18}$

【解析】设汽车分别在甲、乙、丙三处通行为事件 A,B,C，则 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{2}{3}$.

停车一次即为事件 $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$，

故概率为 $P=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{18}$.

5.已知 A,B 是相互独立事件,且 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{2}{3}$,则 $P(A\overline{B})=\underline{\frac{1}{6}}$,$P(\overline{A}\,\overline{B})=\underline{\frac{1}{6}}$.

【解析】$\because P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{2}{3}$,

$\therefore P(\overline{A})=\frac{1}{2},P(\overline{B})=\frac{1}{3}$,

$\therefore P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

6.在一次三人象棋对抗赛中,甲胜乙的概率为 0.4,乙胜丙的概率为 0.5,丙胜甲的概率为 0.6,比赛顺序如下:第一局,甲对乙;第二局,第一局胜者对丙;第三局,第二局胜者对第一局败者;第四局,第三局胜者对第二局败者,则乙连胜四局的概率为 $\underline{0.09}$.

【解析】乙连胜四局,即乙先胜甲,然后胜丙,接着再胜甲,最后再胜丙,所以概率 $P=(1-0.4)\times0.5\times(1-0.4)\times0.5=0.09$.

温馨提示:请自主完成课后作业(四十八)

课后作业·单独成册

10.3 频率与概率

第1课时 频率的稳定性

学习目标	核心素养
1. 在具体情景中，了解随机事件发生的频率的稳定性与概率的意义.(重点) 2. 了解频率与概率的区别与联系.(重点、难点)	1. 通过频率的稳定性与概率的意义的学习，可培养学生的数学抽象的素养. 2. 借助频率的稳定性与概率的意义，提升学生的数学运算素养.

自主预习

情景导思

同一个随机事件在相同条件下在每一次试验中发生的概率都一样吗?

答案 概率是从数量上反映随机事件在一次试验中发生可能性的大小的一个量，是一个确定的数，是客观存在的，与每次试验无关；同一个随机事件在相同条件下在每一次试验中发生的概率都是一样的.

知新预学

1. 频率的稳定性

在任何确定次数的随机试验中，一个随机事件 A 发生的频率具有__随机性__. 一般地，随着试验次数 n 的增大，频率偏离概率的幅度会缩小，即事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于事件 A 发生的概率 $P(A)$. 因此我们可用__频率 $f_n(A)$__估计__概率 $P(A)$__.

2. 频率与概率的关系

概率是可以通过频率来“测量”的，或者说频率是概率的一个近似值. 概率从数量上反映了一个事件发生的可能性的大小.

小试牛刀

1. 抛掷一枚质地均匀的硬币 1 000 次，那么第 999 次出现正面朝上的概率是 (D)

A. $\frac{1}{999}$ B. $\frac{1}{1\ 000}$ C. $\frac{999}{1\ 000}$ D. $\frac{1}{2}$

【解析】抛掷一枚质地均匀的硬币 1 000 次，每一次出现正面朝上的概率均为 $\frac{1}{2}$. 故选 D.

2. 某医院治疗一种疾病的治愈率为 $\frac{1}{5}$，前 4 位病人都未治愈，则第 5 位病人的治愈率为 (B)

A. 1 B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. 0

【解析】治愈率为 $\frac{1}{5}$，表明每位病人被治愈的概率均为 $\frac{1}{5}$，并不是 5 人中必有 1 人被治愈. 故选 B.

3. 下列说法正确的是__①④⑤__.

①频率反映事件发生的频繁程度，概率反映事件发生的可能性大小；

②做 n 次随机试验，事件 A 发生 m 次，则事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 就是事件 A 发生的概率；

③频率可以用百分率表示，而概率不能；

④频率是不能脱离具体的 n 次试验的试验值，而概率是具有确定性的不依赖于试验次数的理论值；

⑤频率是概率的近似值，概率是频率的稳定值.

【解析】由频率与概率的意义知，①正确；由频率与概率之间的关系知，②不正确；③不正确，百分率通常是指概率；④，⑤正确.

4. 从某自动包装机包装的食盐中，随机抽取 20 袋，测得各袋的质量分别为(单位:g)：

492 496 494 495 498 497 501 502 504 496

497 503 506 508 507 492 496 500 501 499

根据频率分布估计总体分布的原理，该自动包装机包装的袋装食盐质量在 497.5～501.5 g 之间的概率约为__0.25__.

【解析】袋装食盐质量在 497.5 g～501.5 g 之间的共有 5 袋，所以其概率约为 $\frac{5}{20}=0.25$.

5. 某中学要在高一年级的二、三、四班中任选一个班级参加社区服务活动，有人提议用如下方法选班级：掷两枚硬币，正面向上记作 2 点，反面向上记作 1 点，两枚硬币的点数和是几，就选几班，你认为这种方法公平吗?

【解析】两枚硬币的点数和可列下表：

	1 点	2 点
1 点	2	3
2 点	3	4

很明显，试验的结果共有 4 种，而点数 3 占了两种，点数 2 和 4 各占一种，因此，每个班被选中的概率是不同的，这种选法是不公平的.

互动课堂

合作探究

探究1 概率的定义

【例1】解释下列概率的意义：

(1)某厂生产产品合格的概率为0.9；

(2)一次抽奖活动中，中奖的概率为0.2.

【解析】(1)说明该厂产品合格的可能性为90%，也就是说，100件该厂的产品中大约有90件是合格品.

(2)说明参加抽奖的人中有20%的人可能中奖，也就是说，若有100人参加抽奖，约有20人中奖.

点睛 概率从数量上反映了一个事件发生的可能性的大小，概率意义下的"可能性"是大量随机事件的客观规律，与我们日常所说的"可能""估计"是不同的.

【变式训练1】任取一个由50名同学组成的班级(称为一个标准班)，至少有两名同学的生日在同一天(记为事件A)的概率是0.97.据此我们知道 (D)

A.取定一个标准班，事件A发生的可能性是97%

B.取定一个标准班，事件A发生的概率大概是0.97

C.任意取定10 000个标准班，其中大约9 700个班发生事件A

D.随着抽取的标准班数n不断增大，事件A发生的频率逐渐稳定在0.97，在它附近摆动

【解析】对于给定的一个标准班来说，事件A发生的可能性是0或1，故A与B错误；对于任意取定10 000个标准班，在极端情况下，事件A有可能都不发生，故C错误，请注意，本题中A，B，C选项中错误的关键原因是"取定"这两个字，表示"明确了结果，结果是确定的".故选D.

探究2 概率与频率的关系及求法

【例2】下面是某批乒乓球质量检查结果表：

抽取球数	50	100	200	500	1 000	2 000
优等品数	45	92	194	470	954	1 902
优等品出现的频率						

(1)在上表中填上优等品出现的频率；

(2)估计该批乒乓球优等品的概率是多少？(精确到0.01)

(3)若抽取乒乓球的数量为1 700只，则优等品的数量大约为多少？

【解析】(1)如下表所示：

抽取球数	50	100	200	500	1 000	2 000
优等品数	45	92	194	470	954	1 902
优等品出现的频率	0.9	0.92	0.97	0.94	0.954	0.951

(2)从表中数据可以看出，这批乒乓球优等品的概率是0.95.

(3)由优等品的概率为0.95，则抽取1 700只乒乓球时，优等品数量为$1\ 700\times0.95=1\ 615$.

点睛 如果随机事件A在n次试验中发生了m次，则当试验的次数n很大时，可以将事件A发生的频率$\frac{m}{n}$作为事件A的概率的近似值.

【变式训练2】某人将一枚硬币连掷10次，正面朝上的情况出现了8次，若用A表示"正面朝上"这一事件，则A的 (B)

A.概率为$\frac{4}{5}$ B.频率为$\frac{4}{5}$

C.频率为8 D.概率接近于0.8

【解析】做n次随机试验，事件A发生了m次，则事件A发生的频率为$\frac{m}{n}$.如果多次进行试验，事件A发生的频率总在某个常数附近摆动，那么这个常数才是事件A的概率，故$\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$为事件A的频率.故选B.

随堂小练

1.从存放号码分别为1，2，…，10的卡片的盒子中，有放回地取100次，每次取一张卡片，并记下号码，统计如下：

卡片号码	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
取到的次数	13	8	5	7	6	13	18	10	11	9

则取到的号码为奇数的频率是 (A)

A.0.53 B.0.5 C.0.47 D.0.37

【解析】$\frac{13+5+6+18+11}{100}=0.53$.故选A.

2.下列结论正确的是 (C)

A.设事件A的概率为$P(A)$，则必有$0<P(A)<1$

B.事件A的概率$P(A)=0.999$，则事件A是必然事件

C.用某种药物对患有胃溃疡的500名病人进行治疗，结果有380人有明显疗效.现在胃溃疡的病人服用此药，则估计有明显疗效的可能性为76%

D.某奖券的中奖率为50%，则某人购买此奖券10张，一定有5张中奖

【解析】A项不正确，因为$0\leqslant P(A)\leqslant1$；若事件$A$是必然事件，则$P(A)=1$，故B项不正确；对于D项，奖券的中奖率为50%，若某人购买此奖券10张，则可能会有5张中奖，所以D项不正确.故选C.

3.某地气象局预报说，明天本地降雨的概率为80%，则下列解释：

①明天本地有80%的区域降雨，20%的区域不降雨；
②明天本地有80%的时间降雨，20%的时间不降雨；
③明天本地降雨的可能性是80%.
其中正确的是__③__.

【解析】①②显然不正确，因为80%的概率是说降雨的概率，而不是说80%的区域降雨或80%的时间降雨.

4.将一枚质地均匀的硬币连掷两次，则至少出现一次正面向上与两次均出现反面向上的概率比为__3∶1__.

【解析】将一枚质地均匀的硬币连掷两次有以下情形：(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反).至少出现一次正面向上有3种情形，两次均出现反面向上有1种情形，故答案为3∶1.

5.利用简单随机抽样的方法抽取某校200名学生，其中戴眼镜的学生有123人，若在这个学校随机调查一名学生，则他戴眼镜的概率约是__0.615__.

【解析】样本中的学生戴眼镜的频率为$\frac{123}{200}=0.615$，所以随机调查一名学生，他戴眼镜的概率约为0.615.

温馨提示：请自主完成课后作业(四十九)
课后作业·单独成册

第2课时　随机模拟

学习目标	核心素养
1. 了解随机数的意义，能用计算机随机模拟法估计事件的概率.（重点） 2. 应用概率解决实际问题.（重点、难点）	1. 通过随机模拟，利于培养数学抽象素养. 2. 借助随机模拟的简单应用，提升直观想象素养.

自主预习

情景导思

用频率估计概率，需要做大量的重复试验，有没有其他方法可以替代试验呢？我们知道，利用计算器或计算机软件可以产生随机数. 实际上，我们可以根据不同的随机试验，构建相应的随机数模拟试验，这样就可以快速进行大量重复试验了.

知新预学

1. 随机数

<u>随机数</u>就是在一定范围内随机产生的数，并且得到这个范围内的每一个数的机会一样.

2. 计算机随机模拟法或蒙特卡洛方法

建立一个概率模型，它与某些我们感兴趣的量有关，然后设计适当的试验，并通过这个试验的结果来确定这些量按照以上思路建立起来的方法称为计算机随机模拟法或蒙特卡洛方法.

小试牛刀

1. 用随机模拟的方法估计概率时，其准确程度决定于（　B　）

A. 产生的随机数的大小　　B. 产生的随机数的个数

C. 随机数对应的结果　　D. 产生随机数的方法

【解析】用随机模拟的方法估计概率时，产生的随机数越多，准确程度越高. 故选B.

2. 用随机模拟的方法求得某概率模型的概率为 m，其实际概率的大小为 n，则（　D　）

A. $m>n$　　B. $m<n$

C. $m=n$　　D. m 是 n 的近似值

【解析】随机模拟法下的概率是对概率的估计. 故选D.

互动课堂

合作探究

探究1　随机数的产生

【例1】要产生1～25之间的随机整数，你有哪些方法？

【解析】解法一：可以把25个大小形状相同的小球分别标上1，2，3，…，24，25，放入一个袋中，把它们充分搅拌，然后从中摸出一个，这个球上的数就称为随机数，放回后重复以上过程，就得到一系列的1～25之间的随机整数.

解法二：可以利用计算机产生随机数，以Excel为例：

（1）选中A1单元格，输入"=RANDBETWEEN(1，25)"，按Enter键，则在此单元格中的数是随机产生的；

（2）选中A1单元格，将鼠标指向右下角的黑点，按住鼠标左键拖动到第100行，则在A1至A100的单元格中均为随机产生的1～25之间的整数，这样我们就很快得到了100个1～25之间的随机整数，相当于重复做了100次随机试验.

点睛 产生随机数方法的比较

方法	抽签法	用计算器或计算机产生
优点	保证机会均等	操作简单，省时、省力
缺点	耗费大量人力、物力、时间，或不具有实际操作性	由于是伪随机数，故不能保证完全等可能

【变式训练1】某校高一年级共1 200名学生，期中考试时如何把学生分配到40个考场中去？

【解析】要把1 200人分到40个考场，每个考场30人，可用计算机完成.

（1）按班级、学生顺序把学生档案输入计算机.

（2）用随机函数按顺序给每个学生一个随机数（每人都不相同）.

（3）使用计算机的排序功能按随机数从小到大排列，可得到1 200名学生的考试号1，2，…，1 200，然后1～30为第一考场，31～60为第二考场，依次类推.

探究2　用随机模拟的方法估计概率

【例2】天气预报说，在今后的三天中，每一天下雨的概率均为40%，用随机模拟的方法估计这三天中恰有两天下雨的概率. 可利用计算机产生0～9之间的整数值的随机数，如果我们用1，2，3，4表示下雨，用5，6，7，8，9，0表示不下雨，顺次产生的随机数如下：

907　966　191　925　271　932　812　458　569　683

631　257　393　027　556　488　730　113　137　989

则这三天中恰有两天下雨的概率约为（　B　）

A. $\frac{13}{20}$　　B. $\frac{7}{20}$　　C. $\frac{9}{20}$　　D. $\frac{11}{20}$

【解析】由题意知模拟三天中恰有两天下雨的结果，经随机模拟产生了20组随机数，在这20组随机数中表示三天中恰有两天下雨的有：191，271，932，812，631，393，137，共7组随机数，所以所求概率约为 $\frac{7}{20}$.

点睛 用随机模拟的方法求事件概率的方法.

在使用整数随机数模拟试验时,首先要确定随机数的范围和用哪个代表试验结果.

(1)试验的基本结果是等可能的,基本事件的总数即为产生随机数的范围,每个随机数代表一个基本事件.

(2)研究等可能事件的概率时,用按比例分配的方法确定表示各个结果的数字个数及总个数.

【变式训练 2】通过模拟试验,产生了 20 组随机数如下:

7130	3013	7055	7430	7740
4122	7884	2604	3346	0952
6107	9706	5774	5725	6576
5929	1768	6071	9138	6254

每组随机数中,如果恰有三个数在 1,2,3,4,5,6 中,则表示恰有三次击中目标,问四次射击中恰有三次击中目标的概率约为 (B)

A. $\frac{3}{20}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{9}{20}$

【解析】在 20 组随机数值中,恰好有三个数在 1,2,3,4,5,6 中的共有 4 组,即 3013,2604,5725,6576,所以四次射击中,恰好三次击中目标的概率约为 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$. 故选 B.

随堂小练

1. 在集合{1,2,3,4,5}中随机选一个元素,事件 A="这个元素是奇数",事件 B="这个元素是偶数",则 $P(AB)=$ (D)

A. 1　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{6}{25}$　　D. 0

【解析】由于事件 A 与 B 不能同时发生,且事件 A 与 B 的并事件是必然事件,所以事件 A 与 B 是互斥且对立事件,所以 $P(AB)=0$. 故选 D.

2. 掷两枚骰子,用随机模拟方法估计出现点数之和为 9 的概率时,产生的整数值随机数中,每几个数字为一组 (B)

A. 1　　B. 2　　C. 9　　D. 12

【解析】由于掷两枚骰子,所以产生的整数值随机数中,每 2 个数字为一组. 故选 B.

3. 已知某运动员每次投篮命中的概率都为 40%. 现采用随机模拟的方法估计该运动员三次投篮恰有两次命中的概率:先由计算器产生 0 到 9 之间取整数值的随机数,指定 1,2,3,4 表示命中,5,6,7,8,9,0 表示未命中;再以每三个随机数为一组代表三次投篮的结果. 经随机模拟产生了如下 20 组随机数:

685	966	191	925	271	932	812	458	569	683
431	257	393	027	556	488	730	113	537	698

据此估计,该运动员三次投篮恰有两次命中的概率为 (B)

A. 0.35　　B. 0.25　　C. 0.20　　D. 0.15

【解析】易知 20 组随机数中表示恰有两次命中的数据有 191,271,932,812,393,所以 $P=\frac{5}{20}=0.25$. 故选 B.

4. 在利用整数随机数进行随机模拟试验中,整数 a 到整数 b 之间的每个整数出现的可能性是 $\underline{\frac{1}{b-a+1}}$.

【解析】$[a,b]$中共有 $b-a+1$ 个整数,每个整数出现的可能性相等,所以每个整数出现的可能性是 $\frac{1}{b-a+1}$.

5. 在一个盒中装有 10 支圆珠笔,其中 7 支一级品,3 支二级品,任取 1 支,用随机模拟的方法求取到一级品的概率.

【解析】设事件 A="取到一级品".

(1)用计算机的随机函数"RANDBETWEEN(1,10)"或计算器产生 1 到 10 之间的整数随机数,分别用 1,2,3,4,5,6,7 表示取到一级品,用 8,9,10 表示取到二级品.

(2)统计试验总次数 N 及其中出现 1 至 7 之间数的次数 N_1.

(3)计算频率 $f_n(A)=\frac{N_1}{N}$,即为事件 A 的概率的近似值.

温馨提示:请自主完成课后作业(五十)

课后作业 · 单独成册

三、知能拓展

概率复习

核心梳理

1. 频率与概率

频率是概率的近似值，是随机的，随着试验的不同而变化；概率是多次的试验中频率的稳定值，是一个常数，不要用一次或少数次试验中的频率来估计概率.

2. 求较复杂概率的常用方法

(1)将所求事件转化为彼此互斥的事件的和；

(2)先求其对立事件的概率，然后再应用公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$求解.

3. 古典概型概率的计算

计算时，要分清基本事件的总数 n 与事件 A 包含的基本事件的个数 m，再利用公式 $P(A)=\frac{m}{n}$求解. 有时需要用列举法把基本事件一一列举出来，在列举时必须按某一顺序做到不重不漏.

4. 互斥事件与相互独立事件的区别

互斥事件是不可能同时发生的两个事件，而相互独立事件则是一个事件发生与否对另外一个事件不产生影响的两个事件.

重难突破

要点1 频率与概率的区别

频率反映了一个随机事件出现的频繁程度，它的值等于随机事件发生的次数与试验总次数的比. 频率是随机的，在试验前不能确定，做同样次数的重复试验得到的某事件发生的频率不一定相同. 概率是一个确定的值，是客观存在的，与每次试验无关，与试验次数也无关.

【例1】连续抛掷一枚硬币10次，落地后正面向上出现了6次，设"抛一次硬币，正面向上"为事件 A，则下列说法正确的有 ④⑤ .

①$P(A)=\frac{3}{5}$；②$P(A)\approx\frac{3}{5}$；③再连续抛掷该硬币10次，落地后出现正面的次数还是6；④事件 A 发生的频率为$\frac{3}{5}$；⑤无论哪一次抛，硬币落地后正面向上的概率相同.

【解析】④⑤正确. 在一次试验中，事件 A 发生的概率为$\frac{1}{2}$，再连续抛掷该硬币10次，落地后出现正面的次数不确定.

点睛 只有当频率值在某一常数附近摆动时，才能将此常数近似看作该事件发生的概率. 现实生活中很多事件的概率是难以确切得到的，鉴于随机事件的发生带有随机性的同时又存在一定的规律性，故一般通过大量的重复试验，用随机事件的频率来估计概率.

【变式训练1】一个不透明的袋中装有大小质地相同的红、白两种颜色的小球，某学习小组做摸球试验，每次从袋中摸出一个球，记下颜色后放回，搅匀后再摸. 试验的部分数据如下表：

摸球次数	30	60	90	120	150	180	210	270	300
摸到红球的次数	6		25	31	38	45	53	67	
摸到红球的频率		0.300							0.247

(1)将表格补充完整；(所求频率保留3位小数)

(2)从中随机摸一个球，估计摸到红球的概率.(保留2位小数)

【解析】(1)第二行依次填：18，74.

第三行依次填：0.200，0.278，0.258，0.253，0.250，0.252，0.248.

(2)由(1)知，虽然抽取次数不同，所得频率值不同，但随试验次数的增加，频率在常数0.250附近摆动，故 $P\approx0.25$.

要点2 概率加法公式的应用

概率的加法公式是计算概率的一个最基本的公式，根据它可以计算一些复杂事件的概率. 概率的加法公式可推广为若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此互斥(两两互斥)，则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$，即彼此互斥事件和的概率等于各个事件发生的概率之和. 用此公式时，首先要判断事件是否互斥，如果事件不互斥，就不能用此公式.

【例2】由经验得知，某大型超市付款处排队等候付款的人数及其概率如下表：

排队人数	0	1	2	3	4	5人及以上
概率	0.10	0.16	0.30	0.30	0.10	0.04

求：(1)至多2人排队的概率；

(2)至少2人排队的概率.

【解析】(1)记"没有人排队"为事件 A，"1人排队"为事件 B，"2人排队"为事件 C，则 A,B,C 彼此互斥.

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.10+0.16+0.30=0.56$.

(2)记"至少2人排队"为事件 D，"少于2人排队"为事件

$A\cup B$，那么事件 D 与事件 $A\cup B$ 是对立事件，则 $P(D)=P(\overline{A\cup B})=1-[P(A)+P(B)]=1-(0.10+0.16)=0.74$.

点睛 应用概率加法公式求概率的前提有两个：一是所求事件是几个事件的和，二是这几个事件彼此互斥. 在应用概率加法公式前，一定要弄清各事件之间的关系，把一个事件分拆为几个彼此互斥的事件的和，再应用公式求解所求概率.

【变式训练 2】甲、乙、丙、丁 4 人同时参加一场等级考试，已知恰有 1 人过关(事件 A)的概率为 0.198，恰有 2 人过关(事件 B)的概率为 0.38，恰有 3 人过关(事件 C)的概率为 0.302，4 人都过关(事件 D)的概率为 0.084. 求：

(1)至少有 2 人过关的概率；

(2)至多有 3 人过关的概率.

【解析】"至少有 2 人过关"即事件 $B\cup C\cup D$. "至多有 3 人过关"即事件 A,B,C 与事件"4 人均未过关"的并事件，其对立事件为 D.(注意"4 人均未过关"这种可能情况)

由条件知，事件 A,B,C,D 彼此互斥.

(1)$P_1=P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=0.766$.

(2)$P_2=P(\overline{D})=1-P(D)=1-0.084=0.916$.

要点 3 相互独立事件的概率计算

判断两个事件是否相互独立，就是看一个事件的发生对另外一个事件有没有影响. 没有影响就是相互独立事件，有影响就不是相互独立事件. 理清事件之间的关系后再选取相应概率公式计算.

【例 3】甲、乙、丙三人参加某次招聘会，假设甲被聘用的概率为 $\frac{2}{5}$，甲、丙两人同时不被聘用的概率是 $\frac{6}{25}$，乙、丙两人同时被聘用的概率是 $\frac{3}{10}$，且三人各自能否被聘用相互没有影响. 求乙、丙两人各自被聘用的概率.

【解析】记甲、乙、丙各自能被聘用的事件为 A_1,A_2,A_3，由已知 A_1,A_2,A_3 相互独立，

且满足 $\begin{cases}P(A_1)=\frac{2}{5},\\ [1-P(A_1)][1-P(A_3)]=\frac{6}{25},\\ P(A_2)P(A_3)=\frac{3}{10}.\end{cases}$

解得，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(A_3)=\frac{3}{5}$.

∴ 乙、丙被聘用的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$.

点睛 求复杂事件的概率的一般步骤：

(1)列出题中涉及的事件；

(2)理清事件之间的关系(两个事件是互斥还是对立，或者相互独立)，列出关系式；

(3)选取恰当的概率公式计算.

【变式训练 3】甲、乙两名同学参加一项射击比赛，其中任何一人每射击一次击中目标得 2 分，未击中目标得 0 分. 已知甲、乙两人射击互不影响，且命中率分别为 $\frac{3}{5}$ 和 p. 若甲、乙两人各射击一次，得分之和为 2 的概率为 $\frac{9}{20}$，求 p 的值.

【解析】设"甲射击一次，击中目标"为事件 A，"乙射击一次，击中目标"为事件 B，则"甲射击一次，未击中目标"为事件 $\overline{A}$，"乙射击一次，未击中目标"为事件 $\overline{B}$，则 $P(A)=\frac{3}{5}$，$P(\overline{A})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，$P(B)=p$，$P(\overline{B})=1-p$，依题意得 $\frac{3}{5}\times(1-p)+\frac{2}{5}\times p=\frac{9}{20}$，解得 $p=\frac{3}{4}$.

要点 4 互斥事件与对立事件

1. "互斥事件"和"对立事件"都是就两个事件而言的，互斥事件是不可能同时发生的两个事件，也就是说互斥事件至多有一个发生，也有可能两个都不发生，而对立事件是其中必有一个发生的互斥事件. 因此，对立事件必须是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件，也就是说对立事件是互斥事件的充分不必要条件.

2. 从集合的角度理解：两个互斥事件对应的基本事件所组成的集合的交集为空集，并集可能是全集，也可能不是全集；当 A,B 是对立事件时，其交集为空集，并集是全集.

3. 互斥事件之间的关系中的"不能同时发生"体现了分类讨论的原则"不重复"，而"不遗漏"则表现在所有互斥事件的和是整个事件(必然事件).

【例 4】袋中有红、黄、白 3 种颜色的球各 1 个，从中任取 1 个，有放回地抽取 3 次，求 3 个球颜色不全相同的概率.

【解析】记"3 个球颜色全相同"为事件 A，则所求事件为 A 的对立事件.

∵"3 个球颜色全相同"又可分为"3 个全是红球(事件 B)""3 个全是黄球(事件 C)""3 个全是白球(事件 D)"，且它们彼此互斥，故 3 个球颜色全相同即为事件 $B+C+D$，

由于红球、黄球、白球的个数一样，

故有 $P(B)=P(C)=P(D)=\frac{1}{27}$，

∴$P(A)=P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{1}{9}$，

∴有 $P(\overline{A})=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

即 3 个球颜色不全相同的概率是 $\frac{8}{9}$.

点睛 本题可将所求事件转化为彼此互斥的事件的和，但比较麻烦，故转化为其对立事件求解，体现了"正难则反"的思想. 注意"3 个颜色全相同"可分为三个彼此互斥的基本事件，它的对立事件为"3 个颜色不全相同".

【变式训练 4】一个不透明的袋中装入 4 个白球与 4 个黑球，从中任意摸出 3 个球.

(1)可能发生哪些事件？

(2)指出其中每个事件的互斥事件;

(3)事件"至少摸出1个白球"是哪几个事件的和事件? 它的对立事件是哪个事件?

【解析】(1)以白球或黑球的个数作为讨论标准,可能发生下列事件:

①摸出3个白球,记为事件 A;

②摸出2个白球,1个黑球,记为事件 B;

③摸出1个白球,2个黑球,记为事件 C;

④摸出3个黑球,记为事件 D.

(2)事件 A,B,C,D 彼此互斥;

(3)"至少摸出1个白球"的事件为 A,B,C 的和事件,即"至少摸出1个白球"的对立事件是事件 D.

要点5 解古典概型的注意事项

解古典概型问题时,要牢牢抓住它的两个特点.(1)有限性:做一次试验,可能出现的结果为有限个,即只有有限个不同的基本事件.(2)等可能性:每个基本事件发生的可能性是相等的.其计算公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 也比较简单,但是这类问题的解法多样,技巧性强.

【例5】从1,2,3,4,5这五个数字中任取三个不同的数字,求下列事件的概率:(1)A="三个数字中不含1和5";(2)B="三个数字中含1或5".

【解析】(1)分析这个试验的所有可能结果为:(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5),共10种.

事件 A 为(2,3,4),故 $P(A)=\frac{1}{10}$.

(2)事件 B 的所有可能结果为:(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5),共9种.故 $P(B)=\frac{9}{10}$.

点睛 在计算事件数目时,要做到不重不漏,如 B 中可分为含1的:(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5).含5的:(1,2,5),(1,3,5),(2,3,5),(3,4,5),(1,4,5),(2,4,5).在归于集合 B 中时,(1,2,5),(1,3,5),(1,4,5)这三个不能重复计算.

【变式训练5】有三个完全相同的小球 a,b,c,随机放入甲、乙两个盒子中,求两个盒子都不空的概率.

【解析】a,b,c 三个小球随机放入甲、乙两个盒子的基本事件为:

甲盒	a,b,c	a,b	a	a,c	b,c	b	c	空
乙盒	空	c	b,c	b	a	c,a	a,b	a,b,c

两个盒子都不空的对立事件是至少有一个盒子为空,所包含事件:甲盒子 a,b,c,乙盒子空;甲盒子空,乙盒子 a,b,c,共两个,故 $P=1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$.

拓展提升

1.齐王与田忌赛马,田忌的上等马优于齐王的中等马,劣于齐王的上等马;田忌的中等马优于齐王的下等马,劣于齐王的中等马;田忌的下等马劣于齐王的下等马.现齐王与田忌各出上等马、中等马、下等马一匹,共进行三场比赛,规定:每一场双方均任意选一匹马参赛,且每匹马仅参赛一次,胜两场或两场以上者获胜.则田忌获胜的概率为 (B)

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{6}$　C. $\frac{1}{9}$　D. $\frac{1}{36}$

【解析】设齐王的上等马、中等马、下等马分别为 A,B,C,

设田忌的上等马、中等马、下等马分别为 a,b,c,

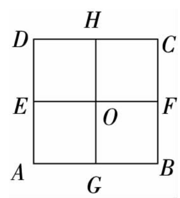
每一场双方均任意选一匹马参赛,且每匹马仅参赛一次,胜两场或两场以上者获胜.

基本事件有:(Aa,Bb,Cc),(Aa,Bc,Cb),(Ab,Ba,Cc),(Ab,Bc,Ca),(Ac,Bb,Ca),(Ac,Ba,Cb),共6个,

田忌获胜包含的基本事件有:(Ac,Ba,Cb),只有1个,

所以田忌获胜的概率为 $p=\frac{1}{6}$.故选B.

2.某城市有连接8个小区 A,B,C,D,E,F,G,H 和市中心 O 的整齐方格形道路网,每个小方格均为正方形,如图所示,某人从道路网中随机地选择一条最短路径,由小区 A 前往小区 H,则他经过市中心 O 的概率是 (B)



A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{3}{4}$

【解析】此人从小区 A 前往 H 的所有最短路径为:$A\to G\to O\to H$,$A\to E\to O\to H$,$A\to E\to D\to H$,共3条.

记"此人经过市中心 O"为事件 M,则 M 包含的基本事件为:$A\to G\to O\to H$,$A\to E\to O\to H$,共2条.

所以 $P(M)=\frac{2}{3}$,即他经过市中心的概率为 $\frac{2}{3}$,故选B.

3.两个实习生每人加工一个零件,加工为一等品的概率分别为 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{4}$,两个零件是否加工为一等品相互独立,则这两个零件中恰有一个一等品的概率为 (B)

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{5}{12}$　D. $\frac{1}{6}$

【解析】记两个零件中恰好有一个一等品的事件为 A,

即仅第一个实习生加工为一等品为事件 A_1,

仅第二个实习生加工为一等品为事件 A_2 两种情况,

则 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$,故选B.

4. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果.哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个质数的和”,在不超过 20 的质数中,随机选取两个不同的数,其和等于 20 的概率是 $\underline{\frac{1}{14}}$.

【解析】不超过 20 的质数有 2,3,5,7,11,13,17,19,共 8 个,

在不超过 20 的质数中,随机选取两个不同的数,

基本事件总数 $n=28$,

其和等于 20 包含的基本事件有:(3,17),(7,13),共 2 个,

所以其和等于 20 的概率是 $p=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$.

故答案为$\frac{1}{14}$.

5. 一个不透明的袋子中装有四个完全相同的小球,球上分别标有数字为 0,1,2,2,现甲从中摸出一个球后便放回,乙再从中摸出一个球,若摸出的球上数字大即获胜(若数字相同则为平局),则甲获胜的概率为 $\underline{\frac{5}{16}}$.

【解析】用(x,y)表示甲、乙摸球的号码,则甲获胜包括 5 个基本事件:(2,1),(2,1),(2,0),(2,0),(1,0).总的基本事件有:(0,1),(0,2),(0,2),(1,0),(1,2),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(2,0),(2,1),(2,2),(0,0),(1,1),(2,2),(2,2),所以甲获胜的概率为$\frac{5}{16}$.

温馨提示:请自主完成课后作业(五十一)

课后作业·单独成册