CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

第六章 计数原理

一、课标导向

课标要求

1. 两个基本计数原理

通过实例，了解分类加法计数原理、分步乘法计数原理及其意义.

2. 排列与组合

通过实例，理解排列、组合的概念；能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式.

3. 二项式定理

能用多项式运算法则和计数原理证明二项式定理，会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

知识网络

- 计数原理
  - 两个基本计数原理
    - 分类加法计数原理
    - 分步乘法计数原理
  - 排列与组合
    - 排列
      - 排列的概念
      - 排列数公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$
    - 组合
      - 组合的概念
      - 组合数公式 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
  - 二项式定理
    - 二项展开式
      - 通项 $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$
      - 二项式系数的性质
        - 对称性
        - 增减性与最大值
        - 各二项式系数的和

二、精讲精练

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第 1 课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

自主预习

知新预学

1. 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案，在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$ __$m+n$__ 种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$ __$m\times n$__ 种不同的方法.

小试牛刀

1. 判断正误.（正确的打"√"，错误的打"×"）

(1)在分类加法计数原理中，两类不同方案中的方法可以相同. （ × ）

(2)在分类加法计数原理中，每类方案中的方法都能完成这件事. （ √ ）

(3)在分步乘法计数原理中，完成每个步骤的方法是各不相同的. （ √ ）

(4)在分步乘法计数原理中，事情若是分两步完成的，那么做完其中任何一个单独的步骤都不能完成这件事，只有两个步骤都完成后，这件事情才算完成. （ √ ）

2. 某校开设 A 类选修课 3 门，B 类选修课 4 门. 若要求从两类选修课中选一门，则不同的选法共有 （ C ）

A. 3 种　　B. 4 种

C. 7 种　　D. 12 种

3. 现有 4 件不同款式的上衣和 3 条不同颜色的长裤. 如果一件上衣和一条长裤配成一套，则不同的搭配套数为 （ B ）

A. 7　　B. 12

C. 64　　D. 81

【解析】选 B. 完成一种搭配有两个步骤，第一步选上衣，有 4 种不同的选法；第二步选长裤，有 3 种不同的选法. 所以根据分步乘法计数原理共有 $4\times3=12$(种)不同的搭配.

4. 某学生去书店，发现 2 本好书，决定至少买其中一本，则购买方式共有__3__种.

5. 一个袋子里放有 6 个球，另一个袋子里放有 8 个球，每个球各不相同. 现从两个袋子里各取一个球，共有__48__种不同的取法.

互动课堂

合作探究

探究 1　分类加法计数原理

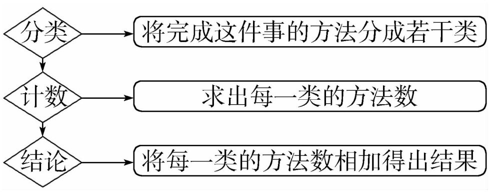
【例 1】在所有的两位数中，个位数字大于

十位数字的两位数共有多少个?

【解析】方法一:按十位上的数字分别是1,2,3,4,5,6,7,8分成8类,在每一类中满足条件的两位数分别有8个、7个、6个、5个、4个、3个、2个、1个.由分类加法计数原理知,满足条件的两位数共有8+7+6+5+4+3+2+1=36(个).

方法二:按个位上的数字分别是2,3,4,5,6,7,8,9分成8类,在每一类中满足条件的两位数分别有1个、2个、3个、4个、5个、6个、7个、8个.由分类加法计数原理知,满足条件的两位数共有1+2+3+4+5+6+7+8=36(个).

点睛 利用分类加法计数原理计数时的解题流程



【变式训练1】某校高三共有3个班,各班人数如下表:

班级	男生人数	女生人数	总人数
高三(1)班	30	20	50
高三(2)班	30	30	60
高三(3)班	35	20	55

(1)从3个班中选1名学生任学生会主席,有多少种不同的选法?

(2)从高三(1)班、(2)班男生或高三(3)班女生中选1名学生任学生会生活部部长,有多少种不同的选法?

【解析】(1)从3个班中选1名学生任学生会主席,共有3类不同的方案:

第1类,从高三(1)班中选出1名学生,有50种不同的选法;

第2类,从高三(2)班中选出1名学生,有60种不同的选法;

第3类,从高三(3)班中选出1名学生,有55种不同的选法.

根据分类加法计数原理,从3个班中选1名学生任学生会主席,共有50+60+55=165(种)不同的选法.

(2)从高三(1)班、(2)班男生或高三(3)班女生中选1名学生任学生会生活部部长,共有3类不同的方案:

第1类,从高三(1)班男生中选出1名学生,有30种不同的选法;

第2类,从高三(2)班男生中选出1名学生,有30种不同的选法;

第3类,从高三(3)班女生中选出1名学生,有20种不同的选法.

根据分类加法计数原理,从高三(1)班、(2)班男生或高三(3)班女生中选1名学生任学生会生活部部长,共有30+30+20=80(种)不同的选法.

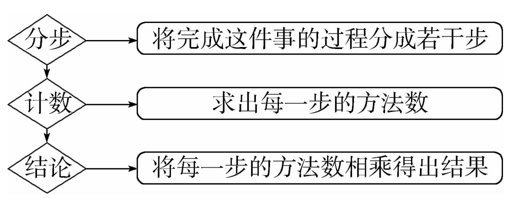
探究2 分步乘法计数原理

【例2】从$-2,-1,0,1,2,3$这6个数字中任选3个不重复的数字作为二次函数$y=ax^2+bx+c$的系数a,b,c,则可以组成多少条抛物线?

【解析】由题意知a不能为0,故a的值有5种选法;b的值也有5种选法;c的值有4种选法.

由分步乘法计数原理知,可以组成抛物线的条数为$5\times5\times4=100$.

点睛 利用分步乘法计数原理计数时的解题流程



【变式训练 2】从 1,2,3,4 这 4 个数字中选 3 个,组成无重复数字的整数,则满足下列条件的数各有多少个?

(1)三位数;

(2)三位偶数.

【解析】(1)分三步:第一步,排个位,有 4 种方法;

第二步,排十位,从剩下的 3 个数字中选 1 个,有 3 种方法;

第三步,排百位,从剩下的 2 个数字中选 1 个,有 2 种方法.

故共有 $4\times3\times2=24$(个)满足要求的三位数.

(2)分三步:第一步,排个位,只能从 2,4 中选 1 个,有 2 种方法;

第二步,排十位,从剩下的 3 个数字中选 1 个,有 3 种方法;

第三步,排百位,从剩下的 2 个数字中选 1 个,有 2 种方法.

故共有 $2\times3\times2=12$(个)满足要求的三位偶数.

探究 3 两个计数原理的综合应用

【例 3】某校组织学生参加社会实践活动,现有高一学生 50 人,高二学生 42 人,高三学生 30 人.

(1)若从中选 1 人作为总负责人,共有多少种不同的选法?

(2)若每年级各选 1 名负责人,共有多少种不同的选法?

(3)若从中选 2 人作为中心发言人,要求这 2 人要来自不同的年级,共有多少种不同的选法?

【解析】(1)从高一学生中选 1 人作为总负责人有 50 种选法;

从高二学生中选 1 人作为总负责人有 42 种选法;

从高三学生中选 1 人作为总负责人有 30 种选法.

由分类加法计数原理知,共有 $50+42+30=122$(种)选法.

(2)从高一学生中选 1 名负责人有 50 种选法;

从高二学生中选 1 名负责人有 42 种选法;

从高三学生中选 1 名负责人有 30 种选法.

由分步乘法计数原理知,共有 $50\times42\times30=63\ 000$(种)选法.

(3)从高一和高二学生中各选 1 人作为中心发言人,有 $50\times42=2\ 100$ (种)选法;

从高二和高三学生中各选 1 人作为中心发言人,有 $42\times30=1\ 260$(种)选法;

从高一和高三学生中各选 1 人作为中心发言人,有 $50\times30=1\ 500$(种)选法.

故共有 $2\ 100+1\ 260+1\ 500=4\ 860$(种)选法.

点睛 利用两个计数原理解题的策略

用两个计数原理解决具体问题时,首先,要分清是“分类”还是“分步”,区分“分类”还是“分步”的关键是看这种方法能否完成这件事情;其次,要清楚“分类”或“分步”的具体标准,在“分类”时要遵循“不重不漏”的原则,在“分步”时要正确设计“分步”的程序,注意步与步之间的连续性;有些题目中“分类”与“分步”同时进行,即“先分类后分步”或“先分步后分类”.

【变式训练 3】现有 3 名外科医生、5 名护士、2 名麻醉师.

(1)从这些人中选出 1 人外出参加学习,有多少种不同的选法?

(2)从这些人中选出 1 名外科医生、1 名护

士和 1 名麻醉师组成 1 个医疗小组,有多少种不同的选法?

【解析】(1)分三类:

第一类,选出的是外科医生,有 3 种选法;

第二类,选出的是护士,有 5 种选法;

第三类,选出的是麻醉师,有 2 种选法.

根据分类加法计数原理,共有 $3+5+2=10$(种)选法.

(2)分三步:

第一步,选 1 名外科医生,有 3 种选法;

第二步,选 1 名护士,有 5 种选法;

第三步,选 1 名麻醉师,有 2 种选法.

根据分步乘法计数原理,共有 $3\times5\times2=30$(种)选法.

随堂小练

1. 某一数学问题可用综合法和分析法两种方法证明,有 5 名同学只会用综合法证明,有 3 名同学只会用分析法证明. 现从这些同学中任选 1 名证明这个问题,不同的选法种数为 (A)

A. 8　　B. 15　　C. 18　　D. 30

【解析】选 A. 共有 $5+3=8$(种)不同的选法.

2. 体育场南侧有 4 个大门,北侧有 3 个大门. 某人到该体育场晨练,则他进、出门的方法有 (D)

A. 12 种　　B. 7 种

C. 14 种　　D. 49 种

【解析】选 D. 要完成进、出门这件事,需要分两步:

第一步进体育场,第二步出体育场.

第一步进门有 $4+3=7$(种)方法;

第二步出门也有 $4+3=7$(种)方法.

由分步乘法计数原理知,进、出门有 $7\times7=49$(种)方法.

3. 用数字 1,2,3,4,5 组成的无重复数字的四位偶数的个数为__48__.

【解析】得到无重复数字的四位偶数,首先排个位数字,在 2 和 4 中取一个,有 2 种取法;然后排前三位,在剩余的四个数字中选 3 个数字依次排上,共有 $4\times3\times2=24$(种)排法.

由分步乘法计数原理知,符合条件的四位偶数共有 $2\times24=48$(个).

4. 某商店有甲型号电视机 10 台,乙型号电视机 8 台,丙型号电视机 12 台. 现从这 3 种型号的电视机中各选 1 台检验,有多少种不同的选法?

【解析】从这 3 种型号的电视机中各选 1 台检验可分三步完成:

第一步,从甲型号中选 1 台,有 10 种不同的选法;

第二步,从乙型号中选 1 台,有 8 种不同的选法;

第三步,从丙型号中选 1 台,有 12 种不同的选法.

根据分步乘法计数原理,共有 $10\times8\times12=960$(种)不同的选法.

温馨提示:请自主完成课后作业(一)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时 计数原理的综合应用(习题课)

互动课堂

合作探究

探究 1 组数问题

【例 1】用 0,1,2,3,4 五个数字,

(1)可以组成多少个三位数字的密码?

(2)可以组成多少个三位数?

(3)可以组成多少个能被 2 整除的无重复数字的三位数?

【解析】(1)三位数字的密码,首位可以是 0,数字也可以重复,每个位置都有 5 种排法,共有 $5\times5\times5=125$(个)不同的三位数字的密码.

(2)三位数的首位不能为 0,但可以有重复数字,首先考虑首位的排法,除 0 外共有 4 种方法,第二、三位可以排 0,共有 $4\times5\times5=100$(个)不同的三位数.

(3)能被 2 整除的数即偶数,末位数字可取 0,2,4,因此,可以分两类,一类是末位数字是 0,则有 $4\times3=12$(种)排法;另一类是末位数字不是 0,则末位有 2 种排法,即 2 或 4,再排首位,因为 0 不能在首位,所以有 3 种排法,十位有 3 种排法,因此有 $2\times3\times3=18$(种)排法. 因而有 $12+18=30$(种)排法. 即可以组成 30 个能被 2 整除的无重复数字的三位数.

点睛 解决组数问题的方法

(1)明确特殊位置或特殊数字,是我们采用"分类"还是"分步"计数原理的关键. 一般按特殊位置(末位或首位)分类,分类中再按特殊位置(或特殊元素)优先的策略分步完成;如果直接分类情况较多,可采用间接法求解.

(2)要注意数字"0"不能排在多位数的最高位.

【变式训练 1】(1)四张卡片上分别标有数字"2""0""1""1",则这四张卡片可组成不同的四位数的个数为 (B)

A. 6　　B. 9

C. 12　　D. 24

(2)若一个三位数的十位数字比个位数字和百位数字都大,则称这个数为"伞数". 现从 1,2,3,4,5,6 这 6 个数字中任取 3 个数,组成无重复数字的三位数,其中"伞数"有 (C)

A. 120 个　　B. 80 个

C. 40 个　　D. 20 个

【解析】(1)选 B. 根据 0 的位置进行分类:第一类,0 在个位有 2 110,1 210,1 120,共 3 个;第二类,0 在十位有 2 101,1 201,1 102,共 3 个;第三类,0 在百位有 2 011,1 021,1 012,共 3 个,故这四张卡片可组成不同的四位数的个数为 9.

(2)选 C. 当十位数字为 3 时,个位数字和百位数字只能取 1,2,能组成 2 个"伞数";当十位数字为 4 时,个位数字和百位数字能取 1,2,3,能组成 $3\times2=6$(个)"伞数";当十位数字为 5 时,个位数字和百位数字能取 1,2,3,4,能组成 $4\times3=12$(个)"伞数";当十位数字为 6 时,个位数字和百位数字能取 1,2,3,4,5,能组成 $5\times4=20$(个)"伞数",所以共能组成 $2+6+12+20=40$(个)"伞数".

探究 2　选(抽)取与分配问题

【例 2】高三年级的三个班到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践，其中工厂甲必须有班级去，每班去哪个工厂可自由选择，则不同的分配方案有　　　(C)

A. 16 种　　B. 18 种

C. 37 种　　D. 48 种

【解析】方法一(直接法)：

按甲工厂分配的班情况进行分类，共分为三类：

第一类，三个班都去甲工厂，此时分配方案只有 1 种；

第二类，有两个班去甲工厂，剩下的一个班去另外三个工厂，分配方案共有 $3\times3=9$(种)；

第三类，有一个班去甲工厂，另外两个班去其他三个工厂，分配方案共有 $3\times3\times3=27$(种).

综上所述，不同的分配方案有 $1+9+27=37$(种).

方法二(间接法)：

先计算三个班自由选择去哪个工厂的总数，再扣除甲工厂无人去的情况，有 $4\times4\times4-3\times3\times3=37$(种)方案.

点睛 解决抽取(分配)问题的方法

(1)当涉及对象数目不大时，一般选用列举法、树状图法、框图法或图表法.

(2)当涉及对象数目很大时，一般有两种方法：①直接法：直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理. ②间接法：先去掉限制条件，计算所有的抽取方法数，再减去所有不符合条件的抽取方法数.

【变式训练 2】(1)某班有 3 名学生准备参加校运会的 100 m、200 m、跳高、跳远四项比赛. 如果每班每项限报 1 人，则这 3 名学生参赛的不同方法有　　　(A)

A. 24 种　　B. 48 种

C. 64 种　　D. 81 种

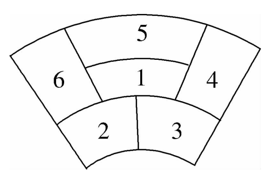
(2)某艺术小组有 9 人，每人至少会钢琴和小号中的一种乐器，其中 7 人会钢琴，3 人会小号，从中选出会钢琴与会小号的各 1 人，有多少种不同的选法？

【解析】(1)选 A. 由于每班每项限报 1 人，故当前面的学生选了某项之后，后面的学生不能再报. 由分步乘法计数原理，共有 $4\times3\times2=24$(种)不同的参赛方法.

(2)由题意可知，在艺术小组的 9 人中，有且仅有 1 人既会钢琴又会小号(把该人记为甲)，只会钢琴的有 6 人，只会小号的有 2 人. 把从中选出会钢琴与会小号各 1 人的方法分为两类. 第 1 类，甲入选，另 1 人只需从其他 8 人中任选 1 人，故这类选法共 8 种；第 2 类，甲不入选，则会钢琴的只能从 6 个只会钢琴的人中选出，有 6 种不同的选法，会小号的也只能从只会小号的 2 人中选出，有 2 种不同的选法，所以这类选法共有 $6\times2=12$(种). 因此共有 $8+12=20$(种)不同的选法.

探究 3　涂色(种植)问题

【例 3】某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分(如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种 1 种，且相邻部分不能栽种同样颜色的花，则共有多少种不同的栽种方法？



【解析】分两大类：

第一大类，6，5，1，2 四部分栽种 4 种不同

颜色的花,共分两步.

第一步,在6,5,1,2四部分栽种不同颜色的花,共有$4\times3\times2\times1=24$(种)不同栽法;

第二步,栽种3,4部分,又有两类.第1类,3与6栽种的颜色相同,4与2栽种的颜色相同,有1种栽法;第2类,3与5栽种的颜色相同,4与2或6栽种的颜色相同,有2种栽法,共有$1+2=3$(种)栽法.

由分步乘法计数原理,第一大类共有$24\times3=72$(种)不同的栽种方法.

第二大类,在6,5,1,2四部分中,2与5栽种的花颜色相同,可分三步.

第一步,栽种6,5,1部分,可从4种颜色的花中选3种进行栽种,有$4\times3\times2=24$(种)栽法;

第二步,栽种第2部分,与5相同,有1种栽法;

第三步,栽种3,4部分,又有两类.第1类,3与6相同,4栽种剩余的第4种颜色的花,有1种栽法;第2类,3栽种剩余第4种颜色的花,4与6栽种相同颜色的花,有1种栽法,共有2种栽法.

由分步乘法计数原理得,第二大类共有$24\times1\times2=48$(种)不同的栽种方法.故共有$72+48=120$(种)不同的栽种方法.

点睛 解决涂色(种植)问题的一般思路

涂色问题一般是综合利用两个计数原理求解,有几种常用方法:

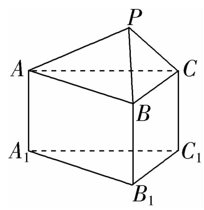
(1)按区域的不同,以区域为主分步计数,用分步乘法计数原理分析.

(2)以颜色为主分类讨论,适用于"区域、点、线段"等问题,用分类加法计数原理分析.

(3)将空间问题平面化,转化成平面区域的涂色问题.

对于种植问题,按种植顺序进行分步,用分步乘法计数原理计数;或按种植品种进行分类,用分类加法计数原理计数.

【变式训练3】如图所示的几何体是由一个三棱锥$P\text{-}ABC$与三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$组合而成的.现用3种不同颜色对这个几何体的表面涂色(底面$A_1B_1C_1$不涂色),要求相邻的面均不同色,则不同的涂色方案共有__12__种.



【解析】先涂三棱锥$P\text{-}ABC$的三个侧面,再涂三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$的三个侧面,由分步乘法计数原理知,共有$3\times2\times1\times2=12$(种)不同的涂法.

随堂小练

1.有A,B这2种类型的车床各1台,现有甲、乙、丙3名工人,其中甲、乙都会操作2种车床,丙只会操作A种车床.现从3名工人中选2名分别去操作以上车床,不同的选派方法有 (C)

A.6种 B.5种

C.4种 D.3种

【解析】选C.若选甲、乙二人,可以甲操作A种车床,乙操作B种车床,或甲操作B种车床,乙操作A种车床,共有2种选派方法;若选甲、丙二人,则只有甲操作B种车床,丙操作A种车床这一种选派方法;若选乙、丙二人,则只有乙操作B种车床,丙操作A种车床这一种选派方法.故共有$2+1+1=4$(种)不同的选派方法.

2. 由数字 1,2,3 组成的无重复数字的整数中,偶数的个数为 (D)

A. 15　　B. 12

C. 10　　D. 5

【解析】选 D. 分三类,第一类组成一位整数,偶数有 1 个;第二类组成两位整数,其中偶数有 2 个;第三类组成 3 位整数,其中偶数有 2 个. 由分类加法计数原理知共有 5 个偶数.

3. 从黄瓜、白菜、油麦菜、扁豆 4 种蔬菜中选出 3 种,分别种在不同土质的 3 块土地上,其中黄瓜必须种植,不同的种植方法有多少种?

【解析】方法一(直接法):若黄瓜种在第一块土地上,则有 $3\times2=6$(种)不同的种植方法. 同理,黄瓜种在第二块、第三块土地上均有 $3\times2=6$(种)不同的种植方法. 故不同的种植方法共有 $6\times3=18$(种).

方法二(间接法):从 4 种蔬菜中选出 3 种蔬菜种在 3 块土地上,有 $4\times3\times2=24$(种)方法,其中不种黄瓜有 $3\times2\times1=6$(种)方法,故不同的种植方法有 $24-6=18$(种).

4. 某文艺小组有 20 人,其中会唱歌的有 14 人,会跳舞的有 10 人. 现从中选出会唱歌与会跳舞的各 1 人参加演出,且既会唱歌又会跳舞的至多选 1 人,有多少种不同的选法?

【解析】由题意知,既会唱歌又会跳舞的有 $14+10-20=4$(人),只会唱歌的有 10 人,只会跳舞的有 6 人. 第一类,首先从只会唱歌的 10 人中选出 1 人,有 10 种不同的选法,从只会跳舞的 6 人中选出 1 人,有 6 种不同的选法,共有 $10\times6=60$(种)不同的选法;第二类,从既会唱歌又会跳舞的 4 人中选 1 人,再从只会跳舞的 6 人或只会唱歌的 10 人中选 1 人,共有 $4\times6+4\times10=64$(种)不同的选法. 所以共有 $60+64=124$(种)不同的选法.

温馨提示:请自主完成课后作业(二)

课后作业·单独成册

6.2 排列与组合

第 1 课时 排列与排列数公式

自主预习

知新预学

1. 排列

(1)一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，并按照__一定的顺序__排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

(2)两个排列相同的充要条件是：两个排列的元素__完全相同__，且元素的__排列顺序__也相同.

2. 排列数及排列数公式

排列数定义	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有__不同排列__的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号__A_n^m__表示
阶乘	正整数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘，用__$n!$__表示. 于是，n 个元素的全排列数公式可以写成 $A_n^n=$__$n!$__. 规定 $0!=$__1__
排列数公式	乘积式：$A_n^m=$__$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$__$(m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $m\leqslant n)$； 阶乘式：$A_n^m=$__$\dfrac{n!}{(n-m)!}$__$(m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $m\leqslant n)$
全排列	把 n 个不同的元素全部取出的一个排列，叫做 n 个元素的一个全排列. 这时，排列数公式中 $m=n$，即有 $A_n^n=$__$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$__

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)a,b,c 与 b,a,c 是同一个排列. (×)

(2)在同一个排列中，同一个元素不能重复出现. (√)

(3)在一个排列中，若交换两个元素的位置，该排列不发生变化. (×)

(4)从四个不同的元素中任取三个元素，只要元素相同，得到的就是相同的排列. (×)

2. 下列问题中，是排列问题的是 (A)

A. 由 1,2,3,4 四个数字组成无重复数字的四位数

B. 从 60 人中选 11 人组成足球队

C. 从 100 人中选 2 人进行抽样调查

D. 从 1,2,3,4,5 中选 2 个数组成集合

3. $A_4^2=$__12__，$A_3^3=$__6__.

4. 若 $A_{10}^m=10\times9\times\cdots\times5$，则 $m=$__6__.

互动课堂

合作探究

探究 1 排列概念的理解

【例 1】判断下列问题是否为排列问题：

(1)北京、上海、天津 3 个民航站之间的直达航线的飞机票的价格(假设往返的票价相同)；

(2)选 2 个小组分别去植树和种菜；

(3)选 2 个小组去种菜；

(4)选 10 个人组成 1 个学习小组；

(5)选 3 个人分别担任班长、学习委员、生活委员；

(6)某班 40 名学生在假期相互通信.

【解析】(1)票价只有 3 种，虽然机票是不同的，但票价是一样的，不存在顺序问题，所以不是排列问题.

(2)植树和种菜是不同的，存在顺序问题，是排列问题.

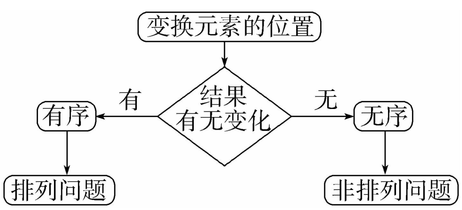
(3)和(4)不存在顺序问题，不是排列问题.

(5)每个人的职务不同，例如甲当班长或当学习委员是不同的，存在顺序问题，是排列问题.

(6)A 给 B 写信与 B 给 A 写信是不同的，所以存在顺序问题，是排列问题.

所以上述各题中(2)，(5)，(6)是排列问题.

点睛 判断一个具体问题是否为排列问题的方法



【变式训练 1】(1)从 1，2，3，4 这四个数字中，任选两个数做加、减、乘、除运算，分别计算它们的结果，其中有几种运算可以看作排列问题 (B)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

(2)判断下列问题是否为排列问题，并说明理由：

①从甲、乙、丙、丁四名同学中选出两名参加一项活动，其中一名同学参加活动 A，另一名同学参加活动 B；

②从甲、乙、丙、丁四名同学中选出两名参加一项活动；

③从所有互质的三位数中选出两个数求其和；

④从所有互质的三位数中选出两个数求其商；

⑤高二(1)班有四个空位，安排从外校转来的三个学生坐到这四个空位中的三个上.

【解析】(1)选 B. 因为加法和乘法满足交换律，所以选出两个数做加法和乘法时，结果与两个数字位置无关，故不是排列问题. 而减法、除法与两个数字的位置有关，故是排列问题.

(2)①是排列问题，因为选出的两名同学参加的是不同的活动，即相当于把选出的同学按顺序安排到两个不同的活动中.

②不是排列问题，因为选出的两名同学参加的是同一个活动，没有顺序之分.

③不是排列问题，因为选出的两个三位数之和对顺序没有要求.

④是排列问题，因为选出的两个三位数之商会因为分子、分母的顺序颠倒而发生变化，且这些三位数是互质的，不会产生选出的数不同而商的结果相同的可能性.

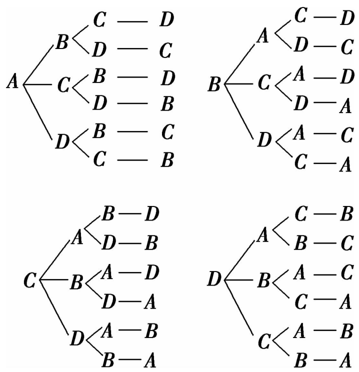
⑤是排列问题，可看作从四个空位中选出三个座位，分别安排给三个学生.

探究 2 排列的简单应用

【例 2】A，B，C，D 四个人坐成一排照相，有多少种坐法？将它们列举出来.

【解析】先安排 A 有 4 种坐法，安排 B 有 3 种坐法，安排 C 有 2 种坐法，安排 D 有 1 种坐法. 由分步乘法计数原理，有 $4\times3\times2\times1=24$(种)坐法.

画出树状图：



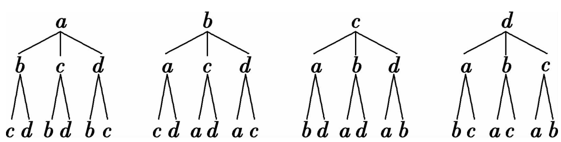
由树状图可知，所有坐法为：$ABCD$，$ABDC$，$ACBD$，$ACDB$，$ADBC$，$ADCB$，$BACD$，$BADC$，$BCAD$，$BCDA$，$BDAC$，$BDCA$，$CABD$，$CADB$，$CBAD$，$CBDA$，$CDAB$，$CDBA$，$DACB$，$DABC$，$DBAC$，$DBCA$，$DCAB$，$DCBA$.

点睛 画树状图法在解决元素个数不多的排列问题时，是一种比较有效的方法.

【变式训练 2】(1)写出从 4 个元素 a，b，c，d 中任取 3 个元素的所有排列.

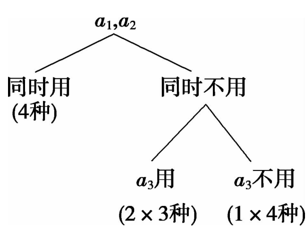
(2)某药品研究所研制了 5 种消炎药 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，4 种退热药 b_1，b_2，b_3，b_4. 现从中取两种消炎药和一种退热药同时进行疗效试验，但 a_1，a_2 两种药要求同时用或同时不用，a_3，b_4 两种药不能同时使用. 试写出所有不同的试验方法.

【解析】(1)由题意画出树状图：



故所有的排列为：abc，abd，acb，acd，adb，adc，bac，bad，bca，bcd，bda，bdc，cab，cad，cba，cbd，cda，cdb，dab，dac，dba，dbc，dca，dcb.

(2)如图，



由树状图可写出所有不同的试验方法如下：$a_1a_2b_1$，$a_1a_2b_2$，$a_1a_2b_3$，$a_1a_2b_4$，$a_3a_4b_1$，$a_3a_4b_2$，$a_3a_4b_3$，$a_3a_5b_1$，$a_3a_5b_2$，$a_3a_5b_3$，$a_4a_5b_1$，$a_4a_5b_2$，$a_4a_5b_3$，$a_4a_5b_4$，共 14 种.

探究 3 排列数公式的应用

【例 3】(1)计算：$\dfrac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$.

(2)解方程：$A_{2x+1}^4=140A_x^3$.

(3)用排列数表示$(55-n)(56-n)\cdots(69-n)(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n<55)$.

【解析】(1)$\dfrac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$

$=\dfrac{2\times8\times7\times6\times5\times4+7\times8\times7\times6\times5}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1-9\times8\times7\times6\times5}$

$=\dfrac{8\times7\times6\times5\times(8+7)}{8\times7\times6\times5\times(24-9)}=1$.

(2)根据原方程，x 应满足$\begin{cases}2x+1\geqslant4,\\x\geqslant3,x\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$解得 $x\geqslant3$，$x\in\mathbf{N}^*$.

根据排列数公式，原方程化为$(2x+1)\cdot2x(2x-1)(2x-2)=140x(x-1)(x-2)$.

因为 $x\geqslant3$，两边同时除以 $4x(x-1)$，得$(2x+1)(2x-1)=35(x-2)$，

即 $4x^2-35x+69=0$，

解得 $x=3$ 或 $x=\dfrac{23}{4}$(舍去).

所以原方程的解为 $x=3$.

(3)因为 $55-n$，$56-n$，$\cdots$，$69-n$ 中的最大数为 $69-n$，

且共有 $69-n-(55-n)+1=15$(个)，

所以$(55-n)(56-n)\cdots(69-n)=A_{69-n}^{15}$.

点睛 应用排列数公式的三个注意点

(1)准确展开：应用排列数公式展开时要注意展开式的项数要准确.

(2)合理约分：若运算式是分式形式，则要先约分后计算.

(3)合理组合:运算时结合数据特点,应用乘法的交换律、结合律进行数据的组合,可以提高运算的速度和准确性.

【变式训练 3】(1)(**多选题**)下列等式中,正确的是 (ABCD)

A. $(n+1)A_n^m=A_{n+1}^{m+1}$

B. $\dfrac{n!}{n(n-1)}=(n-2)!$

C. $A_n^m=A_n^1\cdot A_{n-1}^{m-1}$

D. $\dfrac{1}{n-m}A_n^{m+1}=A_n^m$

(2)解不等式:$A_8^x<6A_8^{x-2}$.

(3)求证:$A_{n+1}^m-A_n^m=mA_n^{m-1}$.

【解析】(1)选 ABCD. 通过计算可知选项 A,B,C,D 均正确.

(2)原不等式可转化为$\dfrac{8!}{(8-x)!}<6\times\dfrac{8!}{(10-x)!}$.

化简得 $x^2-19x+84<0$. 解得 $7<x<12$.

因为$\begin{cases}8\geqslant x,\\x-2\geqslant 1,\end{cases}$即 $3\leqslant x\leqslant 8$,且 $x\in\mathbf{N}^*$,所以 $x=8$,即不等式的解集为$\{x\,|\,x=8\}$.

(3)**证明**:左边$=\dfrac{(n+1)!}{(n+1-m)!}-\dfrac{n!}{(n-m)!}=\dfrac{n!}{(n-m)!}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n+1-m}-1\right)=\dfrac{n!}{(n-m)!}\cdot\dfrac{m}{n+1-m}=m\cdot\dfrac{n!}{(n+1-m)!}=mA_n^{m-1}$,故原等式成立.

随堂小练

1.(**多选题**)下列问题中,是排列问题的是 (AD)

A. 从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名分别参加数学和物理学习小组

B. 从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名参加一项活动

C. 从 a,b,c,d 这 4 个字母中取出 2 个

D. 从 1,2,3,4 这 4 个数字中取出 2 个组成一个两位数

【解析】选 AD. A 是排列问题,因为 2 名同学参加的活动与顺序有关;B 不是排列问题,因为 2 名同学参加的这项活动与顺序无关;C 不是排列问题,因为取出的 2 个字母与顺序无关;D 是排列问题,因为取出的 2 个数字还需要按顺序排成一列.

2. A,B,C 共 3 名同学排成“一”字形照相留念,所有排列的种数为 (C)

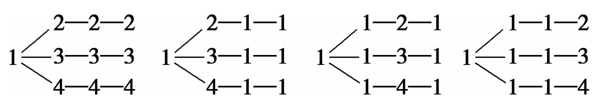
A. 3 B. 4 C. 6 D. 12

【解析】选 C. 所有的排法有 ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA,共 6 种.

3. 由 1,2,3,4 这 4 个数字组成的首位数字是 1,且恰有 3 个相同数字的四位数有 (B)

A. 9 个 B. 12 个 C. 15 个 D. 18 个

【解析】选 B. 本题要求首位数字是 1,且恰有 3 个相同的数字,用树状图表示如下:



由此可知共有 12 个.

4. $\dfrac{A_4^3}{5!}=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{5}\quad}$.

【解析】$\dfrac{A_4^3}{5!}=\dfrac{4\times3\times2}{5\times4\times3\times2\times1}=\dfrac{1}{5}$.

5. 从 0,1,2,3 这 4 个数字中,每次取出 3 个不同的数字排成一个三位数,写出其中大于 200 的所有三位数.

【解析】大于 200 的三位数的首位是 2 或 3,于是大于 200 的三位数有 201,203,210,213,230,231,301,302,310,312,320,321.

温馨提示:请自主完成课后作业(三)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时 排列的综合应用(习题课)

互动课堂

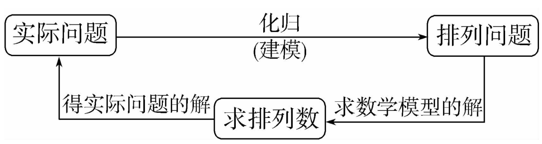
合作探究

探究 1 无限制条件的排列问题

【例 1】有 5 本不同的书,从中选 4 本送给 4 名同学,每人各 1 本,共有多少种不同的送法?

【解析】从 5 本不同的书中选出 4 本分别送给 4 名同学,对应于从 5 个不同元素中任取 4 个元素的一个排列,因此不同的送法种数是 $A_5^4=5\times4\times3\times2=120$,所以共有 120 种不同的送法.

点睛(1)利用排列与排列数解排列应用题的基本思想



(2)解简单排列应用题的思路

①认真分析题意,看能否把问题归结为排列问题;

②若是排列问题,则进一步分析,这里 n 个不同的元素指的是什么,以及从 n 个不同的元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素的每一种排列对应的是什么事件;

③运用排列数公式求解.

注意:解答相关的应用题时不要忽视 n 为正整数这一条件.

【变式训练 1】(1)把 3 张不同场次的电影票分给 10 人中的 3 人,分发种数为 (C)

A. 2 160　　B. 240

C. 720　　D. 120

(2)从 100 个两两互质的数中取出两个,其商的个数为 $\underline{A_{100}^2(或\ 9\ 900)}$.

【解析】(1)选 C. 有 $A_{10}^3=720$(种)不同的分法.

(2)从 100 个两两互质的数中取出两个数,分别作为商的分子和分母,排列数为 A_{100}^2.

探究 2 元素"相邻"与"不相邻"问题

【例 2】3 名男生、4 名女生按照不同的要求排队,求不同的排队方法的种数.

(1)全体站成一排,男生、女生各站在一起;

(2)全体站成一排,男生必须站在一起;

(3)全体站成一排,男生不能站在一起;

(4)全体站成一排,男生、女生各不相邻.

【解析】(1)男生必须站在一起是男生的全排列,有 A_3^3 种排法;女生必须站在一起是女生的全排列,有 A_4^4 种排法;全体男生、女生各视为一个元素,有 A_2^2 种排法. 由分步乘法计数原理知,共有 $A_3^3A_4^4A_2^2=288$(种)排队方法.

(2)3 名男生全排列有 A_3^3 种方法,把所有男生视为一个元素,与 4 名女生组成 5 个元素全排列,有 A_5^5 种排法. 故有 $A_3^3A_5^5=720$(种)排队方法.

(3)先安排女生,共有 A_4^4 种排法;男生在 4 名女生隔成的五个空中安排,共有 A_5^3 种排法,故共有 $A_4^4A_5^3=1\ 440$(种)排队方法.

(4)排好男生后让女生插空,共有 $A_3^3A_4^4=144$(种)排队方法.

点睛"相邻"与"不相邻"问题的解决方法

处理元素"相邻"与"不相邻"问题应遵循"先整体,后局部"的原则. 元素相邻问题,一般用"捆绑法",先把相邻的若干个元素"捆绑"为

一个大元素与其余元素全排列，然后再松绑，将这若干个元素内部全排列；元素不相邻问题，一般用“插空法”，先将不相邻元素以外的“普通”元素全排列，然后在“普通”元素之间及两端插入不相邻元素.

【变式训练 2】排一张 5 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单.

(1)任何 2 个舞蹈节目不相邻的排法有多少种？

(2)歌唱节目与舞蹈节目间隔排列的方法有多少种？

【解析】(1)先排歌唱节目有 A_5^5 种，歌唱节目之间以及两端共有 6 个空位，从中选 4 个放入舞蹈节目，共有 A_6^4 种方法，所以任何 2 个舞蹈节目不相邻的排法有 $A_5^5A_6^4=43\ 200$(种).

(2)先排舞蹈节目有 A_4^4 种方法，在舞蹈节目之间以及两端共有 5 个空位，恰好供 5 个歌唱节目放入.所以歌唱节目与舞蹈节目间隔排列的排法有 $A_4^4A_5^5=2\ 880$(种).

探究 3 元素“在”与“不在”问题

【例 3】6 人按下列要求站成一排，分别有多少种不同的站法？

(1)甲不站两端；

(2)甲、乙站在两端；

(3)甲不站左端，乙不站右端.

【解析】(1)方法一：要使甲不站在两端，可先让甲在中间 4 个位置上任选 1 个，有 A_4^1 种站法；然后其余 5 人在另外 5 个位置上作全排列有 A_5^5 种站法.根据分步乘法计数原理，共有站法 $A_4^1A_5^5=480$(种).

方法二：由于甲不站两端，这两个位置只能从其余 5 个人中选 2 个人站，有 A_5^2 种站法，然后其余 4 人有 A_4^4 种站法.根据分步乘法计数原理，共有站法 $A_5^2A_4^4=480$(种).

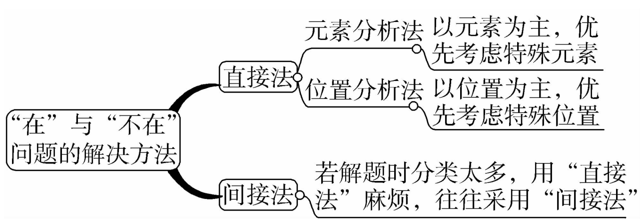
方法三：若对甲没有限制条件共有 A_6^6 种站法，甲在两端共有 $2A_5^5$ 种站法，从总数中减去这两种情况的排列数，即得所求的站法数，共有 $A_6^6-2A_5^5=480$(种).

(2)首先考虑特殊元素，甲、乙先站两端，有 A_2^2 种，再让其他 4 人在中间位置作全排列，有 A_4^4 种.根据分步乘法计数原理，共有 $A_2^2A_4^4=48$(种)站法.

(3)方法一：甲在左端的站法有 A_5^5 种，乙在右端的站法有 A_5^5 种，且甲在左端而乙在右端的站法有 A_4^4 种，共有 $A_6^6-2A_5^5+A_4^4=504$(种)站法.

方法二：以元素甲分类可分为两类：①甲站右端有 A_5^5 种，②甲在中间 4 个位置之一，而乙不在右端有 $A_4^1A_4^1A_4^4$ 种，故共有 $A_5^5+A_4^1A_4^1A_4^4=504$(种)站法.

点睛 “在”与“不在”问题的解决方法



【变式训练 3】用 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字可以组成多少个符合下列条件的无重复数字的数？

(1)六位数且是奇数；

(2)个位上的数字不是 5 的六位数.

【解析】(1)方法一(直接法，从特殊位置入手)：

第一步：排个位，从 1，3，5 这 3 个数字中选 1 个，有 A_3^1 种排法；

第二步：排十万位，有 A_4^1 种排法；

第三步：排其他位，有 A_4^4 种排法.

故可以组成无重复数字的六位数且是奇数

的共有 $A_3^1A_4^1A_4^4=288$(个).

方法二(直接法,从特殊元素入手):

0 不在两端,有 A_4^1 种排法;

从 1,3,5 中任选一个排在个位上,有 A_3^1 种排法;

其他数字全排列有 A_4^4 种排法.

故可以组成无重复数字的六位数且是奇数的共有 $A_4^1A_3^1A_4^4=288$(个).

(2)方法一(排除法):

6 个数字的全排列有 A_6^6 个,0 在十万位上的排列有 A_5^5 个,5 在个位上的排列有 A_5^5 个,0 在十万位上且 5 在个位上的排列有 A_4^4 个,

故符合题意的六位数共有 $A_6^6-A_5^5-A_5^5+A_4^4=504$(个).

方法二(直接法):

个位上不排 5,有 A_5^1 种排法. 但十万位上数字的排法因个位上排 0 与不排 0 而有所不同,因此,需分两类:

第一类,当个位上排 0 时,有 A_5^5 种排法;

第二类,当个位上不排 0 时,有 $A_4^1A_4^1A_4^4$ 种排法.

故符合题意的六位数共有 $A_5^5+A_4^1A_4^1A_4^4=504$(个).

随堂小练

1. 用 1,2,3,…,9 这 9 个数字,可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为　　(B)

A. 324　　B. 224　　C. 360　　D. 648

【解析】选 B. 先排个位,有 A_4^1 种;然后排十位和百位,有 A_8^2 种,故共有 $A_4^1A_8^2=224$(个)没有重复数字的三位偶数.

2. A,B,C,D,E 共 5 人站成一排,如果 A,B 必须相邻且 B 在 A 的右边,那么不同的排法有　　(D)

A. 60 种　　B. 48 种

C. 36 种　　D. 24 种

【解析】选 D. 把 A,B 视为一人,且 B 排在 A 的右边,则本题相当于 4 人的全排列,故有 $A_4^4=24$(种)排法.

3. 从 2,4 中选一个数字,从 1,3,5 中选两个数字,组成无重复数字的三位数,其中奇数的个数为　　(D)

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

【解析】选 D. 先从 2,4 中选一个数字,有 2 种选法;再从 1,3,5 中选两个数字并排列,有 A_3^2 种选法;最后将从 2,4 中选出的一个数字放在十位或百位的位置,有 2 种放法.

综上所述,奇数的个数为 $2\times A_3^2\times 2=24$.

4. 5 位母亲带领 5 名儿童站成一排照相,儿童不相邻的站法有__86 400__种.

【解析】第 1 步,先排 5 位母亲的位置,有 A_5^5 种排法;

第 2 步,把 5 名儿童插入 5 位母亲所形成的 6 个空位中,如下所示:

____母亲____母亲____母亲____母亲____母亲____,共有 A_6^5 种排法.

由分步乘法计数原理可知,共有 $A_5^5A_6^5=86\ 400$(种)站法.

5. 某班要从 8 名同学中选出 4 名参加校运动会的 4×100 m 接力比赛,其中甲、乙 2 名同学必须入选,而且甲、乙同学必须跑第一棒或最后一棒,则不同的安排方法共有__60__种.

【解析】甲、乙的安排方法有 A_2^2 种,其他两棒的安排方法有 A_6^2 种. 根据分步乘法计数原理知,安排方法有 $A_2^2A_6^2=60$(种).

温馨提示:请自主完成课后作业(四)

课后作业 · 单独成册

第3课时 组合与组合数公式

自主预习

知新预学

1. 组合的定义

一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素__作为一组__，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

2. 组合数的定义、公式、性质

组合数定义	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的__所有不同组合__的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号__C_n^m__表示
组合数公式	乘积式：$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$； 阶乘式：$C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$
性质	$C_n^m=C_n^{n-m}$，$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$
备注	①$n,m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m\leqslant n$；②规定 $C_n^0=1$

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)从 a_1,a_2,a_3 三个不同元素中任取两个元素组成一个组合，所有组合的个数为 C_3^2. (√)

(2)从 1,3,5,7 中任取两个数相乘可得 C_4^2 个积. (√)

(3)$C_5^3=5\times4\times3=60$. (×)

(4)$C_{2\,017}^{2\,016}=C_{2\,017}^{1}=2\,017$. (√)

2. 若 $C_n^2=10$，则 $n=$ (B)

A. 10　　B. 5

C. 3　　D. 4

3. 从 9 名学生中选出 3 名参加"希望英语"口语比赛，不同选法有 (C)

A. 504 种　　B. 729 种

C. 84 种　　D. 27 种

4. 计算：$C_7^3+C_7^4+C_8^5+C_9^6=$__210__.

互动课堂

合作探究

探究1　组合概念的理解

【例1】判断下列问题是排列问题还是组合问题：

(1)从 1,2,3,…,9 这 9 个数字中任取 3 个，组成一个三位数，这样的三位数共有多少个?

(2)从 1,2,3,…,9 这 9 个数字中任取 3 个，然后把这 3 个数字相加得到一个和，这样的和共有多少个?

(3)从 a,b,c,d 这 4 名学生中任选 2 名去完成同一份工作，有多少种不同的选法?

【解析】(1)当取出 3 个数字后，如果改变 3 个数字的顺序，会得到不同的三位数，此问题不但与取出元素有关，而且与元素的排列顺序有关，是排列问题.

(2)取出 3 个数字之后，无论怎样改变这 3 个数字的顺序，其和均不变，此问题只与取出元素有关，而与元素的排列顺序无关，是组合问题.

(3)2 名学生完成的是同一份工作,与顺序无关,是组合问题.

点睛 判断一个具体问题是否为组合问题的方法

区分某一问题是排列问题还是组合问题,关键是看取出元素后是按顺序排列还是无序地组合在一起.区分有无顺序的方法是把问题的一个选择结果写出来,然后交换这个结果中任意两个元素的位置,看是否会发生变化.若有变化,则说明有顺序,是排列问题;若无变化,则说明无顺序,是组合问题.

【变式训练 1】 判断下列问题是组合问题还是排列问题:

(1)把 5 本不同的书分给 5 个学生,每人一本;

(2)从 7 本不同的书中取出 5 本给某个同学;

(3)有 10 个人,每 2 人互写一封信,共写了几封信?

(4)有 10 个人,每 2 人互通一次电话,共通了几次电话?

【解析】(1)由于书不同,每人每次拿到的也不同,有顺序之分,故它是排列问题.

(2)从 7 本不同的书中,取出 5 本给某个同学,在每种取法中取出的 5 本并不考虑书的顺序,故它是组合问题.

(3)因为两人互写一封信跟写信人与收信人的顺序有关,故它是排列问题.

(4)因为两人互通电话一次没有顺序之分,故它是组合问题.

探究 2 组合数公式的应用

【例 2】(1)计算:$C_{10}^{4}-C_{7}^{3}\cdot A_{3}^{3}$.

(2)解方程:$3C_{x-3}^{x-7}=5A_{x-4}^{2}$.

(3)解不等式:$2C_{x+1}^{x-2}<3C_{x+1}^{x-1}$.

【解析】(1)原式$=C_{10}^{4}-A_{7}^{3}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}-7\times6\times5=210-210=0$.

(2)由排列数和组合数公式,原方程可化为$\frac{3\cdot(x-3)!}{(x-7)!4!}=\frac{5\cdot(x-4)!}{(x-6)!}$,

则$\frac{3(x-3)}{4!}=\frac{5}{x-6}$,

即$(x-3)(x-6)=40$.

所以$x^{2}-9x-22=0$,

解得$x=11$或$x=-2$.

因为$x-7>0$,所以$x>7$.

所以方程的根为$x=11$.

(3)因为$2C_{x+1}^{x-2}<3C_{x+1}^{x-1}$,

所以$2C_{x+1}^{3}<3C_{x+1}^{2}$.

所以$2\times\frac{(x+1)x(x-1)}{3\times2\times1}<3\times\frac{(x+1)x}{2\times1}$.

所以$\frac{x-1}{3}<\frac{3}{2}$.所以$x<\frac{11}{2}$.

因为$x-2\geqslant0$,所以$x\geqslant2$,$x\in\mathbf{N}^{*}$,

所以$x=2,3,4,5$.

所以不等式的解集为$\{x\mid x=2,3,4,5\}$.

点睛 组合数公式的选取技巧

(1)一般计算选用乘积式,证明往往选用阶乘式.

(2)涉及字母的可以用阶乘式$C_{n}^{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$计算.

(3)计算时应注意利用组合数的性质$C_{n}^{m}=C_{n}^{n-m}$简化运算.

【变式训练 2】(1)计算:$C_{8}^{5}+C_{100}^{98}C_{7}^{7}$.

(2)解方程:$C_{18}^{3n+6}=C_{18}^{4n-2}$.

【解析】(1)$C_{8}^{5}+C_{100}^{98}C_{7}^{7}=C_{8}^{3}+C_{100}^{2}\times1=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}+\frac{100\times99}{2\times1}=56+4\ 950=5\ 006$.

(2)由原方程及组合数性质可知,

$3n+6=4n-2$ 或 $3n+6=18-(4n-2)$.

所以 $n=8$ 或 $n=2$.

而当 $n=8$ 时，$3n+6=30>18$，不符合组合数定义，故舍去.

因此 $n=2$.

探究 3 简单的组合问题

【例 3】现有 10 名教师，其中男教师 6 名，女教师 4 名.

(1)现从中选 2 名教师去参加会议，有多少种不同的选法？

(2)现从中选 2 名男教师或 2 名女教师去参加会议，有多少种不同的选法？

(3)现从中选男、女教师各 2 名去参加会议，有多少种不同的选法？

【解析】(1)从 10 名教师中选 2 名去参加会议的选法种数，就是从 10 个不同的元素中取出 2 个元素的组合数，即 $C_{10}^{2}=\frac{10\times9}{2\times1}=45$(种).

(2)可把问题分成两类情况：

第 1 类，选出的 2 名是男教师有 C_6^2 种方法；

第 2 类，选出的 2 名是女教师有 C_4^2 种方法.

根据分类加法计数原理，共有 $C_6^2+C_4^2=15+6=21$(种)不同的选法.

(3)从 6 名男教师中选 2 名的选法有 C_6^2 种，从 4 名女教师中选 2 名的选法有 C_4^2 种. 根据分步乘法计数原理，共有 $C_6^2C_4^2=90$(种)不同的选法.

点睛 解简单的组合应用题的策略

(1)解简单的组合应用题时，首先要判断它是不是组合问题，组合问题与排列问题的根本区别在于：排列问题与取出元素之间的顺序有关，而组合问题与取出元素之间的顺序无关.

(2)要注意两个计数原理的运用，即分类与分步的灵活运用.

注意：在分类和分步时，一定要注意有无重复或遗漏.

【变式训练 3】由 13 个人组成的课外活动小组中，5 个人只会跳舞，5 个人只会唱歌，3 个人既会唱歌也会跳舞. 若从中选出 4 个会跳舞和 4 个会唱歌的人去表演节目，共有多少种不同的选法？

【解析】根据题意，分 4 种情况讨论：

①从“只会跳舞”的 5 人中选出 4 人去跳舞，有 $C_5^4C_8^4=350$(种)选法；

②从“只会跳舞”的 5 人中选出 3 人去跳舞，有 $C_5^3C_3^1C_7^4=1\ 050$(种)选法；

③从“只会跳舞”的 5 人中选出 2 人去跳舞，有 $C_5^2C_3^2C_6^4=450$(种)选法；

④从“只会跳舞”的 5 人中选出 1 人去跳舞，有 $C_5^1C_3^3C_5^4=25$(种)选法.

故一共有 $350+1\ 050+450+25=1\ 875$(种)选法.

随堂小练

1.(**多选题**)下列问题属于组合问题的是 (AB)

A. 由 1，2，3，4 构成双元素集合

B. 5 支球队进行单循环足球比赛的分组情况

C. 由 1，2，3 构成两位数的方法

D. 由 1，2，3 组成无重复数字的两位数的方法

【解析】选 AB. 由集合元素的无序性可知 A 属于组合问题；因为每两个球队比赛一次，并不需要考虑谁先谁后，没有顺序的区别，故 B 是组合问题；C，D 中两位数顺序不同数字不同，为排列问题.

2. 若$C_{12}^{n}=C_{12}^{2n-3}$，则$n=$ （ C ）

A. 3　　B. 5

C. 3或5　　D. 15

【解析】选C. 由组合数的性质得$n=2n-3$或$n+2n-3=12$，解得$n=3$或$n=5$，故选C.

3. 若集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，则集合$A$中含有4个元素的子集共有__5__个.

【解析】共有$C_5^4=5$(个).

4. 10个人分成甲、乙两组，甲组4人，乙组6人，则不同的分组种数为__210__.（用数字作答）

【解析】从10人中任选出4人作为甲组，则剩下的人即为乙组，这是组合问题，共有$C_{10}^4=210$(种)分法.

5. 平面上有9个点，其中4个点在同一条直线上(4个点之间的距离各不相等)，此外任何三点不共线.

(1)过每两点连线，可作几条直线？

(2)以每三点为顶点作三角形，可作几个三角形？

【解析】(1)从9个点任取2个点，除去共线的情况，再把多减的一条直线加回来，有$C_9^2-C_4^2+1=31$(条).

(2)从9个点任取3个点，除去其中共线的情况，共有$C_9^3-C_4^3=80$(个).

温馨提示：请自主完成课后作业(五)

课后作业·单独成册

第4课时 组合的综合应用(习题课)

互动课堂

合作探究

探究1 有限制条件的组合问题

【例1】某医院从10名医疗专家中抽调6名组成医疗小组到社区义诊,其中这10名医疗专家中有4名是外科专家.问:

(1)抽调的6名医疗专家中恰有2名是外科专家的抽调方法有多少种?

(2)至少有2名外科专家的抽调方法有多少种?

(3)至多有2名外科专家的抽调方法有多少种?

【解析】(1)首先从4名外科专家中任选2名,有C_4^2种选法,

再从除外科专家外的6人中选取4人,有C_6^4种选法,所以共有$C_4^2C_6^4=90$(种)抽调方法.

(2)按选取外科专家的人数分类:

①选2名外科专家,共有$C_4^2C_6^4$种选法;

②选3名外科专家,共有$C_4^3C_6^3$种选法;

③选4名外科专家,共有$C_4^4C_6^2$种选法,

所以共有$C_4^2C_6^4+C_4^3C_6^3+C_4^4C_6^2=185$(种)抽调方法.

(3)至多有2名外科专家的抽调方法有$C_6^6+C_4^1C_6^5+C_4^2C_6^4=115$(种).

点睛 有限制条件的组合问题的解题策略

(1)“含”与“不含”问题,其解法常用直接分步法,即“含”的先取出,“不含”的可把所指元素去掉再取,分步计数.

(2)“至多”与“至少”问题,其解法常有两种:一是直接分类法,要注意分类要不重不漏;二是间接法,要注意找准对立面,确保不重不漏.

【变式训练1】(1)从1,2,3,…,9这9个整数中取4个不同的数,使其和为奇数,则不同的取法共有 (A)

A. 60种　　B. 63种

C. 65种　　D. 66种

(2)课外活动小组共13人,其中男生8人、女生5人,并且男、女生中各有一名是队长.现从中选5人主持某项活动,按下列条件各有多少种选法?

①至少有1名队长当选;

②至多有2名女生当选;

③既有队长又有女生当选;

④至多有1名队长当选.

【解析】(1)选A.若4个数之和为奇数,则有1个奇数3个偶数或者3个奇数1个偶数.若是1个奇数3个偶数,则有$C_5^1C_4^3=20$(种);若是3个奇数1个偶数,则有$C_5^3C_4^1=40$(种).共有$20+40=60$(种)不同的取法.

(2)①至少有1名队长含有两种情况:有1名队长和2名队长,故共有$C_2^1C_{11}^4+C_2^2C_{11}^3=825$(种).或采用排除法有$C_{13}^5-C_{11}^5=825$(种).

②至多有2名女生含有三种情况:有2名女生、只有1名女生、没有女生,故共有$C_5^2C_8^3+C_5^1C_8^4+C_8^5=966$(种).

③分两种情况:

第一类:女队长当选,有C_{12}^4种;

第二类:女队长不当选,

有$C_4^1C_7^3+C_4^2C_7^2+C_4^3C_7^1+C_4^4$种.

故共有$C_{12}^4+C_4^1C_7^3+C_4^2C_7^2+C_4^3C_7^1+C_4^4=$

790(种).

④分两种情况:

第一类:没有队长当选,从除去两名队长之外的11名学生中选取5人有$C_{11}^5=462$(种)选法;

第二类:1名队长当选,分女队长当选或男队长当选,不同的选法有$C_{11}^4+C_{11}^4=660$(种).

所以至多1名队长当选的方法有$462+660=1\ 122$(种).

探究2 组合中的分组、分配问题

【例2】按以下要求分配6本不同的书,各有几种方法?

(1)平均分配给甲、乙、丙3人,每人2本;

(2)分成3份,一份1本,一份2本,一份3本;

(3)甲、乙、丙3人中,一人得1本,一人得2本,一人得3本.

【解析】(1)3个人一个一个地来取书,甲从6本不同的书中任取2本的方法有C_6^2种,甲不论用哪种方法,取得2本书后,乙再从余下的4本书中任取2本有C_4^2种方法,而甲、乙不论用哪一种方法各取2本书后,丙从余下的2本书中取2本,有C_2^2种方法,所以一共有$C_6^2C_4^2C_2^2=90$(种)方法.

(2)先在6本书中任取1本,作为一份,有C_6^1种取法;再从余下的5本书中任取2本,作为一份,有C_5^2种取法;最后余下3本书作为一份,有C_3^3种取法,共有$C_6^1C_5^2C_3^3=60$(种)方法.

(3)分成3份共有$C_6^1C_5^2C_3^3$种,但每一种分组方法又有A_3^3种不同的分配方案,故一人得1本,一人得2本,一人得3本的分法有$C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$(种).

点睛 分组、分配问题的规律方法

(1)分组问题属于"组合"问题,常见的分组问题有三种:

①完全均匀分组,每组的元素个数相等;

②部分均匀分组,应注意不要重复,若有n组均分,最后必须除以$n!$;

③完全非均匀分组,这种分组不考虑重复的情况.

(2)分配问题属于"排列"问题.

分配问题可以按要求逐个分配,也可以分组后再分配.

【变式训练2】将4个编号为1,2,3,4的小球放入4个编号为1,2,3,4的盒子中.

(1)有多少种放法?

(2)每盒至多1个球,有多少种放法?

(3)恰好有1个空盒,有多少种放法?

(4)把4个不同的小球换成4个相同的小球,恰有一个空盒,有多少种放法?

【解析】(1)每个小球都可能放入4个盒子中的任何一个,将小球一个一个地放入盒子,共有$4\times4\times4\times4=4^4=256$(种)放法.

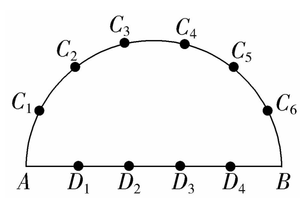
(2)这是全排列问题,共有$A_4^4=24$(种)放法.

(3)先取4个球中的两个"捆"在一起,有C_4^2种选法,把它与其他两个球共3个元素分别放入4个盒子中的3个,有A_4^3种投放方法,所以共有$C_4^2A_4^3=144$(种)放法.

(4)先从4个盒子中选出3个盒子,再从3个盒子中选出1个放入2个球,余下2个盒子各放1个球.由于球是相同的即没有顺序,所以属于组合问题,故共有$C_4^3C_3^1=12$(种)放法.

探究3 与几何图形有关的组合问题

【例3】如图,在以AB为直径的半圆周上,有异于A,B的6个点$C_1,C_2,\cdots,C_6$,线段AB上有异于A,B的4个点D_1,D_2,D_3,D_4.



(1)以这10个点中的3个为顶点可作多少个三角形?其中含C_1点的有多少个?

(2)以图中12个点(包括A,B)中的4个为顶点,可作出多少个四边形?

【解析】(1)方法一:可作出三角形$C_6^3+C_6^1C_4^2+C_6^2C_4^1=116$(个).

方法二:可作三角形$C_{10}^3-C_4^3=116$(个).

其中含C_1点的三角形有$C_9^2=36$(个).

(2)可作出四边形$C_6^4+C_6^3C_6^1+C_6^2C_6^2=360$(个).

点睛 解答几何图形组合问题的策略

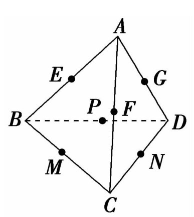
(1)解答几何图形组合问题的思考方法与一般的组合问题基本一样,只要把图形的限制条件视为组合问题的限制条件即可.

(2)计算时可用直接法,也可用间接法,要注意在限制条件较多的情况下,需要分类计算符合题意的组合数.

【变式训练3】(1)四面体的一个顶点为A,从其他顶点和各棱中点中取3个点,使它们和点A在同一平面上,有多少种不同的取法?

(2)四面体的顶点和各棱中点共10个点,从中取4个不共面的点,有多少种不同的取法?

【解析】(1)(直接法)如图,含顶点A的四面体的3个面上,除点A外都有5个点,从中取出3个点必与点A共面共有$3C_5^3$种取法;含顶点A的三条棱上各有3个点,它们与所对的棱的中点共面,共有3种取法.根据分类加法计数原理,与顶点A共面的3个点的取法有$3C_5^3+3=33$(种).



(2)(间接法)如图,从10个点中取4个的方法有C_{10}^4种,减去4点共面的取法种数可以得到结果.从四面体同一个面上的6个点中取出的4点必定共面,共有$4C_6^4=60$(种);四面体的每一条棱上的3个点与相对棱的中点共面,共有6种共面情况;从6条棱的中点中取4个时有3种共面情形(对棱中点连线两两相交且互相平分),故4点不共面的取法有$C_{10}^4-(60+6+3)=141$(种).

探究4 排列与组合的综合问题

【例4】已知10件不同的产品中有4件是次品,现对它们进行一一测试,直至找出所有次品为止.

(1)若恰在第5次测试才找到第一件次品,第10次测试才找到最后一件次品,则这样的不同测试方法数是多少?

(2)若恰在第5次测试后,就找出了所有次品,则这样的不同测试方法数是多少?

【解析】(1)先排前4次测试,只能取正品,有A_6^4种不同的测试方法;再从4件次品中选2件排在第5和第10的位置上测试,有$C_4^2A_2^2=A_4^2$(种)测法;再排余下4件的测试位置,有A_4^4种测法.所以共有不同测试方法$A_6^4A_4^2A_4^4=103\ 680$(种).

(2)第5次测试恰为最后一件次品,另3件在前4次中出现,从而前4次中有1件正品出现,所以共有不同测试方法$C_4^1(C_6^1C_3^3)A_4^4=576$(种).

点睛 解决排列、组合综合问题的两种思路

(1)按事情发生的过程进行分步.

(2)按元素的性质进行分类.分类时通常从三个方面考虑:

①以元素为主考虑,即先满足特殊元素的要求,再考虑其他元素;

②以位置为主考虑,即先满足特殊位置的要求,再考虑其他位置;

③先不考虑附加条件，计算出排列或组合数，再减去不合要求的排列或组合数.

【变式训练 4】有 5 个男生和 3 个女生，从中选出 5 人担任 5 门不同学科的科代表，求分别符合下列条件的选法数：

(1)有女生但人数必须少于男生；

(2)某女生一定担任语文科代表；

(3)某男生必须包括在内，但不担任数学科代表；

(4)某女生一定要担任语文科代表，某男生必须担任科代表，但不担任数学科代表.

【解析】(1)先选后排，先选可以是 2 女 3 男，也可以是 1 女 4 男，先选有 $C_5^3C_3^2+C_5^4C_3^1$ 种，后排有 A_5^5 种，共$(C_5^3C_3^2+C_5^4C_3^1)A_5^5=5\ 400$(种)选法.

(2)除去该女生后，先选后排有 $C_7^4A_4^4=840$(种)选法.

(3)先选后排，但先安排该男生有 $C_7^4A_4^1A_4^4=3\ 360$(种)选法.

(4)先从除去该男生和该女生的 6 人中选 3 人有 C_6^3 种，再安排该男生有 A_3^1 种，其余 3 人全排有 A_3^3 种，共 $C_6^3A_3^1A_3^3=360$(种)选法.

随堂小练

1. 某乒乓球队有 9 名队员，其中 2 名是种子选手. 现在挑选 5 名队员参加比赛，种子选手必须都在内，则不同的选法共有 (C)

A. 26 种　　B. 84 种

C. 35 种　　D. 21 种

【解析】选 C. 从 7 名队员中选出 3 人有 $C_7^3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$(种)选法.

2. 200 件产品中有 3 件次品，任意抽取 5 件，其中至少有 2 件次品的抽法种数有 (B)

A. $C_{197}^{32}C_3^2$　　B. $C_3^3C_{197}^2+C_3^2C_{197}^3$

C. $C_{200}^5-C_{197}^5$　　D. $C_{200}^5-C_3^1C_{197}^4$

【解析】选 B. 至少 2 件次品包含两类：(1)2 件次品，3 件正品，共 $C_3^2C_{197}^3$ 种；(2)3 件次品，2 件正品，共 $C_3^3C_{197}^2$ 种. 由分类加法计数原理得有$(C_3^2C_{197}^3+C_3^3C_{197}^2)$种抽法.

3. 从 6 名同学中选出 4 名参加一个座谈会，要求张、王 2 名同学中至多有 1 个人参加，则不同选法的种数为__9__.

【解析】方法一(直接法)分两类：

第 1 类，张、王 2 名同学都不参加，有 $C_4^4=1$(种)选法；

第 2 类，张、王 2 名同学中只有 1 人参加，有 $C_2^1C_4^3=8$(种)选法.

故共有 $1+8=9$(种)选法.

方法二(间接法)：共有 $C_6^4-C_4^2=9$(种)不同选法.

4. 从 1 到 9 的 9 个自然数中取 3 个偶数和 4 个奇数. 问：

(1)能组成多少个没有重复数字的七位数?

(2)上述七位数中 3 个偶数排在一起的有几个?

【解析】(1)分步完成：

第一步，在 4 个偶数中取 3 个，有 C_4^3 种取法；

第二步，在 5 个奇数中取 4 个，有 C_5^4 种取法；

第三步，3 个偶数和 4 个奇数进行排列，有 A_7^7 种排法. 所以符合题意的七位数有 $C_4^3C_5^4A_7^7=100\ 800$(个).

(2)上述七位数中，3 个偶数排在一起的有 $C_4^3C_5^4A_5^5A_3^3=14\ 400$(个).

温馨提示：请自主完成课后作业(六、七)

课后作业·单独成册

6.3 二项式定理

第 1 课时 二项式定理

自主预习

知新预学

二项式定理

二项式定理	$(a+b)^n=$ $C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$
二项展开式	右边的多项式
二项式系数	$C_n^k(k=0,1,2,\cdots,n)$
二项展开式的通项	$T_{k+1}=$ $C_n^ka^{n-k}b^k$

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)$(a+b)^n$ 的展开式中共有 n 项. (×)

(2)在公式中,交换 a,b 的顺序对各项没有影响. (×)

(3)$C_n^ka^{n-k}b^k$ 是 $(a+b)^n$ 的展开式中的第 k 项. (×)

(4)$(a-b)^n$ 与 $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数相同. (√)

2. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$ 的二项展开式中,第 4 项是 (C)

A. $-C_{16}^5x^6$　　B. $C_{16}^3x^{10}$

C. $-C_{16}^3x^{10}$　　D. $C_{16}^4x^8$

3. 在 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中,含 x^3 的项的二项式系数是 (D)

A. -10　　B. 10　　C. -5　　D. 5

4. $\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^5$ 的展开式的常数项是 (C)

A. 80　　B. -80　　C. 40　　D. -40

5. $(1+2x)^5$ 的展开式的第 3 项的系数是__40__,第 3 项的二项式系数是__10__.

互动课堂

合作探究

探究 1 二项式定理的正用与逆用

【例 1】(1)用二项式定理展开 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$.

(2)化简:$(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)$.

【解析】(1)方法一:$\left(1+\frac{1}{x}\right)^4=1+C_4^1\left(\frac{1}{x}\right)^1+C_4^2\left(\frac{1}{x}\right)^2+C_4^3\left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^4=1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}$.

方法二:$\left(1+\frac{1}{x}\right)^4=\left(\frac{1}{x}\right)^4(x+1)^4=\left(\frac{1}{x}\right)^4\cdot(x^4+C_4^1x^3+C_4^2x^2+C_4^3x+1)=1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}$.

(2)原式$=C_5^0(x-1)^5+C_5^1(x-1)^4+C_5^2(x-1)^3+C_5^3(x-1)^2+C_5^4(x-1)+C_5^5(x-1)^0-1=[(x-1)+1]^5-1=x^5-1$.

点睛 运用二项式定理的解题策略

(1)正用：求形式简单的二项展开式时可直接由二项式定理展开，展开时注意二项展开式的特点：前一个字母是降幂，后一个字母是升幂．形如$(a-b)^n$的展开式中会出现正负交替的情况．对较复杂的式子，需先化简再用二项式定理展开．

(2)逆用：逆用二项式定理可将多项式化简，对于这类问题的求解，要熟悉公式的特点、项数、各项幂指数的规律以及各项的系数．

注意：逆用二项式定理时如果各项的系数是正负相间的，则结果是$(a-b)^n$的形式．

【变式训练1】化简：$(x+1)^4-4(x+1)^3+6(x+1)^2-4(x+1)+1=$ （ A ）

A. x^4　　B. $(x-1)^4$

C. $(x+1)^4$　　D. x^4-1

【解析】选A. $(x+1)^4-4(x+1)^3+6(x+1)^2-4(x+1)+1=C_4^0(x+1)^4+C_4^1\cdot(x+1)^3(-1)^1+C_4^2(x+1)^2(-1)^2+C_4^3(x+1)(-1)^3+C_4^4(x+1)^0(-1)^4=[(x+1)-1]^4=x^4$.

探究2 求二项展开式中的特定项及其系数

【例2】已知$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$的展开式中第3项的系数比第2项的系数大162.

(1)求n的值；

(2)求展开式中含x^3的项.

【解析】(1)因为$T_3=C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2=4C_n^2x^{\frac{n-6}{2}}$,

$T_2=C_n^1(\sqrt{x})^{n-1}\left(-\frac{2}{x}\right)=-2C_n^1x^{\frac{n-3}{2}}$,

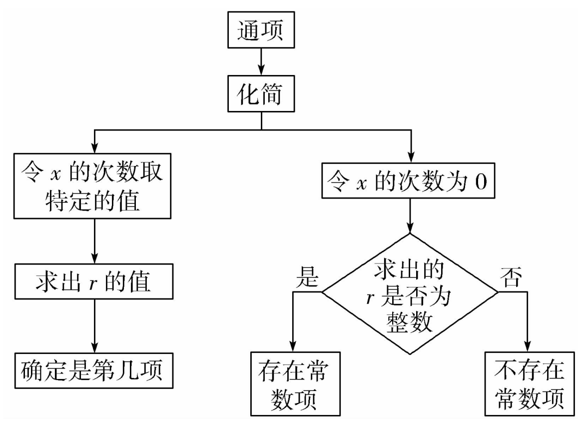
依题意得$4C_n^2+2C_n^1=162$.

所以$n^2=81$. 因为$n\in \mathbf{N}^*$，所以$n=9$.

(2)设第$r+1$项含x^3，则$T_{r+1}=C_9^r\cdot(\sqrt{x})^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^rC_9^rx^{\frac{9-3r}{2}}$,

所以$\frac{9-3r}{2}=3$，解得$r=1$，所以第二项为含x^3的项，$T_2=-2C_9^1x^3=-18x^3$.

点睛 (1)求二项展开式中特定项的步骤



(2)正确区分二项式系数与项的系数

二项式系数与项的系数是两个不同的概念，前者仅与二项式的指数及项数有关，与二项式无关；后者与二项式、二项式的指数及项数均有关．

【变式训练2】(1)$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中第6项的二项式系数和第6项的系数分别是__6__，__-12__.

(2)$\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$的展开式中$x^3$的系数是__$-84$__.

(3)$\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^6$的展开式中常数项是__$-20$__.

【解析】(1)由已知得二项展开式的通项为

$T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r$

$=2^{6-r}C_6^r\cdot(-1)^r\cdot x^{3-\frac{3r}{2}}$,

所以 $T_6=-12\cdot x^{-\frac{9}{2}}$. 所以第 6 项的二项式系数为 $C_6^5=6$,

第 6 项的系数为 $C_6^5\cdot(-1)^5\cdot 2=-12$.

(2)设展开式中的第 $r+1$ 项为含 x^3 的项,

则 $T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\cdot C_9^r\cdot x^{9-2r}$.

令 $9-2r=3$,得 $r=3$,

即展开式中第 4 项含 x^3,其系数为 $(-1)^3\cdot C_9^3=-84$.

(3) $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{2x}\right)^r$

$=(-1)^r C_6^r 2^{6-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r x^{6-2r}$,令 $6-2r=0$,得 $r=3$,

所以 $T_4=(-1)^3C_6^3=-20$.

探究 3 二项式定理的灵活应用

【例 3】(1) $\left(\frac{2}{x}+x\right)(1-\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是 (C)

A. 1 B. 2 C. 3 D. 12

(2)在 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中,含 x^5y^2 的项的系数是 (C)

A. 10 B. 20 C. 30 D. 60

【解析】(1)根据题意,所给式子的展开式中含 x 的项,由 $(1-\sqrt{x})^4$ 展开式中的常数项乘 $\left(\frac{2}{x}+x\right)$ 中的 x 以及 $(1-\sqrt{x})^4$ 展开式中的含 x^2 的项乘 $\left(\frac{2}{x}+x\right)$ 中的 $\frac{2}{x}$ 两部分合并而成,所以所求系数为 $1\times2+1=3$.

(2)方法一:$(x^2+x+y)^5=[(x^2+x)+y]^5$,

含 y^2 的项为 $T_3=C_5^2(x^2+x)^3\cdot y^2$.

其中 $(x^2+x)^3$ 中含 x^5 的项为 $C_3^1x^4\cdot x=C_3^1x^5$.

所以 x^5y^2 的系数为 $C_5^2C_3^1=30$. 故选 C.

方法二:$(x^2+x+y)^5$ 为 5 个 (x^2+x+y) 之积,其中有两个取 y,两个取 x^2,一个取 x 即可,所以 x^5y^2 的系数为 $C_5^2C_3^2C_1^1=30$. 故选 C.

点睛(1)两个二项展开式乘积的展开式中的特定项问题

①分别对每个二项展开式进行分析,发现它们各自项的特点.

②找到展开式中特定项的组成部分.

③分别求解再相乘,求和即可得.

(2)三项或三项以上的展开式问题

应根据式子的特点,转化为二项式来解决(有些题目也可转化为计数问题解决),转化的方法通常为配方、因式分解、项与项结合,项与项结合时要注意合理性与简捷性.

【变式训练 3】(1) $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为__-20__.(用数字作答)

(2)求 $(x^2+3x+2)^5$ 的展开式中 x 的系数.

【解析】(1)依题意,$(x+y)^8$ 的二项展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^kx^{8-k}y^k$,$0\leqslant k\leqslant 8$,$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=7$ 时,$T_8=C_8^7xy^7=8xy^7$;

当 $k=6$ 时,$T_7=C_8^6x^2y^6=28x^2y^6$.

所以 $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^7 的项为 $x\cdot 8xy^7+(-y)\cdot 28x^2y^6=-20x^2y^7$,故 x^2y^7 的系数为 -20.

(2)方法一:因为 $(x^2+3x+2)^5=(x+2)^5\cdot(x+1)^5=(C_5^0x^5+C_5^1x^4\cdot 2+\cdots+C_5^5\cdot 2^5)\cdot(C_5^0x^5+C_5^1x^4+\cdots+C_5^5)$,

所以展开后含 x 的项为 $C_5^4x\cdot 2^4\cdot C_5^5+C_5^5\cdot 2^5\cdot C_5^4x=240x$,

所以 $(x^2+3x+2)^5$ 的展开式中 x 的系数

为 240.

方法二：把$(x^2+3x+2)^5$看成 5 个(x^2+3x+2)相乘，每个因式各取一项相乘得到展开式中的一项，含 x 的项可由 1 个因式取 $3x$，4 个因式取 2 得到，即 $C_5^1 3x\cdot C_4^4\cdot 2^4=240x$，

所以$(x^2+3x+2)^5$的展开式中 x 的系数为 240.

随堂小练

1. 化简：$(x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2+4x-3=$ （ A ）

A. x^4　　B. x^4+1

C. $(x-2)^4$　　D. x^4+4

【解析】选 A. $S=(x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2+4(x-1)+1=C_4^0(x-1)^4+C_4^1(x-1)^3+C_4^2(x-1)^2+C_4^3(x-1)+C_4^4=[(x-1)+1]^4=x^4$.

2. 在$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^{10}$的二项展开式中，含 x^4 的项的系数是 （ C ）

A. -120　　B. 120

C. -15　　D. 15

【解析】选 C. $T_{r+1}=C_{10}^r x^{10-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r=\left(-\frac{1}{2}\right)^r C_{10}^r x^{10-2r}$，

令 $10-2r=4$，则 $r=3$. 所以 x^4 的系数为 $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 C_{10}^3=-15$.

3. 已知$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中常数项为 15，则 $n=$ （ D ）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

【解析】选 D. 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_n^r\cdot(x^2)^{n-r}\cdot(-1)^r\cdot(x^{-1})^r=(-1)^r\cdot C_n^r\cdot x^{2n-3r}$.

令 $2n-3r=0$，得 $n=\frac{3}{2}r(n,r\in\mathbf{N}^*)$.

若 $r=2$，则 $n=3$，不符合题意；

若 $r=4$，则 $n=6$，此时 $(-1)^4\cdot C_6^4=15$，所以 $n=6$.

4. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$的展开式中 x^2 的系数是 ___30___.

【解析】$(1+x)^6$ 展开式的通项 $T_{r+1}=C_6^r x^r$，所以$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot(1+x)^6$的展开式中 x^2 的系数为 $1\times C_6^2+1\times C_6^4=30$.

5. 求$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$的展开式中的常数项.

【解析】$T_{r+1}=C_{10}^r(x^{\frac{1}{2}})^{10-r}\cdot(-x^{-\frac{1}{3}})^r=(-1)^r C_{10}^r x^{5-\frac{5r}{6}}$，令 $5-\frac{5r}{6}=0$，得 $r=6$.

当 $r=6$ 时，$T_7=(-1)^6C_{10}^6=210$.

所以该展开式中的常数项为 210.

温馨提示：请自主完成课后作业（八）

课后作业·单独成册

第 2 课时　二项式系数的性质

自主预习

知新预学

$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数的性质

1. 对称性

与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，这一性质可直接由 $\underline{C_n^m=C_n^{n-m}}$ 得到.

直线 $\underline{r=\frac{n}{2}}$ 将函数 $f(r)=C_n^r$ 的图象分成对称的两部分，它是图象的对称轴.

2. 增减性与最大值

(1)当 $k<\frac{n+1}{2}$ 时，C_n^k 随 k 的增加而 $\underline{增大}$；当 $k>\frac{n+1}{2}$ 时，C_n^k 随 k 的增加而 $\underline{减小}$.

(2)当 n 是偶数时，中间的一项 $\underline{C_n^{\frac{n}{2}}}$ 取得最大值；当 n 是奇数时，中间的两项 $\underline{C_n^{\frac{n-1}{2}}}$ 与 $\underline{C_n^{\frac{n+1}{2}}}$ 相等，且同时取得最大值.

3. 各二项式系数的和

(1)$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=\underline{2^n}$.

(2)$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=\underline{2^{n-1}}$.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)二项展开式中系数最大的项与二项式系数最大的项是相同的.　　(×)

(2)二项展开式的二项式系数和为 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$.　　(×)

2. (多选题)下列关于 $(a-b)^{10}$ 的说法中，正确的是　　(ABD)

A. 展开式中的二项式系数之和为 1 024

B. 展开式中第 6 项的二项式系数最大

C. 展开式中第 5 项或第 7 项的二项式系数最大

D. 展开式中第 6 项的系数不是正数

【解析】 选 ABD. 根据二项式系数的性质进行判断，由二项式系数的性质知：二项式系数之和为 2^n，故 A 正确；当 n 为偶数时，二项式系数最大的项是中间一项，故 B 正确，C 错误；D 也是正确的，因为展开式第 6 项中的 $-b$ 的次数为 5，所以其系数不是正数.

3. $(2x-1)^6$ 的展开式中各项系数的和为 $\underline{1}$，各项的二项式系数的和为 $\underline{64}$.

【解析】 令展开式左、右两边 $x=1$，得各项系数之和为 1；各二项式系数之和为 $2^6=64$.

4. $(2-x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则 $a_8=\underline{180}$.

【解析】 由题意可知 a_8 是 x^8 的系数，所以 $a_8=C_{10}^8\cdot 2^2=180$.

互动课堂

合作探究

探究 1　二项式系数和的问题

【例 1】 已知 $(2x-1)^5=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$. 求下列各式的值：

(1)$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5$；

(2)$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|$；

(3)$a_1+a_3+a_5$.

【解析】(1)令 $x=1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5=1$.

(2)令 $x=-1$,得 $(-3)^5=-a_0+a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$.

由 $(2x-1)^5$ 的通项 $T_{r+1}=C_5^r(-1)^r\cdot 2^{5-r}\cdot x^{5-r}$ 知 a_1,a_3,a_5 为负值,

所以 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|$

$=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=3^5=243$.

(3)由 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5=1$,

$-a_0+a_1-a_2+\cdots+a_5=(-3)^5$,

得 $2(a_1+a_3+a_5)=1-3^5$,

所以 $a_1+a_3+a_5=\dfrac{1-3^5}{2}=-121$.

点睛 二项展开式中系数和的求法

(1)对于形如 $(ax+b)^n(a,b\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$ 的式子,求其展开式的各项系数之和常用赋值法,只需令 $x=1$ 即可;求形如 $(ax+by)^n(a,b\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$ 的展开式的各项系数之和,只需令 $x=y=1$ 即可.

(2)一般地,若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,则 $f(x)$ 的展开式中各项系数之和为 $f(1)$,奇数项系数之和为 $a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$,偶数项系数之和为 $a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$.

【变式训练 1】(1)若 $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128,则 $n=$ (A)

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

(2)若 $(1+x)(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$ (C)

A. -2　　B. -3

C. 125　　D. -131

【解析】(1)选 A. 因为展开式中各项系数之和为 128,所以令 $x=1$,得 $2^n=128$,所以 $n=7$.

(2)选 C. 由题意可知 $a_8=(-2)^7=-128$,令 $x=0$,得 $a_0=1$,令 $x=1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8=-2$,所以 $a_1+a_2+\cdots+a_7=125$.

探究 2 求二项展开式中系数或二项式系数最大的项

【例 2】在 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^8$ 的展开式中,

(1)系数的绝对值最大的项是第几项?

(2)求二项式系数最大的项;

(3)求系数最大的项;

(4)求系数最小的项.

【解析】$T_{k+1}=C_8^k\cdot(\sqrt{x})^{8-k}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^k=(-1)^k\cdot C_8^k\cdot 2^k\cdot x^{4-\frac{5}{2}k}$.

(1)设第 $k+1$ 项系数的绝对值最大,

则 $\begin{cases}C_8^k2^k\geqslant C_8^{k-1}2^{k-1},\\ C_8^k2^k\geqslant C_8^{k+1}2^{k+1},\end{cases}$

所以 $\begin{cases}\dfrac{2}{k}\geqslant\dfrac{1}{9-k},\\ \dfrac{1}{8-k}\geqslant\dfrac{2}{k+1},\end{cases}$ 解得 $5\leqslant k\leqslant 6$,

故系数的绝对值最大的项是第 6 项和第 7 项.

(2)二项式系数最大的项为中间项,即第 5 项.

所以 $T_5=C_8^4\cdot 2^4\cdot x^{4-\frac{20}{2}}=1\ 120x^{-6}$.

(3)由(1)知展开式中的第 6 项和第 7 项系数的绝对值最大,而第 6 项的系数为负,第 7 项

的系数为正.

则系数最大的项为 $T_7=C_8^6\cdot 2^6\cdot x^{-11}=1\ 792x^{-11}$.

(4)系数最小的项为 $T_6=(-1)^5\cdot C_8^5\cdot 2^5\cdot x^{-\frac{17}{2}}=-1\ 792x^{-\frac{17}{2}}$.

点睛 (1)二项式系数最大的项的求法

求二项式系数最大的项，根据二项式系数的性质对 $(a+b)^n$ 中的 n 进行讨论. 当 n 为奇数时，中间两项的二项式系数最大；当 n 为偶数时，中间一项的二项式系数最大.

(2)展开式中系数最大的项的求法

求展开式中系数最大的项与求二项式系数最大的项是不同的，需要根据各项系数的正、负变化情况进行分析. 如求 $(a+bx)^n(a,b\in\mathbf{R})$ 的展开式中系数最大的项，一般采用待定系数法. 设展开式中各项系数分别为 A_0，A_1，A_2，…，A_n，且第 $r+1$ 项最大，利用 $\begin{cases}A_r\geqslant A_{r-1},\\A_r\geqslant A_{r+1}\end{cases}$ 解出 r，即得出系数最大的项.

【变式训练 2】已知 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中，只有第 6 项的二项式系数最大.

(1)该展开式中有多少项含 x 的整数次项?

(2)求该展开式中系数最大的项.

【解析】(1)由题意，可知 $\dfrac{n}{2}+1=6$，所以 $n=10$.

所以 $T_{r+1}=C_{10}^r x^{\frac{10-r}{2}}2^r x^{-2r}=C_{10}^r 2^r x^{\frac{10-5r}{2}}$.

因为 $\dfrac{10-5r}{2}\in\mathbf{Z}$ 且 $0\leqslant r\leqslant 10$，$r\in\mathbf{N}$，所以 $r=0,2,4,6,8,10$.

所以该展开式中有 6 项含 x 的整数项.

(2)设第 $r+1$ 项的系数最大，

则 $\begin{cases}C_{10}^r 2^r\geqslant C_{10}^{r-1}2^{r-1},\\C_{10}^r 2^r\geqslant C_{10}^{r+1}2^{r+1},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{2}{r}\geqslant\dfrac{1}{11-r},\\\dfrac{1}{10-r}\geqslant\dfrac{2}{r+1}.\end{cases}$

解得 $\dfrac{19}{3}\leqslant r\leqslant\dfrac{22}{3}$.

因为 $r\in\mathbf{N}$，所以 $r=7$.

所以该展开式中系数最大的项为 $T_8=C_{10}^7 2^7 x^{-\frac{25}{2}}=15\ 360x^{-\frac{25}{2}}$.

探究 3 证明整除或求余数

【例 3】(1)用二项式定理证明 $11^{10}-1$ 能被 100 整除.

(2)求 91^{92} 被 100 除所得的余数.

【解析】(1)证明：因为 $11^{10}-1$

$=(10+1)^{10}-1$

$=(10^{10}+C_{10}^1\cdot 10^9+\cdots+C_{10}^9\cdot 10+1)-1$

$=10^{10}+C_{10}^1\cdot 10^9+C_{10}^2\cdot 10^8+\cdots+10^2$

$=100(10^8+C_{10}^1\cdot 10^7+C_{10}^2\cdot 10^6+\cdots+1)$，

所以 $11^{10}-1$ 能被 100 整除.

(2) $(100-9)^{92}=C_{92}^0\cdot 100^{92}-C_{92}^1\cdot 100^{91}\cdot 9+C_{92}^2\cdot 100^{90}\cdot 9^2-\cdots+C_{92}^{92}\cdot 9^{92}$，

因为展开式中前 92 项均能被 100 整除，所以只需求最后一项除以 100 的余数.

又 $9^{92}=(10-1)^{92}=C_{92}^0\cdot 10^{92}-C_{92}^1\cdot 10^{91}+\cdots+C_{92}^{90}\cdot 10^2-C_{92}^{91}\cdot 10+1$，

前 91 项均能被 100 整除，后两项和为 -919. 因余数为正，可从前面的数中分离出 1 000，结果为 $1\ 000-919=81$，故 91^{92} 被 100 除所得的余数为 81.

点睛 (1)利用二项式定理解决整除问题，通常先把底数写成除数(或与除数有密切关系的数)与某数的和或差的形式，再利用二项式定理展开，只考虑后面(或前面)的一两项就可以了.

(2)解决求余数问题，必须构造一个与题目条件有关的二项式.

(3)要注意余数的取值范围. $a=c\cdot r+b$，其中 b 为余数，$b\in[0,r)$，r 是除数. 利用二项式定理对展开式进行变形后，若剩余部分是负数，需注意转换.

【变式训练 3】(1)求 $1\ 995^{10}$ 除以 8 的余数.

(2)求证：$3^{2n+2}-8n-9(n\in\mathbf{N}^*)$能被 64 整除.

【解析】(1)$1\ 995^{10}=(8\times249+3)^{10}$.

因为其展开式中除末项为 3^{10} 外，其余的各项均含有 8 这个因数，

所以 $1\ 995^{10}$ 除以 8 的余数与 3^{10} 除以 8 的余数相同.

又因为 $3^{10}=9^5=(8+1)^5$，其展开式中除末项为 1 外，其余的各项均含有 8 这个因数，

所以 3^{10} 除以 8 的余数为 1，即 $1\ 995^{10}$ 除以 8 的余数也为 1.

(2)证明：$3^{2n+2}-8n-9$

$=(8+1)^{n+1}-8n-9$

$=C_{n+1}^0\cdot8^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot8^n+\cdots+C_{n+1}^{n+1}-8n-9$

$=C_{n+1}^0\cdot8^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot8^n+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\cdot8^2+(n+1)\times8+1-8n-9$

$=C_{n+1}^0\cdot8^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot8^n+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\cdot8^2$①.

①式中的每一项都含有 8^2 这个因数，故原式能被 64 整除.

随堂小练

1. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{11}$ 的展开式中二项式系数最大的项是 (D)

A. 第 6 项　　B. 第 8 项

C. 第 5，6 项　　D. 第 6，7 项

【解析】选 D. 由 $n=11$ 为奇数，则展开式中第 $\frac{11+1}{2}$ 项和第 $\frac{11+1}{2}+1$ 项，即第 6 项和第 7 项的二项式系数相等，且最大.

2. 已知 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的各项系数和为 32，则二项展开式中 x^4 的系数为 (B)

A. 5　　B. 10

C. 20　　D. 40

【解析】选 B. 因为 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ 的二项展开式的各项系数和为 32，

所以令 $x=1$，得 $2^n=32$，所以 $n=5$. 所以 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^5$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_5^rx^{10-3r}$.

令 $10-3r=4$，得 $r=2$，

故二项展开式中 x^4 的系数为 $C_5^2=10$.

3. 设 $a\in\mathbf{N}$，且 $0\leqslant a<13$，若 $51^{2\,018}+a$ 能被 13 整除，则 $a=$ (D)

A. 0　　B. 1

C. 11　　D. 12

【解析】选 D.

因为 $51^{2\,018}+a=(52-1)^{2\,018}+a$

$=C_{2\,018}^0\cdot52^{2\,018}+C_{2\,018}^1\cdot52^{2\,017}\cdot(-1)^1+C_{2\,018}^2\cdot52^{2\,016}\cdot(-1)^2+\cdots+C_{2\,018}^{2\,017}52\cdot(-1)^{2\,017}+C_{2\,018}^{2\,018}\cdot(-1)^{2\,018}+a$，

所以除最后两项外，其余各项都有 13 的倍数 52.

故由题意可得 $C_{2\,018}^{2\,018}\cdot(-1)^{2\,018}+a$ 能被 13 整除.

因为 $0\leqslant a<13$，所以 $a=12$.

4. 已知$(x-2)^n(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中,第 2 项的系数是$-14$,则 $n=$__7__,含 x 的奇次项的二项式系数的和为__64__.

【解析】依题意,二项式$(x-2)^n(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中,第二项的系数是$-14$,即$C_n^1\cdot(-2)^1=-14$,解得$n=7$.含 x 的奇次项的二项式系数和为$C_7^0+C_7^2+C_7^4+C_7^6=1+21+35+7=64$.

5. 若$C_{20}^{2n+6}=C_{20}^{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$,且$(2-x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,则$a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^na_n=$__81__.

【解析】由$C_{20}^{2n+6}=C_{20}^{n+2}$可知$n=4$,令$x=-1$,可得$a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^na_n=3^4=81$.

温馨提示:请自主完成课后作业(九)

课后作业·单独成册

三、知能拓展

计数原理复习

重难突破

要点1 计数原理的应用

【例1】有红、黄、蓝旗各3面，每次升1面、2面或3面在旗杆上纵向排列表示不同的信号，顺序不同也表示不同的信号，共可以组成__39__种信号.

【解析】每次升1面旗可组成3种不同的信号，每次升2面旗可组成$3\times3=9$(种)不同的信号，每次升3面旗可组成$3\times3\times3=27$(种)不同的信号.

根据分类加法计数原理，共可组成$3+9+27=39$(种)不同的信号.

点睛 使用两个计数原理应注意的问题

(1)对于一些比较复杂的既要运用分类加法计数原理，又要运用分步乘法计数原理的问题，我们可以恰当地画出示意图或列出表格，使问题更加直观、清晰.

(2)当两个原理混合使用时，一般是先分类，再在每类方法里分步.

【变式训练1】将5个不同的球放入4个不同的盒子中，每个盒子中至少有1个球.若甲球必须放入A盒，则不同的放法种数是__60__.

【解析】将甲球放入A盒后分两类：一类是除甲球外，A盒还放其他球，共$A_4^4=24$(种)；另一类是A盒中只有甲球，则其他4个球放入另外的3个盒中，有$C_4^2\cdot A_3^3=36$(种).

故不同的放法为$24+36=60$(种).

要点2 排列、组合的综合应用

【例2】安排3名志愿者完成4项工作，每人至少完成1项，每项工作由1人完成，则不同的安排方式共有 (D)

A. 12种　　B. 18种

C. 24种　　D. 36种

【解析】方法一：把4项工作分成3份(将2份工作看成一个元素)有C_4^2种方法；3份工作由3名志愿者完成有A_3^3种方法，故不同的安排方式共有$C_4^2A_3^3=6\times6=36$(种).选D.

方法二：因为安排3名志愿者完成4项工作，每人至少完成1项，每项工作由1人完成，所以必有1人完成2项工作.先把4项工作分成3组，即2，1，1，有$\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}=6$(种)；再分配给3个人，有$A_3^3=6$(种)，所以不同的安排方式共有$6\times6=36$(种).

点睛(1)排列、组合应用题的解题策略

在解决具体问题时，首先必须弄清楚是“分类”还是“分步”，接着还要搞清楚“分类”或者“分步”的具体标准是什么.

(2)解决排列组合应用题的常用方法

①合理分类，准确分步；

②特殊优先，一般在后；

③先取后排，间接排除；

④相邻捆绑，间隔插空；

⑤抽象问题，构造模型；

⑥均分除序，定序除序.

注意：对于排列、组合的综合问题，一般是将符合要求的元素取出或进行分组，再对取出的元素或分好的组进行排列，即一般策略为先组合后排列. 分组时，要注意“平均分组”与“不平均分组”的差异及分组的标准.

【变式训练 2】(1)有 5 盆各不相同的菊花，其中黄菊花 2 盆、白菊花 2 盆、红菊花 1 盆. 现把它们摆放成一排，要求 2 盆黄菊花必须相邻，2 盆白菊花不能相邻，则这 5 盆菊花的不同摆放方式的种数是 (B)

A. 12　　B. 24

C. 36　　D. 48

(2)从 5 名学生中选出 4 名分别参加 A，B，C，D 四科竞赛，其中甲不能参加 C，D 两科竞赛，则不同的参赛方案种数为__72__.

【解析】(1)选 B. 将 2 盆黄菊花捆绑作为一个元素与 1 盆红菊花排列，2 盆白菊花采用插空法，所以这 5 盆菊花的不同摆放方式共有 $A_2^2A_2^2A_3^2=24$(种).

(2)分为以下几步：①选人：先从 5 人中选出 4 人，分为两种情况：有甲参加和无甲参加. 有甲参加时，选法有 $C_4^3=4$(种)；无甲参加时，选法有 $C_4^4=1$(种). ②安排科目：有甲参加时，先排甲，再排其他人，排法有 $A_2^1A_3^3=12$(种)；无甲参加时，排法有 $A_4^4=24$(种). 由分步乘法计数原理，不同的参赛方案种数为 $4\times12+1\times24=72$.

要点 3　二项式定理及应用

【例 3】(1)$(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$ 的展开式中 x 的系数是 (C)

A. -4　　B. -2

C. 2　　D. 4

(2)若 $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ 的展开式中的第 7 项与倒数第 7 项的比是 1∶6，则展开式中的第 7 项为__$\frac{56}{3}$__.

【解析】(1)选 C. $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5=(1+6x^{\frac{1}{2}}+12x+8x^{\frac{3}{2}})\cdot(1-5x^{\frac{1}{3}}+10x^{\frac{2}{3}}-10x+5x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{5}{3}})$，

故 x 的系数是 $12-10=2$.

(2)第 7 项：$T_7=C_n^6(\sqrt[3]{2})^{n-6}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6$，

倒数第 7 项：$T_{n-5}=C_n^{n-6}(\sqrt[3]{2})^6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n-6}$.

由 $\dfrac{C_n^6(\sqrt[3]{2})^{n-6}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6}{C_n^{n-6}(\sqrt[3]{2})^6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n-6}}=\frac{1}{6}$，得 $n=9$.

故 $T_7=C_9^6(\sqrt[3]{2})^{9-6}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6=C_9^3\cdot2\cdot\frac{1}{9}=\frac{56}{3}$.

点睛 二项式定理的问题类型及解题策略

(1)确定二项式中的有关元素：一般是根据已知条件，列出等式，从而可解得所要求的二项式中的有关元素.

(2)确定二项展开式中的常数项：先写出其通项公式，令未知数的指数为零，从而确定项数，然后代入通项公式，即可确定常数项.

(3)确定二项展开式中满足一定条件的项的系数：先写出其通项公式，再由条件确定系数，然后代入通项公式求出此项的系数.

(4)确定二项展开式中的二项式系数或系数最大或最小的项：利用二项式系数的性质求解.

【变式训练 3】(1)$\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中的常数项为 (D)

A. 32　　B. 34

C. 36　　D. 38

(2)(**多选题**)已知$\left(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$$(a>0)$的展开式中第5项与第7项的二项式系数相等，且展开式的各项系数之和为1 024，则下列说法正确的是　　(BCD)

A. 展开式中奇数项的二项式系数和为256

B. 展开式中第6项的系数最大

C. 展开式中存在常数项

D. 展开式中含x^{15}项的系数为45

【解析】(1)选D. $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^4$的展开式的通项为$T_{m+1}=C_4^m(x^3)^{4-m}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^m=C_4^m\cdot(-2)^m x^{12-4m}$，令$12-4m=0$，解得$m=3$. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$的展开式的通项为$T_{n+1}=C_8^n x^{8-n}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^n=C_8^n x^{8-2n}$，令$8-2n=0$，解得$n=4$.

所以所求常数项为$C_4^3(-2)^3+C_8^4=38$.

(2)选BCD. 因为$\left(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中第5项与第7项的二项式系数相等，所以$C_n^4=C_n^6$，得$n=10$. 因为展开式中各项系数之和为1 024，所以令$x=1$，得$(a+1)^{10}=1\ 024$，解得$a=1$. 故给定的二项式为$\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$，其展开式中奇数项的二项式系数和为$\frac{1}{2}\times2^{10}=512$，故A不正确. 由$n=10$可知二项式系数最大的项是展开式的第6项，而$\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$展开式各项的系数与对应的二项式系数相等，故B正确. 展开式的通项公式为$T_{k+1}=C_{10}^k(x^2)^{10-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{10}^k x^{20-\frac{5k}{2}}(k=0,1,2,\cdots,10)$，令$20-\frac{5k}{2}=0$，解得$k=8$，即常数项为第9项，故C正确. 令$20-\frac{5k}{2}=15$，得$k=2$，故展开式中含$x^{15}$项的系数为$C_{10}^2=45$，故D正确.

要点4 二项式定理中的赋值问题

【例4】若$(x^2-3x+2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，

(1)求a_2；

(2)求$a_1+a_2+\cdots+a_{10}$；

(3)求$(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})^2-(a_1+a_3+\cdots+a_7+a_9)^2$.

【解析】(1)$(x^2-3x+2)^5=(x-1)^5(x-2)^5$，

a_2是展开式中x^2的系数，

所以$a_2=C_5^5(-1)^5C_5^3(-2)^3+C_5^4\cdot(-1)^4C_5^4(-2)^4+C_5^3(-1)^3C_5^5(-2)^5=800$.

(2)令$x=1$，代入已知式可得，

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$.

而令$x=0$得，$a_0=32$.

所以$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=-32$.

(3)令$x=-1$可得，

$(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})-(a_1+a_3+\cdots+a_7+a_9)=6^5$.

又$(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})+(a_1+a_3+\cdots+a_7+a_9)=0$，

把这两个等式相乘可得：

$(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})^2-(a_1+a_3+\cdots+a_7+a_9)^2=6^5\times0=0$.

点睛 赋值法的应用

(1)解决的问题类型：与二项式系数有关，

包括求展开式中二项式系数最大的项、各项的二项式系数或系数的和、奇数项或者偶数项的二项式系数或系数的和以及各项系数的绝对值的和.

(2)应用技巧:通过观察展开式右边的结构特点和所求式子的关系,确定给字母所赋的值,有时赋值后得到的式子比所求式子多一项或少一项,此时要专门求出这一项,而在求奇数项或者偶数项的二项式系数或系数的和时,往往要两次赋值,再解方程组求出结果.

注意:求各项系数的绝对值的和时,要先根据绝对值里面数的符号赋值求解.

【变式训练 4】若$(1-2x)^{2\,023}=a_0+a_1x+\cdots+a_{2\,023}x^{2\,023}(x\in\mathbf{R})$,则$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2\,023}}{2^{2\,023}}=$ (D)

A. 2　　B. 0

C. -2　　D. -1

【解析】选 D. $(1-2x)^{2\,023}=a_0+a_1x+\cdots+a_{2\,023}x^{2\,023}$,令 $x=\frac{1}{2}$,则 $\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)^{2\,023}=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2\,023}}{2^{2\,023}}=0$,其中 $a_0=1$.

所以$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2\,023}}{2^{2\,023}}=-1$.

拓展提升

1. 从正方体的6个面中选取3个面,其中有2个面不相邻的选法共有 (B)

A. 8种　　B. 12种

C. 16种　　D. 20种

【解析】在正方体中要使三个平面中"有2个面不相邻(即有2个面平行)",可分两步进行:先取2个相对平行的平面,共有3种取法;再从余下的4个平面取1个,有4种取法.由分步乘法计数原理,共有$3\times4=12$(种)不同的取法.

2. 将1,2,3填入3×3的方格中,要求每行、每列都没有重复数字,如图是一种填法,则不同的填写方法共有 (B)

1	2	3
3	1	2
2	3	1

A. 6种　　B. 12种

C. 24种　　D. 48种

【解析】当第一行和第一列确定之后,其他位置的填法随之而确定.只需考虑填写第一行和第一列的不同方法数.第一行的三个方格有$3\times2\times1=6$(种)不同填法,第一列剩下的两个方格有$2\times1=2$(种)不同填法,由分步乘法计数原理共有$6\times2=12$(种)不同填法.

3. 若$(1+x^2)^n+(1+x)^{2n}$的展开式中x项的系数与x^2项的系数之和为40,则$n=$(C)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

4. 已知在一排4个座位上坐好的甲、乙、丙、丁4个人,在重新就座时,每个人都不坐在原来的位置上的坐法有__9__种.

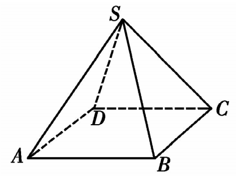
5. 在排球比赛中,一般采取五局三胜制,即首先赢满三局比赛者获胜且比赛结束.现在中国队和古巴队比赛,则最终中国队获胜的情况有__10__种.

6. 若$\left(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$的展开式中$x^5$的系数是$-80$,则实数$a=$__$-2$__.

7. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色,使同一条棱的两个端点异色,如果只有5种颜

色可供使用,那么不同的染色方法共有多少种?

【解析】如图,



由题设,四棱锥 S-$ABCD$ 的顶点 S,A,B 所染颜色互不相同,它们共有 $5\times4\times3=60$(种)染色方法.当 S,A,B 已染好色时,不妨设其颜色分别为 1,2,3;若 C 染色 2,则 D 可染色 3,4,5 之一,有 3 种染法;若 C 染色 4,则 D 可染色 3 或 5,有 2 种染法;若 C 染色 5,则 D 可染色 3 或 4,有 2 种染法.可知 S,A,B 染好后,C,D 共有 7 种染法.从而,总的染色方法为 $60\times7=420$(种).

温馨提示:请自主完成课后作业(十)

课后作业 · 单独成册

第七章 随机变量及其分布

一、课标导向

课标要求

1. 随机事件的条件概率

(1)结合古典概型,了解条件概率,能计算简单随机事件的条件概率.

(2)结合古典概型,了解条件概率与独立性的关系.

(3)结合古典概型,会利用乘法公式计算概率.

(4)结合古典概型,会利用全概率公式计算概率. * 了解贝叶斯公式.

2. 离散型随机变量及其分布列

(1)通过具体实例,了解离散型随机变量的概念,理解离散型随机变量分布列及其数字特征(均值、方差).

(2)通过具体实例,了解伯努利试验,掌握二项分布及其数字特征,并能解决简单的实际问题.

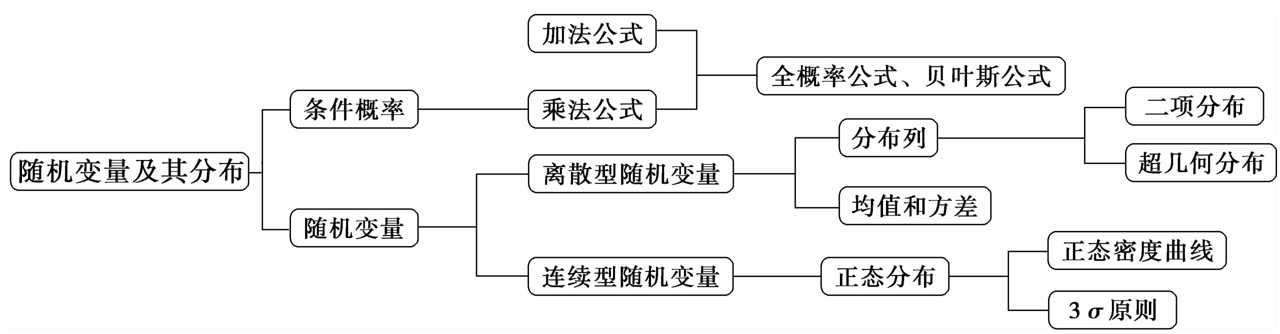
(3)通过具体实例,了解超几何分布及其均值,并能解决简单的实际问题.

3. 正态分布

(1)通过误差模型,了解服从正态分布的随机变量. 通过具体实例,借助频率直方图的几何直观,了解正态分布的特征.

(2)了解正态分布的均值、方差及其含义.

知识网络



二、精讲精练

7.1 条件概率与全概率公式

第1课时 条件概率

自主预习

知新预学

1. 条件概率

条件	设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)>0$
含义	在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的条件概率
记作	$P(B\|A)$
读作	在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率
计算公式	事件个数法:$P(B\|A)=$ $\dfrac{n(AB)}{n(A)}$ 定义法:$P(B\|A)=$ $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

2. 概率的乘法公式

由条件概率的定义,对任意两个事件 A 与 B,若 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

3. 条件概率的性质

设 $P(A)>0$,则

(1)$P(\Omega|A)=$ 1 ;

(2)如果 B 和 C 是两个互斥事件,则 $P(B\cup C|A)=$ $P(B|A)+P(C|A)$;

(3)设 $\overline{B}$ 和 B 互为对立事件,则 $P(\overline{B}|A)=$ $1-P(B|A)$.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)若事件 A,B 互斥,则 $P(B|A)=1$. (×)

(2)$P(B|A)$与$P(A|B)$不同. (√)

2. 若 $P(AB)=\dfrac{3}{10}$,$P(A)=\dfrac{3}{5}$,则 $P(B|A)=$ (B)

A. $\dfrac{9}{50}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{9}{10}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

3. 袋中有5个大小相同的小球(3白2黑),现从袋中每次取1个球,不放回地抽取两次,则在第一次取到白球的条件下,第二次取到白球的概率是 (C)

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $\dfrac{3}{4}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{10}$

【解析】选C. 在第一次取到白球的条件下,在第二次取球时,袋中有2个白球和2个黑球共4个球,所以取到白球的概率 $P=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

4. 某种电子元件用满 3 000 h 不坏的概率为$\frac{3}{4}$，用满 8 000 h 不坏的概率为$\frac{1}{2}$. 现有一只此种电子元件，用满了 3 000 h 不坏，还能用满 8 000 h 的概率是__$\frac{2}{3}$__.

【解析】记事件 A 为“用满 3 000 h 不坏”，$P(A)=\frac{3}{4}$；记事件 B 为“用满 8 000 h 不坏”，$P(B)=\frac{1}{2}$. 因为 $B\subseteq A$，所以 $P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$，则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

互动课堂

合作探究

探究 1　利用定义求条件概率

【例 1】(1)某种动物活到 20 岁的概率是 0.8，活到 25 岁的概率是 0.4，则现龄 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是 (B)

A. 0.32　　B. 0.5

C. 0.4　　D. 0.8

(2)把一枚质地均匀的硬币连续抛两次，记“第一次出现正面”为事件 A，“第二次出现正面”为事件 B，则 $P(B|A)=$ (A)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{9}$

【解析】(1)选 B. 记事件 A 表示“该动物活到 20 岁”，事件 B 表示“该动物活到 25 岁”. 由于该动物只有活到 20 岁才有活到 25 岁的可能，故事件 A 包含事件 B，从而有 $P(AB)=P(B)=0.4$，所以现龄 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$.

(2)选 A. 由题意知，第一次出现正面的概率是 $P(A)=\frac{1}{2}$，第一次出现正面且第二次也出现正面的概率是 $P(AB)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

点睛 利用定义计算条件概率的步骤

(1)分别计算概率 $P(AB)$ 和 $P(A)$.

(2)代入公式得 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$. 这个公式适用于一般情形，其中 AB 表示 A,B 同时发生.

【变式训练 1】一个袋中有 2 个黑球和 3 个白球，如果不放回地抽取 2 个球，记“第一次抽到黑球”为事件 A，“第二次抽到黑球”为事件 B. 则事件 AB 发生的概率为__$\frac{1}{10}$__，$P(B|A)=$__$\frac{1}{4}$__.

【解析】由古典概型的概率公式可知，

$P(A)=\frac{2}{5}$，$P(A\cap B)=\frac{2\times1}{5\times4}=\frac{1}{10}$.

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$.

探究2 缩小基本事件范围求条件概率

【例 2】集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，甲、乙两人各从集合 A 中任取一个数，若甲先取(不放回)，乙后取，在甲抽到奇数的条件下，求乙抽到的数比甲抽到的数大的概率.

【解析】将甲抽到数字 a，乙抽到数字 b，记作 (a,b)，甲抽到奇数的情形有：$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(1,5)$，$(1,6)$，$(3,1)$，$(3,2)$，$(3,4)$，$(3,5)$，$(3,6)$，$(5,1)$，$(5,2)$，$(5,3)$，$(5,4)$，$(5,6)$，共 15 种情况. 在这 15 个数中，乙抽到的数比甲抽到的数大的有：$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(1,5)$，$(1,6)$，$(3,4)$，$(3,5)$，$(3,6)$，$(5,6)$，共 9 种情况，所以所求概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

点睛 利用缩小基本事件范围计算条件概率的方法

将原来的基本事件全体 Ω 缩小为已知的条件事件 A，原来的事件 B 缩小为 AB. 而 A 中仅包含有限个基本事件，每个基本事件发生的概率相等，从而可以在缩小的概率空间上利用古典概型概率公式计算条件概率，即 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$，这里 $n(A)$ 和 $n(AB)$ 的计数是基于缩小的基本事件范围的.

【变式训练 2】一个盒子内装有 4 个产品，其中 3 个一等品，1 个二等品，从中取两次，每次任取 1 个，进行不放回抽取. 设事件 A 为“第一次取到的是一等品”，事件 B 为“第二次取到的是一等品”，试求条件概率 $P(B|A)$.

【解析】将 3 个一等品编号为 1，2，3，二等品编号为 4，以 (i,j) 表示第一次、第二次分别取得第 i 号、第 j 号产品，则试验的样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$，事件 A 有 9 种情况，事件 AB 有 6 种情况，$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

探究3 条件概率性质的应用

【例 3】把外形相同的球分别装在三个盒子中，每盒 10 个. 其中，第一个盒子中有 7 个球标有字母 A，3 个球标有字母 B；第二个盒子中有红球和白球各 5 个；第三个盒子中有红球 8 个、白球 2 个. 试验按如下规则进行：先在第一个盒子中任取 1 个球，若取得标有字母 A 的球，则在第二个盒子中任取 1 个球；若取得标有字母 B 的球，则在第三个盒子中任取 1 个球. 如果第二次取出的是红球，则称试验成功，求试验成功的概率.

【解析】设 $A=\{$从第一个盒子中取得标有字母 A 的球$\}$，

$B=\{$从第一个盒子中取得标有字母 B 的球$\}$，$R=\{$第二次取出的球是红球$\}$，

则容易求得 $P(A)=\frac{7}{10}$，$P(B)=\frac{3}{10}$，

$P(R|A)=\frac{1}{2}$，$P(R|B)=\frac{4}{5}$.

事件“试验成功”表示为 $RA\cup RB$，又事件 RA 与事件 RB 互斥，故由概率的加法公式，得 $P(RA\cup RB)=P(RA)+P(RB)=P(R|A)\cdot P(A)+P(R|B)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{10}=0.59$.

点睛 利用条件概率性质解题的策略

(1)分析条件，选择公式：首先看事件 B，C 是否互斥，若互斥，则选择公式 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

(2)分解计算，代入求值：求比较复杂的事件的概率时，一般先把它分解成两个(或若干个)互不相容的较简单的事件，求出这些简单事件的概率，再利用加法公式可得所求的复杂事件的概率.

【变式训练 3】一个袋子中装有 10 个球，其中 1 个红球、2 个黄球、3 个黑球、4 个白球. 现从中依次摸 2 个球，求在第一个球是红球的条件下，第二个球是黄球或黑球的概率.

【解析】设“摸出第一个球为红球”为事件 A，“摸出第二个球为黄球”为事件 B，“摸出第二个球为黑球”为事件 C，则 $P(A)=\frac{1}{10}$，

$P(AB)=\frac{1\times 2}{10\times 9}=\frac{1}{45}$，$P(AC)=\frac{1\times 3}{10\times 9}=\frac{1}{30}$.

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{45}\div\frac{1}{10}=\frac{2}{9}$，

$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{1}{30}\div\frac{1}{10}=\frac{1}{3}$.

所以 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$.

所以所求的条件概率为 $\frac{5}{9}$.

随堂小练

1. 一个口袋中装有 2 个白球和 3 个黑球，则先摸出 1 个白球后放回，再摸出 1 个白球的概率是 (C)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

【解析】选 C. 设 A_i 表示第 i 次 $(i=1,2)$ 取到白球的事件，因为 $P(A_1)=\frac{2}{5}$，$P(A_1A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$，先摸出 1 个白球后放回，再摸出 1 个白球的概率为 $P(A_2|A_1)=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$.

2. 抛掷红、黄两颗骰子，当红色骰子的点数为 4 或 6 时，两颗骰子的点数之积大于 20 的概率是 (B)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{5}$

【解析】选 B. 抛掷红、黄两颗骰子共有 $6\times 6=36$(个)样本点，其中红色骰子的点数为 4 或 6 的有 12 个基本事件，两颗骰子点数之积大于 20 的包含 4×6，6×4，6×5，6×6，共 4 个样本点，所以其概率为 $\frac{\frac{4}{36}}{\frac{12}{36}}=\frac{1}{3}$.

3. 袋中装有标号为 1，2，3 的三个小球，从中任取一个，记下它的号码，放回袋中，这样连续做三次. 若抽到各球的机会均等，事件 A 为“三次抽到的号码之和为 6”，事件 B 为“三次抽到的号码都是 2”，则 $P(B|A)=$ (A)

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{7}{27}$

【解析】选 A. 因为 $P(A)=\frac{A_3^3+1}{3^3}=\frac{7}{27}$，

$P(AB)=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$，

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{7}$.

4. 据多年的资料记载：位于西部地区的 A，B 两地一年中下雨天分别占 6% 和 8%，而两地同时为下雨天仅占 2%，则 A 地为雨天时，B 地也为雨天的概率为 $\underline{\frac{1}{3}}$.

【解析】记 $A=$“A 地下雨”，$B=$“B 地下雨”，则 $AB=$“A，B 两地同时下雨”，且 $P(A)=$

6%，$P(B)=8\%$，$P(AB)=2\%$，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{2\%}{6\%}=\dfrac{1}{3}$.

5.考虑恰有两个小孩的家庭.

(1)若已知某家有男孩，求这家有两个男孩的概率；

(2)若已知某家第一个是男孩，求这家有两个男孩(相当于第二个也是男孩)的概率(假定生男生女为等可能).

【解析】$\Omega=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)，(女，女)$\}$.

设事件 $B=$“有男孩”，则事件 $B=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)$\}$，

事件 $A=$“有两个男孩”，则事件 $A=\{$(男，男)$\}$，

事件 $B_1=$“第一个是男孩”，则事件 $B_1=\{$(男，男)，(男，女)$\}$，

(1)$P(B)=\dfrac{3}{4}$，$P(BA)=P(A)=\dfrac{1}{4}$，

所以 $P(A|B)=\dfrac{P(BA)}{P(B)}=\dfrac{1}{3}$.

(2)$P(B_1)=\dfrac{1}{2}$，$P(B_1A)=P(A)=\dfrac{1}{4}$，

所以 $P(A|B_1)=\dfrac{P(B_1A)}{P(B_1)}=\dfrac{1}{2}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十一)

课后作业·单独成册

第 2 课时　全概率公式

自主预习

知新预学

1. 全概率公式

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组两两互斥的事件，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意的事件 $B\subseteq\Omega$，有 $P(B)=$ __$\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$__.

2. 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组两两互斥的事件，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意的事件 $B\subseteq\Omega$，$P(B)>0$，有 $P(A_i|B)=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}$，$i=1,2,\cdots,n$.

小试牛刀

1. 一电器商店出售两家工厂生产的电视机，甲厂的电视机占 70%，乙厂的电视机占 30%. 甲厂的电视机合格率为 95%，乙厂的电视机合格率为 80%，求该商店所售电视机的合格率.

【解析】设事件 $A=$“合格电视机”，事件 $B=$“甲厂电视机”，事件 $C=$“乙厂电视机”，则 $P(B)=70\%=0.7$，$P(A|B)=95\%=0.95$，$P(C)=30\%=0.3$，$P(A|C)=80\%=0.8$.

所以 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)=0.7\times0.95+0.3\times0.8=0.905$.

故该商店所售电视机的合格率为 90.5%.

2. 设机器调整良好的概率为 75%，当机器调整良好时，其生产的产品合格率为 90%，而当机器发生某种故障时，产品合格率为 30%. 当某日生产的第一件产品是合格品时，求机器调整良好的概率.

【解析】用 A 表示“产品合格”，B 表示“机器调整良好”，则 $P(B)=75\%=0.75$，$P(\bar{B})=1-P(B)=0.25$，$P(A|B)=90\%=0.9$，$P(A|\bar{B})=30\%=0.3$.

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$
$$=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$
$$=\frac{0.75\times0.9}{0.75\times0.9+0.25\times0.3}=0.9.$$

故已知某日生产的第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率为 0.9.

互动课堂

合作探究

探究 1　全概率公式的应用

【例 1】(1)某投篮小组共有 20 名投手，其中一级投手 4 人、二级投手 8 人、三级投手 8 人，一、二、三级投手能通过选拔进入比赛的概率分别是 0.9，0.7，0.4. 求任选一名投手能通过选拔进入比赛的概率.

(2)某工厂有两个车间生产同型号家用电器，第一车间的次品率为 0.15，第二车间的次品率为 0.12，两个车间的成品都混合堆放在一个仓库，假设第一、二车间生产的成品比例为

2∶3.今有一客户从成品仓库中随机提一台产品,求该产品合格的概率.

【解析】(1)记 A_i="选出的 i 级投手",$i=1,2,3$,则 A_1,A_2,A_3 构成一个完备事件组,有:$A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$,且($A_i,A_j$ 互斥),$i\neq j$,$i,j=1,2,3$.

由题意知 $P(A_1)=\frac{4}{20}$,$P(A_2)=\frac{8}{20}$,$P(A_3)=\frac{8}{20}$,

设 B="选出的投手能通过选拔进入比赛",则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{4}{20}\times0.9+\frac{8}{20}\times0.7+\frac{8}{20}\times0.4=0.62$.

即任选一名选手能通过选拔进入比赛的概率为 0.62.

(2)设 B={从仓库中随机提一台产品是合格品},A_i={提出的一台产品是第 i 车间生产的},$i=1,2$,则有 $B=A_1B\cup A_2B$.

由题意 $P(A_1)=\frac{2}{5}$,$P(A_2)=\frac{3}{5}$,

$P(B|A_1)=0.85$,$P(B|A_2)=0.88$.

由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.4\times0.85+0.6\times0.88=0.868$.

点睛 (1)全概率公式的主要用途在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题,分解为若干个简单事件的概率计算问题,最后应用概率的可加性求出结果.

(2)多个原因导致同一个结果,求结果发生的概率就用全概率公式.

【变式训练 1】假设有 3 箱同种型号的零件,里面分别装有 50 件、30 件、40 件,而其中的一等品分别有 20 件、12 件和 24 件.现任取一箱,从中不放回地先后取出两个零件.试求:

(1)先取出的零件是一等品的概率;

(2)两次取出的零件均为一等品的概率.(精确到 0.01)

【解析】设 A_i 表示任取的一箱为第 i 箱零件,$i=1,2,3$;B_j 表示第 j 次取到的是一等品,$j=1,2$.

由题意知 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$.

(1)$P(B_1|A_1)=\frac{20}{50}=0.4$,$P(B_1|A_2)=\frac{12}{30}=0.4$,$P(B_1|A_3)=\frac{24}{40}=0.6$,

由全概率公式得

$P(B_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1|A_i)=\frac{1}{3}(0.4+0.4+0.6)\approx0.47$.

(2)因为 $P(B_1B_2|A_1)=\frac{C_{20}^2}{C_{50}^2}\approx0.155$,

$P(B_1B_2|A_2)=\frac{C_{12}^2}{C_{30}^2}\approx0.152$,

$P(B_1B_2|A_3)=\frac{C_{24}^2}{C_{40}^2}\approx0.354$,

由全概率公式得 $P(B_1B_2)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(B_1B_2|A_i)\approx\frac{1}{3}(0.155+0.152+0.354)\approx0.22$.

探究 2 贝叶斯公式的应用(选学)

【例 2】某人到武汉参加会议,他乘火车、轮船、汽车或飞机去的概率分别为 0.2,0.1,0.3,0.4.如果他乘火车、轮船、汽车前去,迟到的概率分别为 $\frac{1}{3}$,$\frac{1}{12}$,$\frac{1}{4}$,乘飞机不会迟到.结果他迟到了,则他乘汽车去的概率是多少?

【解析】设 A="迟到",B_1="乘火车",B_2="乘轮船",B_3="乘汽车",B_4="乘飞机".

根据题意,有 $P(B_1)=0.2$,$P(B_2)=0.1$,$P(B_3)=0.3$,$P(B_4)=0.4$,

$P(A|B_1)=\frac{1}{3}, P(A|B_2)=\frac{1}{12}, P(A|B_3)=\frac{1}{4}, P(A|B_4)=0$,

由贝叶斯公式,

有 $P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{\sum_{j=1}^{4}P(A|B_j)P(B_j)}$

$=\frac{\frac{1}{4}\times 0.3}{\frac{1}{3}\times 0.2+\frac{1}{12}\times 0.1+\frac{1}{4}\times 0.3+0\times 0.4}$

$=\frac{0.075}{0.15}=0.5$,

所以他迟到时,乘汽车去的概率为 0.5.

点睛 贝叶斯公式其实就是全概率公式的一种变形,它与全概率公式是互逆的.当结果发生了,求某个原因的概率就用贝叶斯公式.

【变式训练 2】一批树苗 100 株为一捆,抽取 10 株检查,有病株,则不通过.

一捆树苗中的病株数	0	1	2	3	4
概率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

求一捆树苗通过检查,没有病株的概率(精确到 0.01).

【解析】$A_i=\{$一捆树苗中有 i 株病株$|i=0,1,2,3,4\}$,$B=\{$一捆树苗通过检查$\}$.由题设所给条件,可求出 $P(B|A_0)=1$,$P(B|A_1)=0.9$,$P(B|A_2)\approx 0.81$,$P(B|A_3)\approx 0.73$,$P(B|A_4)\approx 0.65$.

由全概率公式知所求的概率为 $P(B)=\sum_{i=0}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.1\times 1+0.2\times 0.9+0.4\times 0.81+0.2\times 0.73+0.1\times 0.65=0.815$.

由贝叶斯公式得所求概率为

$P(A_0|B)=\frac{P(A_0)P(B|A_0)}{\sum_{j=0}^{4}P(A_j)P(B|A_j)}=\frac{0.1\times 1}{0.815}\approx 0.12$.

随堂小练

1. 设一仓库中有 10 箱同种规格的产品,其中由甲、乙、丙三厂生产的分别有 5 箱、3 箱、2 箱,三厂产品的废品率依次为 0.1,0.2,0.3.现从这 10 箱产品中任取一箱,再从这箱中任取一件产品,求取得的产品为正品的概率.

【解析】设 A 为事件"取得的产品为正品",B_1,B_2,B_3 分别表示"任取一件产品是甲、乙、丙生产的".

由题设知 $P(B_1)=\frac{5}{10}, P(B_2)=\frac{3}{10}, P(B_3)=\frac{2}{10}$, $P(A|B_1)=0.9$, $P(A|B_2)=0.8$, $P(A|B_3)=0.7$,

故 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{5}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{7}{10}=0.83$.

2. 用甲胎蛋白法普查肝癌,令 $C=$"被检验者患肝癌",$A=$"甲胎蛋白检验呈阳性",$\overline{C}=$"被检验者未患肝癌",$\overline{A}=$"甲胎蛋白检验呈阴性".由资料知,$P(A|C)=0.95$,$P(\overline{A}|\overline{C})=0.90$.又已知某地居民肝癌发病率 $P(C)=0.0004$,在普查中查出一批甲胎蛋白检验呈阳性的人,求这批人中真的患肝癌的概率 $P(C|A)$(精确到 0.000 1).

【解析】由贝叶斯公式得

$P(C|A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})}=\frac{0.0004\times 0.95}{0.0004\times 0.95+0.9996\times 0.1}\approx 0.0038$.

即这批人中真的有患肝癌的概率为 0.003 8.

温馨提示:请自主完成课后作业(十二)

课后作业·单独成册

7.2 离散型随机变量及其分布列

自主预习

知新预学

1. 随机变量

(1)定义:一般地,对于随机试验样本空间 Ω 中的每个样本点 ω,都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应,我们称 X 为随机变量.

(2)表示:通常用大写英文字母表示随机变量,例如 X,Y,Z;用小写英文字母表示随机变量的取值,例如 x,y,z.

2. 离散型随机变量

可能取值为__有限个__或可以__一一列举__的随机变量,我们称为离散型随机变量.

3. 离散型随机变量的分布列

(1)定义:一般地,设离散型随机变量 X 的可能取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,我们称 X 取每一个值 x_i 的概率 $P(X=x_i)=$__p_i__,$i=1,2,\cdots,n$ 为 X 的__概率分布列__,简称__分布列__.

(2)表示:与函数的表示法类似,离散型随机变量的分布列也可以用表格表示(如下表),还可以用__图形__表示.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

(3)性质:①$p_i \geqslant$__0__,$i=1,2,\cdots,n$;

②$p_1+p_2+\cdots+p_n=$__1__.

4. 两点分布

X	0	1
P	$1-p$	p

若随机变量 X 的分布列具有上表的形式,我们称 X 服从两点分布或__0—1__分布.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)广州某水文站观察到一天中珠江的水位 X 为离散型随机变量. (×)

(2)抛掷质地均匀的骰子一次,出现1点的次数可以称为随机变量. (√)

(3)如果 X 是一个离散型随机变量,那么 X 取每一个可能值的概率都是非负数. (√)

(4)在离散型随机变量分布列中,每一个可能值对应的概率可以为任意的实数. (×)

(5)在离散型随机变量分布列中,在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各值的概率之积. (×)

(6)在离散型随机变量分布列中,所有概率之和为1. (√)

2. 下列表格中,不是某个随机变量的分布列的是 (C)

A.

X	0	1	2
P	0.7	0.15	0.15

B.

X	-2	0	2	4
P	0.5	0.2	0.3	0

C.

X	1	2	3
P	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

D.

X	1	2	3
P	$\lg 1$	$\lg 2$	$\lg 5$

3. 一个口袋内装有除颜色外其他都相同的3个红球、2个蓝球.现从中任取3个,用 X 表示所取球中红球的个数,则 X 的所有可能取值为__1,2,3__.

4. 设离散型随机变量 X 的分布列如下表：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	p

则 $p=$ $\underline{\frac{1}{3}}$.

【解析】由分布列的性质可知 $p=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

互动课堂

合作探究

探究 1 随机变量的概念

【例 1】(1)(**多选题**)抛掷一枚质地均匀的硬币一次，不能作为随机变量的是 (ACD)

A. 抛掷硬币的次数

B. 出现正面的次数

C. 出现正面或反面的次数

D. 出现正面和反面的次数之和

(2)(**多选题**)下列随机变量是离散型随机变量的是 (AB)

A. 从 10 张已编好号码的卡片(从 1 号到 10 号)中任取 1 张，取出的卡片的号数

B. 一个袋中装有 5 个白球和 5 个黑球，从中任取 3 个，其中所含白球的个数

C. 某林场树木最高为 30 m，此林场中树木的高度

D. 某加工厂加工的某种钢管的外径与规定的外径尺寸之差

【解析】(1)选 ACD. 抛掷一枚硬币一次，可能出现的结果是正面向上或反面向上，以某一个为标准，如正面向上的次数来描述这一随机试验，那么正面向上的次数就是随机变量 X，X 的取值是 0，1，故 B 正确. 而 A 中抛掷次数就是 1，不是随机变量；C 中标准不明确；D 中，出现正面和反面的次数之和为必然事件，试验前便知是必然出现的结果，也不是随机变量.

(2)选 AB. A 中只要取出一张，便有一个号码，因此被取出的卡片号数可以一一列出，符合离散型随机变量的定义.

B 中从 10 个球中取 3 个球，所得的结果有以下几种：3 个白球，2 个白球和 1 个黑球，1 个白球和 2 个黑球，3 个黑球，即其结果可以一一列出，符合离散型随机变量的定义.

C 中林场树木的高度是一个随机变量，它可以取(0，30]内的一切值，无法一一列出，不是离散型随机变量.

D 中实际测量值与规定值之间的差值无法一一列出，不是离散型随机变量.

点睛 (1)判断随机试验的三个条件：

①试验在相同条件下可以重复进行；

②试验的所有可能的结果是明确的，并且每次试验的可能结果不止一个；

③每次试验的结果恰好是一个，而且在每次试验前无法预知出现哪个结果.

(2)判定是否为离散型随机变量的关键是随机变量 X 的所有取值是否可以一一列出.

【变式训练 1】(1)(**多选题**)下列变量中，是随机变量的是 (ACD)

A. 某射击手射击一次命中的环数

B. 在标准大气压下，水沸腾的温度

C. 抛掷两枚质地均匀的骰子，所得点数之和

D. 某电话总机在时间区间$(0,T)$内收到呼叫的次数

(2)指出下列随机变量是否为离散型随机

变量,并说明理由.

①某超市 5 月份每天的销售额;

②江西九江市长江水位监测站所测水位在(0,29]这一范围内变化,该水位站所测水位 X.

【解析】(2)①是离散型随机变量.某超市 5 月份每天的销售额可以一一列出,故为离散型随机变量.

②不是离散型随机变量.水位在(0,29]这一范围内变化,不能一一列出,故不是离散型随机变量.

探究 2 用随机变量表示试验的结果

【例 2】写出下列随机变量的所有可能取值,并说明随机变量所取的值表示的随机试验的结果.

(1)一个袋中装有 8 个红球、3 个白球,从中任取 5 个球,其中所含白球的个数为 X;

(2)一个袋中有 5 个同样大小的黑球,编号为 1,2,3,4,5,从中任取 3 个球,取出的球的最大号码记为 X.

【解析】(1)$X=0$ 表示取出的 5 个球全是红球;

$X=1$ 表示取到 1 个白球、4 个红球;

$X=2$ 表示取到 2 个白球、3 个红球;

$X=3$ 表示取到 3 个白球、2 个红球.

(2)$X=3$ 表示取出的球编号为 1,2,3.

$X=4$ 表示取出的球编号为 1,2,4;1,3,4 或 2,3,4.

$X=5$ 表示取出的球编号为 1,2,5;1,3,5;1,4,5;2,3,5;2,4,5 或 3,4,5.

点睛 解决用随机变量表示随机试验的结果问题的关键点和注意点

(1)关键点:解决此类问题的关键是明确随机变量的所有可能取值,以及取每一个值对应的意义,即一个随机变量的取值对应一个或多个随机试验的结果.

(2)注意点:解答过程中不要漏掉某些试验结果.

【变式训练 2】(1)抛掷两枚质地均匀的骰子,记第一枚骰子掷出的点数与第二枚骰子掷出的点数之差为 X,则“$X>4$”表示的试验结果是 (D)

A. 第一枚 6 点,第二枚 2 点

B. 第一枚 5 点,第二枚 1 点

C. 第一枚 2 点,第二枚 6 点

D. 第一枚 6 点,第二枚 1 点

(2)记某射击手射击一次所中环数为 X,则“$X>7$”表示的试验结果是<u>射击一次所中环数为 8 环或 9 环或 10 环</u>.

探究 3 离散型随机变量的分布列

【例 3】一个箱子里装有 5 个大小相同的球,有 3 个白球、2 个红球,从中摸出 2 个球.

(1)求摸出的 2 个球中有 1 个白球和 1 个红球的概率;

(2)用 X 表示摸出的 2 个球中的白球个数,求 X 的分布列及 $P(X\geqslant1)$的值.

【解析】一个箱子里装有 5 个大小相同的球,有 3 个白球、2 个红球,从中摸出 2 个球,有 $C_5^2=10$(种)情况.

(1)设摸出的 2 个球中有 1 个白球和 1 个红球的事件为 A,$P(A)=\frac{C_3^1C_2^1}{10}=\frac{3}{5}$.即摸出的 2 个球中有 1 个白球和 1 个红球的概率$\frac{3}{5}$.

(2)X 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{10}=\frac{1}{10}$,

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{10}=\frac{3}{5}$,

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{10}=\frac{3}{10}$.

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$P(X\geqslant 1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$.

点睛 求离散型随机变量的分布列的一般步骤

(1)确定 X 的所有可能取值 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 以及每个取值所表示的意义.

(2)利用概率的相关知识，求出每个取值相应的概率 $P(X=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots)$.

(3)写出分布列.

(4)根据分布列的性质对结果进行检验.

【变式训练 3】(1)袋中有 5 个白球、6 个红球，从中摸出 2 个球，记 $X=\begin{cases}0,\text{两球全红},\\1,\text{两球非全红},\end{cases}$ 求随机变量 X 的分布列.

(2)将一枚质地均匀的骰子抛掷两次.

①求两次掷出的最小点数 X 的分布列及 $P(X\leqslant 3)$的值；

②求第一次掷出的点数减去第二次掷出的点数之差 Y 的分布列及 $P(|Y|\leqslant 3)$的值.

【解析】(1)由题意知，X 服从两点分布，

$P(X=0)=\frac{C_6^2}{C_{11}^2}=\frac{3}{11}$,

所以 $P(X=1)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$.

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1
P	$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$

(2)设(i,j)表示掷两次骰子后出现的点数，i 表示第一次的点数，j 表示第二次的点数.

①X 的可能取值为 1,2,3,4,5,6. 当 $X=1$ 时，有以下可能出现的结果(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1).

故 $P(X=1)=\frac{11}{36}$.

同理，$P(X=2)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$，$P(X=3)=\frac{7}{36}$，$P(X=4)=\frac{5}{36}$，$P(X=5)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$，$P(X=6)=\frac{1}{36}$.

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

$P(X\leqslant 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{11}{36}+\frac{1}{4}+\frac{7}{36}=\frac{3}{4}$.

②Y 的可能取值为 $-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5$.

当 $Y=-5$ 时，结果只有(1,6)，$P(Y=-5)=\frac{1}{36}$.

同理，当 $Y=-4$ 时，$P(Y=-4)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$，$P(Y=-3)=\frac{1}{12}$，$P(Y=-2)=\frac{1}{9}$，$P(Y=-1)=\frac{5}{36}$，$P(Y=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$P(Y=1)=\frac{5}{36}$，$P(Y=2)=\frac{1}{9}$，$P(Y=3)=\frac{1}{12}$，$P(Y=4)=\frac{1}{18}$，$P(Y=5)=\frac{1}{36}$.

所以 Y 的分布列为：

Y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$P(|Y|\leqslant 3)=P(Y=-3)+P(Y=-2)+P(Y=-1)+P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$.

探究 4 离散型随机变量的分布列的性质

【例 4】设随机变量 X 的分布列 $P\left(X=\frac{k}{5}\right)=ak(k=1,2,3,4,5)$.

(1)求常数 a 的值；

(2)求 $P\left(X\geqslant\frac{3}{5}\right)$；

(3)求 $P\left(\frac{1}{10}<X<\frac{7}{10}\right)$.

【解析】(1)由 $P\left(X=\frac{k}{5}\right)=ak,k=1,2,3,4,5$ 可知，$\sum\limits_{k=1}^{5}P\left(X=\frac{k}{5}\right)=\sum\limits_{k=1}^{5}ak=a+2a+3a+4a+5a=1$，解得 $a=\frac{1}{15}$.

(2)由(1)可知 $P\left(X=\frac{k}{5}\right)=\frac{k}{15}(k=1,2,3,4,5)$，

所以 $P\left(X\geqslant\frac{3}{5}\right)=P\left(X=\frac{3}{5}\right)+P\left(X=\frac{4}{5}\right)+P(X=1)=\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{4}{5}$.

(3) $P\left(\frac{1}{10}<X<\frac{7}{10}\right)=P\left(X=\frac{1}{5}\right)+P\left(X=\frac{2}{5}\right)+P\left(X=\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$.

点睛 离散型随机变量分布列的性质的应用

(1)利用离散型随机变量的分布列的性质可以求与概率有关的参数的取值或范围，还可以检验所求分布列是否正确.

(2)由于离散型随机变量的各个可能值表示的事件是彼此互斥的，所以离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

注意：在利用离散型随机变量分布列的性质求参数的值时，要注意参数的取值范围.

【变式训练 4】(1)设 X 是一个离散型随机变量，其分布列如下表：

X	-1	0	1
P	0.5	$1-\frac{3}{2}q$	q^2

则 $q=$__$\frac{1}{2}$__.

(2)设随机变量 X 只能取 $5,6,7,\cdots,16$ 这 12 个值，且取每一个值的概率均相等. 若 $P(X<x)=\frac{1}{12}$，则 x 的取值范围是__$(5,6]$__.

【解析】(1)由 $0.5+1-\frac{3}{2}q+q^2=1$，解得 $q=1$ 或 $q=\frac{1}{2}$. 当 $q=1$ 时，$1-\frac{3}{2}q<0$ 不成立，所以 $q=\frac{1}{2}$.

(2)依题意知，X 的分布列为：

X	5	6	7	$\cdots$	16
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\cdots$	$\frac{1}{12}$

由分布列知，$P(X<x)=P(X=5)=\frac{1}{12}$.

故 $x\in(5,6]$.

随堂小练

1.(**多选题**)下列变量是离散型随机变量的是 (AC)

A. 某高速公路上某收费站 1 小时内经过的车辆数

B. 一个沿直线 $y=x$ 进行随机运动的质点,它在该直线上的位置是一个随机变量

C. 某网站 1 小时内的点击量

D. 一天内的温度

【解析】选 AC. A 是,因为 1 小时内经过该收费站的车辆可一一列出. B 不是,质点在直线 $y=x$ 上运动时的位置无法一一列出. C 是,1 小时内网站的访问次数可一一列出. D 不是,1 天内的温度是该天最低温度和最高温度这一范围内的任意实数,无法一一列出.

2. 袋中有大小相同的红球 6 个、白球 5 个,从袋中每次任意取出 1 个球,直到取出的球是白球为止,所需要的取球次数为随机变量 X,则 X 的可能取值为 (B)

A. 1,2,3,4,5,6　　B. 1,2,3,4,5,6,7

C. 0,1,2,3,4,5　　D. 1,2,3,4,5

【解析】选 B. 由于取到白球时取球停止,所以取球次数可以是 1,2,3,…,7.

3. 已知随机变量 X 的分布列如表所示(其中 a 为常数):

X	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	a

则下列计算结果正确的是 (C)

A. $P(X<2)=0.7$　　B. $P(X\geqslant 2)=0.6$

C. $P(X\geqslant 3)=0.3$　　D. $P(X\leqslant 1)=0.2$

【解析】选 C. 易得 $a=0.1$,$P(X\geqslant 3)=0.3$.

4. 设某项试验的成功率是失败率的 2 倍,用随机变量 X 描述一次试验的成功次数,则 $P(X=0)=$ $\underline{\frac{1}{3}}$.

【解析】设 $P(X=1)=p$,则 $P(X=0)=1-p$.

依题意知,$p=2(1-p)$,解得 $p=\frac{2}{3}$.

故 $P(X=0)=1-p=\frac{1}{3}$.

5. 某高二数学兴趣小组有 7 位同学,其中有 4 位参加过高一数学"南方杯"竞赛. 若从该小组中任选 3 位同学参加高二数学"南方杯"竞赛,求这 3 位同学中参加过高一数学"南方杯"竞赛的人数 X 的分布列及 $P(X<2)$ 的值.

【解析】由题意可知,X 的可能取值为 0,1,2,3.

则 $P(X=0)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$,

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$,

$P(X=3)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$.

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$

$=\frac{1}{35}+\frac{12}{35}=\frac{13}{35}$.

温馨提示:请自主完成课后作业(十三)

课后作业 · 单独成册

7.3 离散型随机变量的数字特征

第 1 课时 离散型随机变量的均值

自主预习

知新预学

1. 离散型随机变量的均值或数学期望

(1)定义：一般地，若离散型随机变量 X 的分布列为：

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

则称 $E(X)=$ ___$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$___ $=$ ___$\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i$___ 为随机变量 X 的均值或数学期望.

(2)意义：均值是随机变量的可能取值关于取值概率的___加权平均数___，它综合了随机变量的取值和取值的概率，反映了随机变量取值的___平均水平___.

(3)性质：若 X 是离散型随机变量，则①$E(X+b)=$___$E(X)+b$___；②$E(aX)=$___$aE(X)$___；③$E(aX+b)=$___$aE(X)+b$___.

2. 两点分布的均值

一般地，如果随机变量 X 服从两点分布，那么 $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)随机变量 X 的均值 $E(X)$ 是一个变量，其随 X 的变化而变化. (×)

(2)随机变量的均值与样本的平均值相同. (×)

(3)若随机变量 X 的均值为 $E(X)=2$，则 $E(2X)=4$. (√)

2. 已知随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

则 $E(X)=$ (A)

A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

【解析】选 A. $E(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$.

3. 已知随机变量 X 的分布列为：

X	0	2	4
P	0.3	0.2	0.5

则 $E(5X+4)=$ (A)

A. 16　　B. 11　　C. 2.2　　D. 2.3

【解析】选 A. 由已知得 $E(X)=0\times0.3+2\times0.2+4\times0.5=2.4$，

故 $E(5X+4)=5E(X)+4=5\times2.4+4=16$.

4. 已知随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.1	a	b	0.1

若 $E(X)=1.6$，则 $a-b=$ (B)

A. 0.2　　B. -0.2

C. 0.8　　D. -0.8

【解析】选 B. 易知 $a,b\in(0,1)$，由 $0.1+a+b+0.1=1$，得 $a+b=0.8$.

又由 $E(X)=0\times0.1+1\times a+2\times b+3\times0.1=1.6$，得 $a+2b=1.3$.

解得 $a=0.3$，$b=0.5$. 则 $a-b=-0.2$.

互动课堂

合作探究

探究 1 求离散型随机变量的均值

【例 1】某商店试销某种商品 20 天，获得如下数据：

日销售量/件	0	1	2	3
天数	1	5	9	5

试销结束后(假设该商品的日销售量的分布规律不变)，设某天开始营业时有该商品 3 件，当天营业结束后检查存货，若发现存量少于 2 件，则当天进货补充至 3 件，否则不进货，将频率视为概率.

(1)求当天商店不进货的概率；

(2)记 X 为第二天开始营业时该商品的件数，求 X 的分布列和均值.

【解析】(1)P(当天商店不进货)$=P$(当天商店销售量为 0 件)$+P$(当天商店销售量为 1 件)$=\frac{1}{20}+\frac{5}{20}=\frac{3}{10}$.

(2)由题意知 X 的可能取值为 2，3，

$P(X=2)=P$(当天商品销售量为 1 件)$=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$，

$P(X=3)=P$(当天商品销售量为 0 件)$+P$(当天商品销售量为 2 件)$+P$(当天商品销售量为 3 件)$=\frac{1}{20}+\frac{9}{20}+\frac{5}{20}=\frac{3}{4}$.

故 X 的分布列为：

X	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

所以 X 的均值为 $E(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$.

点睛 求离散型随机变量均值的一般步骤

(1)判断取值，即判断随机变量的所有可能取值.

(2)求概率，即求出随机变量取每个值时的概率.

(3)写分布列，即按规范形式写出分布列，并注意用分布列的性质检验所求的分布列或某事件的概率是否正确.

(4)求均值，利用均值的定义求均值.

【变式训练 1】随机变量 X 服从两点分布，其分布列如下表所示，则 $E(X)=$ (A)

X	0	1
P	$\frac{1}{5}$	a

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

【解析】选 A. 由题意知 $\frac{1}{5}+a=1$，所以 $a=\frac{4}{5}$，$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times a=a=\frac{4}{5}$.

探究 2 离散型随机变量均值的性质

【例 2】已知随机变量 X 的分布列为：

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	m	$\frac{1}{20}$

(1)求 $E(X)$；

(2)若 $Y=2X-3$，求 $E(Y)$.

【解析】(1)由随机变量分布列的性质，得 $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+m+\frac{1}{20}=1$，解得 $m=\frac{1}{6}$.

所以 $E(X)=(-2)\times\frac{1}{4}+(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{20}=-\frac{17}{30}$.

(2)方法一：由公式 $E(aX+b)=aE(X)+b$，得 $E(Y)=E(2X-3)=2E(X)-3$

$=2\times\left(-\frac{17}{30}\right)-3=-\frac{62}{15}$.

方法二：由于 $Y=2X-3$，所以 Y 的分布列为：

Y	-7	-5	-3	-1	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{20}$

所以 $E(Y)=(-7)\times\frac{1}{4}+(-5)\times\frac{1}{3}+(-3)\times\frac{1}{5}+(-1)\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{20}=-\frac{62}{15}$.

点睛 利用离散型随机变量均值的性质解决问题的思路

若给出的随机变量 Y 与 X 之间的关系为 $Y=aX+b$，a，b 为常数. 一般思路是先求出 $E(X)$，再利用公式 $E(aX+b)=aE(X)+b$ 求 $E(Y)$. 也可以利用 X 的分布列得到 Y 的分布列，由 X 的取值计算 Y 的取值，对应的概率相等，再由定义法求得 $E(Y)$.

【变式训练 2】若 p 为非负实数，随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}-p$	p	$\frac{1}{2}$

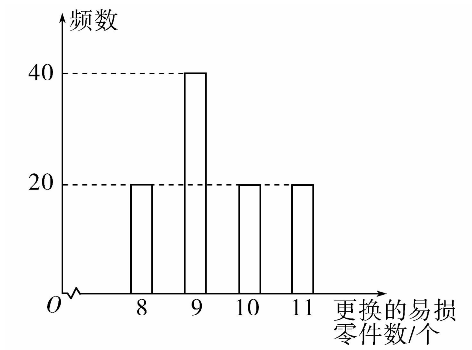
则 $E(X)$ 的最大值为 (B)

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 2

【解析】选 B. 由分布列的性质可知 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}$，$0\leqslant\frac{1}{2}-p\leqslant\frac{1}{2}$，则 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $E(X)=p+1\leqslant\frac{3}{2}$.

探究 3　均值的实际应用

【例 3】某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后会被淘汰. 该机器有一种易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得到如下统计图：



以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.

(1)求 X 的分布列；

(2)若要求 $P(X\leqslant n)\geqslant 0.5$，确定 n 的最小值；

(3)以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

【解析】(1)由图可得，1 台机器在三年内需更换的易损零件数为 8，9，10，11 的概率分别为 0.2，0.4，0.2，0.2，从而

$P(X=16)=0.2\times0.2=0.04$；

$P(X=17)=2\times0.2\times0.4=0.16$；

$P(X=18)=2\times0.2\times0.2+0.4\times0.4=0.24$；

$P(X=19)=2\times0.2\times0.2+2\times0.4\times0.2=0.24$；

$P(X=20)=2\times0.2\times0.4+0.2\times0.2=0.2$；

$P(X=21)=2\times0.2\times0.2=0.08$；

$P(X=22)=0.2\times0.2=0.04$.

所以 X 的分布列为：

X	16	17	18	19	20	21	22
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.2	0.08	0.04

(2)由(1)知 $P(X\leqslant18)=0.44$，$P(X\leqslant19)=0.68$，故 n 的最小值为 19.

(3)购买零件所用费用含两部分，一部分为购买零件的费用，另一部分为备件不足时额外购买的费用，

当 $n=19$ 时，费用的期望为 $19\times200+500\times0.2+1\ 000\times0.08+1\ 500\times0.04=4\ 040$，

当 $n=20$ 时，费用的期望为 $20\times200+500\times0.08+1\ 000\times0.04=4\ 080$.

所以应选 $n=19$ 更合适.

点睛 概率模型的解答步骤

(1)审题，确定实际问题是哪种概率模型，可能用到的事件类型，所用的公式有哪些.

(2)确定随机变量的分布列，计算随机变量的均值.

(3)对照实际意义，得出概率、均值等所表示的结论.

【变式训练3】某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本为每瓶 4 元，售价为每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年的销售经验，每天需求量与当天最高气温有关. 如果最高气温不低于 25 ℃，需求量为 500 瓶；如果最高气温在 20～25 ℃之间，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20 ℃，需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温(单位：℃)数据，得到下面的频数分布表：

最高气温	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

(1)求六月份这种酸奶一天的需求量 X(单位：瓶)的分布列；

(2)设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y(单位：元)，当六月份这种酸奶一天的进货量 n(单位：瓶)为多少时，Y 的数学期望最大?

【解析】(1)由题意知，X 所有可能取值为 200，300，500，由表格数据知

$$P(X=200)=\frac{2+16}{90}=0.2,$$

$$P(X=300)=\frac{36}{90}=0.4,$$

$$P(X=500)=\frac{25+7+4}{90}=0.4.$$

因此 X 的分布列为：

X	200	300	500
P	0.2	0.4	0.4

(2)由题意知，这种酸奶一天的需求量至多为 500 瓶，至少为 200 瓶，因此只需考虑 $200\leqslant n\leqslant500$.

当 $300\leqslant n\leqslant500$ 时，

若最高气温不低于 25，则 $Y=6n-4n=2n$；

若最高气温位于区间[20,25)，则 $Y=600-2(n-300)=1\ 200-2n$；

若最高气温低于 20，则 $Y=400-2(n-200)=800-2n$.

因此 $E(Y)=2n\times0.4+(1\ 200-2n)\times$

$0.4+(800-2n)\times 0.2=640-0.4n.$

当 $200\leqslant n<300$ 时，

若最高气温不低于 20，则 $Y=6n-4n=2n$；

若最高气温低于 20，则 $Y=400-2(n-200)=800-2n.$

因此 $E(Y)=2n\times(0.4+0.4)+(800-2n)\times 0.2=160+1.2n.$

所以 n 为 300 时，Y 的数学期望最大.

随堂小练

1.已知随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	0.2	0.5	m

则 $E(X)=$ （ B ）

A. 2　　B. 2.1

C. 2.3　　D. 随 m 的变化而变化

【解析】选 B. 因为 $0.2+0.5+m=1$，

所以 $m=0.3$，所以 $E(X)=1\times 0.2+2\times 0.5+3\times 0.3=2.1.$

2.已知某一随机变量 X 的分布列如下表所示，若 $E(X)=6.3$，则 $a=$ （ A ）

X	a	7	9
P	b	0.1	0.4

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【解析】选 A. 根据随机变量 X 的分布列可知 $b+0.1+0.4=1$，

所以 $b=0.5$. 又 $E(X)=ab+7\times 0.1+9\times 0.4=6.3$，所以 $a=4$.

3.现有一个项目，对该项目每投资 10 万元，一年后利润是 1.2 万元、1.18 万元、1.17 万元的概率分别为 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$. 随机变量 X 表示对此项目投资 10 万元一年后的利润，则 X 的均值为 （ A ）

A. 1.18　　B. 3.55

C. 1.23　　D. 2.38

【解析】选 A. 由题可知 X 的分布列为：

X	1.2	1.18	1.17
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

则 $E(X)=1.2\times\frac{1}{6}+1.18\times\frac{1}{2}+1.17\times\frac{1}{3}=1.18.$

4.若离散型随机变量 X 的分布列为：

X	0	1
P	$9c^2-c$	$3-8c$

试求出离散型随机变量 X 的分布列.

【解析】由已知可得 $9c^2-c+3-8c=1$，

所以 $9c^2-9c+2=0$，所以 $c=\frac{1}{3}$ 或 $c=\frac{2}{3}$.

检验：当 $c=\frac{1}{3}$ 时，$9c^2-c=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>0$，$3-8c=3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}>0$；

当 $c=\frac{2}{3}$ 时，$9c^2-c=9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}>1$，$3-8c=3-\frac{16}{3}<0$（舍去）. 故 $c=\frac{1}{3}$.

故所求分布列为：

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

温馨提示：请自主完成课后作业（十四）

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　离散型随机变量的方差

自主预习

知新预学

1. 方差

设离散型随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

我们称 $D(X)=$ $\underline{(x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\cdots+(x_n-E(X))^2p_n}$ $=$ $\underline{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i}$ 为随机变量 X 的方差，有时也记为 $Var(X)$.

2. 标准差

称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差，记为 $\sigma(X)$.

3. 方差的性质

(1)$D(X+b)=$ $\underline{D(X)}$；

(2)$D(aX)=$ $\underline{a^2D(X)}$；

(3)$D(aX+b)=$ $\underline{a^2D(X)}$.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)离散型随机变量的方差越大，随机变量取值越集中.　　(×)

(2)若 a 是常数，则 $D(a)=0$.　　(√)

(3)离散型随机变量的方差反映了随机变量偏离于期望的平均程度.　　(√)

2. 已知随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

则 $D(X)=$　　(C)

A. $\frac{29}{12}$　　B. $\frac{121}{144}$　　C. $\frac{179}{144}$　　D. $\frac{17}{12}$

3. 设一个随机试验的结果只有 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=m$，令随机变量 $X=\begin{cases}1, A\text{ 发生}, \\ 0, A\text{ 不发生},\end{cases}$ 则 X 的方差 $D(X)=$　　(D)

A. m　　B. $2m(1-m)$

C. $m(m-1)$　　D. $m(1-m)$

【解析】选 D. 随机变量 X 的分布列为：

X	0	1
P	$1-m$	m

所以 $E(X)=0\times(1-m)+1\times m=m$.

所以 $D(X)=(0-m)^2\times(1-m)+(1-m)^2\times m=m(1-m)$.

4. 已知随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

设 $Y=2X+3$，则 $D(Y)=$ $\underline{\frac{8}{3}}$.

互动课堂

合作探究

探究 1　求离散型随机变量的方差

【例 1】已知随机变量 X 的分布列为：

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	a

(1)求 X^2 的分布列；

(2)计算 X 的方差；

(3)若 $Y=4X+3$，求 Y 的均值和方差.

【解析】(1)由分布列的性质，知 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+a=1$，故 $a=\frac{1}{4}$，从而 X^2 的分布列为：

X^2	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

(2)由(1)知 $a=\frac{1}{4}$，所以 X 的均值 $E(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$.

故 X 的方差 $D(X)=\left(-1+\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(0+\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(1+\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$.

(3)因为 $Y=4X+3$，所以 $E(Y)=4E(X)+3=2$，$D(Y)=4^2D(X)=11$.

点睛 求离散型随机变量的方差或标准差的步骤

(1)明确随机变量的取值，以及取每个值的试验结果.

(2)求出随机变量取各个值时的概率.

(3)写出分布列.

(4)利用公式 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$ 求出随机变量的期望 $E(X)$.

(5)代入公式 $D(X)=(x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\cdots+(x_i-E(X))^2p_i+\cdots+(x_n-E(X))^2p_n$ 求出方差 $D(X)$.

(6)代入公式 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 求出随机变量的标准差 $\sigma(X)$.

【变式训练 1】已知随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	0.5	x	y

若 $E(X)=\frac{15}{8}$，则 $D(X)=$ (B)

A. $\frac{33}{64}$　　B. $\frac{55}{64}$　　C. $\frac{7}{32}$　　D. $\frac{9}{32}$

【解析】选 B. 由分布列的性质得 $x+y=0.5$. 又 $E(X)=\frac{15}{8}$，所以 $2x+3y=\frac{11}{8}$，解得 $x=\frac{1}{8}$，$y=\frac{3}{8}$. 所以 $D(X)=\left(1-\frac{15}{8}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(2-\frac{15}{8}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(3-\frac{15}{8}\right)^2\times\frac{3}{8}=\frac{55}{64}$.

探究 2 方差的实际应用

【例 2】甲、乙两名射击手在一次射击中的得分为两个相互独立的随机变量 X 与 Y，且 X,Y 的分布列为：

X	1	2	3
P	a	0.1	0.6

Y	1	2	3
P	0.3	b	0.3

(1)求 a,b 的值；

(2)计算 X,Y 的期望与方差，并以此分析甲、乙的射击技术.

【解析】(1)由离散型随机变量的分布列的性质可知

$a+0.1+0.6=1$，解得 $a=0.3$.

同理，$0.3+b+0.3=1$，解得 $b=0.4$.

(2)$E(X)=1\times0.3+2\times0.1+3\times0.6=2.3$，

$E(Y)=1\times0.3+2\times0.4+3\times0.3=2$，

$D(X)=(1-2.3)^2\times0.3+(2-2.3)^2\times$

$0.1+(3-2.3)^2\times0.6=0.81$,

$D(Y)=(1-2)^2\times0.3+(2-2)^2\times0.4+(3-2)^2\times0.3=0.6$.

由于 $E(X)>E(Y)$,说明在一次射击中,甲的平均得分比乙高,但 $D(X)>D(Y)$,说明甲得分的稳定性不如乙,因此甲、乙两人技术水平都不够全面,各有优势与劣势.

点睛 利用均值和方差解决实际问题的步骤

(1)比较均值:离散型随机变量的均值反映了离散型随机变量取值的平均水平,因此,在实际决策问题中,需先计算均值,看谁的平均水平高.

(2)计算方差:方差反映了离散型随机变量取值离散的程度.通过计算方差,分析谁的发挥相对稳定.

(3)下结论:依据均值和方差的意义得出结论.

【变式训练 2】最近,李师傅一家三口就如何将手中的 10 万元钱进行投资理财,提出了三种方案.

第一种方案:李师傅的儿子认为,根据股市收益大的特点,应将 10 万元全部用来买股票.据分析预测,投资股市一年后可能获利 40%,也可能亏损 20%(只有这两种可能),且获利的概率为$\frac{1}{2}$.

第二种方案:李师傅认为,现在股市风险大,基金风险较小,应将 10 万元全部用来买基金.据分析预测,投资基金一年后可能获利 20%,可能亏损 10%,也可能不赚不赔,且这三种情况发生的概率分别为$\frac{3}{5}$,$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{5}$.

第三种方案:李师傅的妻子认为,投资股市、基金均有风险,应将 10 万元全部存入银行一年,现在存款年利率为 2.25%.

针对以上三种投资方案,请你为李师傅家选择一种合理的理财方案,并说明理由.

【解析】若按第一种方案执行,设收益为 X 万元,则其分布列为:

X	4	-2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X 的数学期望 $E(X)=4\times\frac{1}{2}+(-2)\times\frac{1}{2}=1$.

若按第二种方案执行,设收益为 Y 万元,则其分布列为:

Y	2	0	-1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y 的数学期望 $E(Y)=2\times\frac{3}{5}+0\times\frac{1}{5}+(-1)\times\frac{1}{5}=1$.

若按第三种方案执行,收益 $y=10\times2.25\%=0.225$,

因此 $E(X)=E(Y)>y$.

又 $D(X)=(4-1)^2\times\frac{1}{2}+(-2-1)^2\times\frac{1}{2}=9$,

$D(Y)=(2-1)^2\times\frac{3}{5}+(0-1)^2\times\frac{1}{5}+(-1-1)^2\times\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$.

由以上可知 $D(X)>D(Y)$.这说明虽然第一种方案、第二种方案收益相等,但第二种方案更稳妥.

所以建议李师傅家选择第二种方案投资较为合理.

随堂小练

1. 已知随机变量 X 满足 $P(X=1)=0.3$，$P(X=2)=0.7$，则 $E(X)$ 和 $D(X)$ 的值分别为 (D)

A. 0.6 和 0.7　　B. 1.7 和 0.09

C. 0.3 和 0.7　　D. 1.7 和 0.21

【解析】选 D. $E(X)=1\times0.3+2\times0.7=1.7$，

$D(X)=(1-1.7)^2\times0.3+(2-1.7)^2\times0.7=0.21$.

2. 已知某离散型随机变量 X 服从的分布列如下表所示，则 $D(X)=$ (B)

X	0	1
P	m	$2m$

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

【解析】选 B. 由题意可知 $m+2m=1$，所以 $m=\frac{1}{3}$，所以 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$，所以 $D(X)=\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

3. 设 $0<p<1$，随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

则当 p 在 $(0,1)$ 内增大时， (D)

A. $D(X)$减小

B. $D(X)$增大

C. $D(X)$先减小后增大

D. $D(X)$先增大后减小

【解析】选 D. 由题可得 $E(X)=\frac{1}{2}+p$，

所以 $D(X)=-p^2+p+\frac{1}{4}=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，

所以当 p 在 $(0,1)$ 内增大时，$D(X)$先增大后减小.

4. 已知 A_1,A_2 为两所高校举行的自主招生考试，某同学参加每所高校的考试获得通过的概率均为 $\frac{1}{2}$，该同学一旦通过某所高校的考试，就不再参加其他高校的考试. 设该同学通过高校的个数为随机变量 X，则 $D(X)=$ $\underline{\frac{3}{16}}$.

【解析】因为 X 的取值为 0，1，

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P(X=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$，

$D(X)=\frac{9}{16}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十五、十六）

课后作业 · 单独成册

7.4 二项分布与超几何分布

第1课时 二项分布

自主预习

知新预学

1. n 重伯努利试验

(1)概念：只包含__两__个可能结果的试验叫做伯努利试验，我们将一个伯努利试验__独立地重复__进行 n 次所组成的随机试验称为 n 重伯努利试验.

(2)特征：①同一个伯努利试验__重复__做 n 次；②各次试验的结果__相互独立__.

2. 二项分布

一般地，在 n 重伯努利试验中，设每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，用 X 表示事件 A 发生的次数，则 X 的分布列为 $P(X=k)=$__$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$__，$k=0,1,2,\cdots,n$. 如果随机变量 X 的分布列具有上式的形式，则称随机变量 X 服从二项分布，记作__$X\sim B(n,p)$__.

3. 二项分布的均值与方差

如果 $X\sim B(n,p)$，那么 $E(X)=$__np__，$D(X)=$__$np(1-p)$__.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)n 重伯努利试验的每次试验结果可以有多种. (×)

(2)n 重伯努利试验的每次试验的条件可以略有不同. (×)

(3)两点分布是二项分布的特殊情形. (√)

2. 设随机变量 $X\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，则 $P(X=3)=$ (A)

A. $\frac{5}{16}$　　B. $\frac{3}{16}$

C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{3}{8}$

【解析】选 A. 因为 $X\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $P(X=3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$.

3. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=1.6$，$D(X)=1.28$，则 (A)

A. $n=8,p=0.2$　　B. $n=4,p=0.4$

C. $n=5,p=0.32$　　D. $n=7,p=0.45$

【解析】选 A. 由已知有 $\begin{cases}np=1.6,\\np(1-p)=1.28,\end{cases}$

解得 $n=8,p=0.2$.

4. 将一枚质地均匀的硬币抛掷 6 次，则正面出现的次数比反面出现的次数多的概率为__$\frac{11}{32}$__.

【解析】正面出现的次数比反面出现的次数多，则正面可以出现 4 次、5 次或 6 次，所求概率

$P=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^1+C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(1-\frac{1}{2}\right)^0=\frac{11}{32}$.

5. 牧场有 10 头牛，因误食含有病毒的饲料而被感染. 已知该病的发病率为 0.02，设发病的牛的头数为 X，则 $D(X)=$ __0.196__.

【解析】因为 $X\sim B(10,0.02)$，

所以 $D(X)=10\times0.02\times(1-0.02)=0.196$.

互动课堂

合作探究

探究 1　伯努利试验的概率

【例 1】已知甲、乙两人各射击一次，击中目标的概率分别是 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$，每次射击是否击中目标相互之间没有影响.

(1)求甲射击 3 次，至少 1 次未击中目标的概率；

(2)求两人各射击 2 次，甲恰好击中目标 2 次且乙恰好击中目标 1 次的概率.（结果用分数表示）

【解析】(1)记“甲射击 3 次至少有 1 次未击中目标”为事件 A_1，由题意，射击 3 次，相当于 3 次伯努利试验，故 $P(A_1)=1-P(\overline{A_1})=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$.

(2)记“甲射击 2 次，恰有 2 次击中目标”为事件 A_2，“乙射击 2 次，恰有 1 次击中目标”为事件 B_2，则 $P(A_2)=C_2^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$P(B_2)=C_2^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}$. 由于甲、乙射击相互独立，故 $P(A_2B_2)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$.

点睛 伯努利试验概率求法的三个步骤

判断	依据 n 重伯努利试验的特征，判断所给试验是否为伯努利试验
分析	判断所求事件是否需要分拆
计算	就每个事件依据 n 重伯努利试验的概率公式求解，最后利用互斥事件概率加法公式计算

【变式训练 1】已知某气象站天气预报的准确率为 80%，求：

(1)5 次预报中恰有 2 次准确的概率；

(2)5 次预报中至少有 2 次准确的概率.（结果保留到小数点后第 2 位）

【解析】(1)记“预报一次准确”为事件 A，则 $P(A)=0.8$.

5 次预报相当于 5 次独立重复试验.

“恰有 2 次准确”的概率为 $P=C_5^2\times0.8^2\times0.2^3=0.0512\approx0.05$，

因此 5 次预报中恰有 2 次准确的概率约为 0.05.

(2)“5 次预报中至少有 2 次准确”的对立事件为“5 次预报全部不准确或只有 1 次准确”，其概率为 $P=C_5^0\times0.2^5+C_5^1\times0.8\times0.2^4=0.00672$.

所以所求概率为 $1-P=1-0.00672\approx0.99$.

所以“5 次预报中至少有 2 次准确”的概率约为 0.99.

探究 2　二项分布

【例 2】一名学生每天骑自行车上学，从家到学校的途中有 5 个路口，假设他在各路口遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{1}{3}$.

(1)求这名学生在途中遇到红灯的次数 X 的分布列；

(2)求这名学生在首次遇到红灯或到达目

的地停车前经过的路口数 Y 的分布列;

(3)求这名学生在途中至少遇到一次红灯的概率.

【解析】(1)由 $X\sim B\left(5,\frac{1}{3}\right)$,则

$P(X=k)=C_5^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$,$k=0,1,2,3,4,5$.

故 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

(2)Y 的分布列为 $P(Y=k)=P$(前 k 个是绿灯,第 $k+1$ 个是红灯)$=\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\frac{1}{3}$,$k=0,1,2,3,4$.

$P(Y=5)=P$(5 个均为绿灯)$=\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

故 Y 的分布列为:

Y	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$	$\frac{32}{243}$

(3)所求概率为 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{211}{243}$.

点睛 利用二项分布解决实际应用问题的思路

(1)根据题意设出随机变量.

(2)分析随机变量是否服从二项分布.

(3)找到参数 n(试验的次数)和 p(事件发生的概率).

(4)写出二项分布的分布列.

【变式训练 2】(1)位于坐标原点的一个质点 P 按下列规则移动:质点每次移动一个单位,移动的方向为向上或向右,并且向上、向右移动的概率都是 $\frac{1}{2}$,质点 P 移动 5 次后位于点 $(2,3)$ 的概率是 (B)

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$　　B. $C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

C. $C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$　　D. $C_5^2C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$

(2)袋中有 8 个白球、2 个黑球,从中随机地连续抽取 3 次,每次取 1 个球.求:有放回抽样时,取到黑球的次数 X 的分布列.

【解析】(1)选 B.质点 P 由原点移动到 $(2,3)$ 需要移动 5 次,且必须有 2 次向右,3 次向上,所以质点 P 移动 5 次后位于点 $(2,3)$ 的概率即为质点 P 的 5 次移动中恰有 2 次向右移动的概率,而每一次向右移动的概率都是 $\frac{1}{2}$,所以向右移动的次数 $X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$,所以所求的概率为 $P(X=2)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

(2)有放回抽样时,取到黑球的次数 X 可能的取值为 0,1,2,3.由于每次取到黑球的概率均为 $\frac{1}{5}$,3 次取球可以看成 3 次独立重复试验,则 $X\sim B\left(3,\frac{1}{5}\right)$,则

$$P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{1}{5}\right)^0\times\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125},$$

$$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{5}\right)^1\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125},$$

$$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125},$$

$$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{125}.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

探究 3 二项分布的均值与方差

【例 3】某商场为刺激消费，拟按以下方案进行促销：顾客每消费 500 元便得到抽奖券 1 张，每张抽奖券的中奖概率为$\frac{1}{2}$，若中奖，商场返还顾客现金 100 元. 某顾客现购买一台价格为 2 300 元的台式电脑，得到抽奖券 4 张. 每次抽奖互不影响.

(1)设该顾客抽奖后中奖的抽奖券张数为 X，求随机变量 X 的分布列；

(2)设该顾客购买台式电脑的实际支出为 Y(元)，用 X 表示 Y，并求随机变量 Y 的均值.

【解析】(1)因为每张奖券是否中奖是相互独立的，

因此 $X\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

所以 $P(X=0)=C_4^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$,

$P(X=1)=C_4^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$,

$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$,

$P(X=4)=C_4^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(2)因为 $X\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，所以 $E(X)=4\times\frac{1}{2}=2$.

又由题意可知 $Y=2\ 300-100X$,

所以 $E(Y)=E(2\ 300-100X)=2\ 300-100E(X)=2\ 300-100\times2=2\ 100$.

即所求随机变量 Y 的均值为 2 100 元.

点睛 正确认识二项分布及其应用

(1)在解决有关均值和方差问题时，要认真审题，如果题目中离散型随机变量符合二项分布，可直接利用公式求期望和方差，以简化问题的解答过程.

(2)熟记 $E(X)=np$ 和 $D(X)=np(1-p)$并能灵活运用.

【变式训练 3】为防止风沙危害，某地决定建设防护绿化带，种植杨树、沙柳等植物. 某人一次种植了 n 株沙柳，各株沙柳成活与否是相互独立的，成活率为 p. 设 X 为沙柳成活的株数，数学期望 $E(X)=3$，标准差$\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(1)求 n,p 的值并写出 X 的分布列；

(2)若有 3 株或 3 株以上的沙柳未成活，则需要补种，求需要补种沙柳的概率.

【解析】因为每一株沙柳的成活率均为 p，种植了 n 株沙柳，则 X 服从二项分布，即 $X\sim B(n,p)$.

(1)由 $E(X)=np=3$，$D(X)=np(1-p)=\frac{3}{2}$,

得 $1-p=\frac{1}{2}$，从而 $n=6$，$p=\frac{1}{2}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

(2)记“需要补种沙柳”为事件 A，则 $P(A)=P(X\leqslant3)$,

所以 $P(A)=\frac{1+6+15+20}{64}=\frac{21}{32}$.

随堂小练

1. 设随机变量 $X\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，则 $P(X\leqslant 2)=$ (A)

A. $\frac{11}{32}$　　B. $\frac{7}{32}$

C. $\frac{21}{32}$　　D. $\frac{7}{64}$

【解析】选 A. $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=C_6^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_6^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_6^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{11}{32}$.

2. 在 4 次独立重复试验中，事件 A 发生的概率相同，若事件 A 至少发生 1 次的概率为 $\frac{65}{81}$，则事件 A 在 1 次试验中发生的概率为 (A)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{3}{4}$

【解析】选 A. 设事件 A 在一次试验中发生的概率为 p，由题意得 $1-C_4^0p^0(1-p)^4=\frac{65}{81}$，所以 $1-p=\frac{2}{3}$，$p=\frac{1}{3}$.

3. 在 4 次独立重复试验中，随机事件 A 恰好发生 1 次的概率不大于其恰好发生 2 次的概率，则事件 A 在 1 次试验中发生的概率 p 的取值范围是__[0.4,1)__.

【解析】由题意知

$C_4^1p(1-p)^3\leqslant C_4^2p^2(1-p)^2$，

解得 $p\geqslant 0.4$.

4. 某次考试中，第一大题由 12 个选择题组成，每题选对得 5 分，不选或错选得 0 分. 小王选对每题的概率为 0.8，则其第一大题得分的均值为__48__.

【解析】设小王选对的个数为 X，得分为 $Y=5X$，则 $X\sim B(12,0.8)$，

$E(X)=np=12\times 0.8=9.6$，

$E(Y)=E(5X)=5E(X)=5\times 9.6=48$.

5. 抛掷一枚质地均匀的骰子，用 X 表示掷出偶数点的次数.

(1)若抛掷 1 次，求 $E(X)$ 和 $D(X)$；

(2)若抛掷 10 次，求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

【解析】(1)由题意知，X 服从两点分布，X 的分布列为：

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

所以 $E(X)=p=\frac{1}{2}$，

$D(X)=p(1-p)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

(2)由题意知 $X\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $E(X)=np=10\times\frac{1}{2}=5$，

$D(X)=np(1-p)=10\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十七)

课后作业·单独成册

第 2 课时 超几何分布

自主预习

知新预学

1. 超几何分布的概念

一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品，从 N 件产品中随机抽取 n 件(不放回)，用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数，则 X 的分布列为 $P(X=k)=$ $\underline{\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}}$，$k=m,m+1,m+2,\cdots,r$. 其中 $n,M,N\in\mathbf{N}^*$，$M\leqslant N$，$n\leqslant N$，$m=\max\{0,n-N+M\}$，$r=\min\{n,M\}$. 如果随机变量 X 的分布列具有上式的形式，那么称随机变量 X 服从超几何分布.

2. 超几何分布的均值

设随机变量 X 服从超几何分布，则 X 可以解释为从包含 M 件次品的 N 件产品中，不放回地随机抽取 n 件产品中的次品数. 令 $p=\dfrac{M}{N}$，则 p 是 N 件产品的次品率，而 $\dfrac{X}{n}$ 是抽取的 n 件产品的次品率，则 $E(X)=$ $\underline{np}$.

小试牛刀

1. (多选题)下列随机事件中的随机变量 X 不服从超几何分布的是 (ACD)

A. 将一枚质地均匀的硬币连续抛掷 3 次，正面向上的次数为 X

B. 从 7 名男生 3 名女生共 10 名学生干部中选出 5 名优秀学生干部，选出女生的人数为 X

C. 某射击手的命中率为 0.8，现对目标射击 1 次，命中目标的次数为 X

D. 盒中有 4 个白球和 3 个黑球，每次从中摸出 1 个球且不放回，首次摸出黑球时的总次数为 X

【解析】选 ACD. 一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品，从 N 件产品中随机抽取 n 件(不放回)，用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数，则 X 的分布列为 $P(X=k)=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，称随机变量 X 服从超几何分布. 故 ACD 项错误.

2. 15 个村庄中有 7 个村庄交通不方便，用 X 表示任选 10 个村庄中交通不方便的村庄数，则 X 服从超几何分布，其参数为 (A)

A. $N=15,M=7,n=10$

B. $N=15,M=10,n=7$

C. $N=22,M=10,n=7$

D. $N=22,M=7,n=10$

【解析】选 A. 由超几何分布的概念可知 A 正确.

3. 袋中有 10 个球，其中 7 个是红球，3 个是白球，任意取出 3 个，这 3 个都是红球的概率是 (B)

A. $\dfrac{1}{120}$　　B. $\dfrac{7}{24}$

C. $\dfrac{7}{10}$　　D. $\dfrac{3}{7}$

【解析】选 B. 取出的红球服从超几何分布，故 $P=\dfrac{C_7^3C_3^0}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{24}$.

4. 从装有 3 个红球、2 个白球的袋中随机取出 2 个球，设其中有 X 个红球，求随机变量 X 的分布列.

【解析】$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=0.1$,

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=0.6$,

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$.

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

互动课堂

合作探究

探究 1 超几何分布的概率计算

【例 1】有一批产品,其中有 6 件正品和 4 件次品,从中任取 3 件,至少有 2 件次品的概率为 $\underline{\frac{1}{3}}$.

【解析】从 10 件产品任取 3 件的取法共有 C_{10}^3 种,其中所取的三件中"至少有 2 件次品"包括 2 件次品、3 件次品,取法分别为 $C_4^2C_6^1$, C_4^3. 因此所求的概率 $P=\frac{C_4^2C_6^1+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{3}$.

点睛 解决此类问题的关键是判断所给问题是否属于超几何分布问题. 建立超几何分布列的关键是确定求 $P(X=k)$ 的组合关系式.

【变式训练 1】一盒中有 12 个乒乓球,其中 9 个新的、3 个旧的. 从盒中任取 3 个球来用,用完后装回盒中,此时盒中旧球个数 X 是一个随机变量,则 $P(X=4)=$ (C)

A. $\frac{1}{220}$　　B. $\frac{27}{55}$

C. $\frac{27}{220}$　　D. $\frac{21}{25}$

【解析】选 C. $X=4$ 表示取出的 3 个球为 2 个旧球、1 个新球,故 $P(X=4)=\frac{C_3^2C_9^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{220}$.

探究 2 超几何分布的分布列

【例 2】某校高三年级某班的数学课外活动小组中有 6 名男生、4 名女生,从中选出 4 人参加数学竞赛,用 X 表示其中的男生人数. 求 X 的分布列.

【解析】依题意随机变量 X 服从超几何分布,所以 $P(X=k)=\frac{C_6^kC_4^{4-k}}{C_{10}^4}(k=0,1,2,3,4)$.

所以 $P(X=0)=\frac{C_6^0C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$,

$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}=\frac{4}{35}$,

$P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$,

$P(X=3)=\frac{C_6^3C_4^1}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$,

$P(X=4)=\frac{C_6^4C_4^0}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$.

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{210}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{1}{14}$

点睛 求超几何分布的分布列的步骤

(1)验证随机变量服从超几何分布,并确定参数 N,M,n 的值.

(2)根据超几何分布的概率计算公式计算出随机变量取每个值时的概率.

(3)用表格的形式写出分布列.

【变式训练 2】元旦联欢晚会上,某校师生一起做游戏,数学老师制作了六张卡片放在盒子里,卡片上分别写着以下函数:$f_1(x)=x^2+1$,

$f_2(x)=x^3$，$f_3(x)=\dfrac{\ln|x|}{x}$，$f_4(x)=x\cos x$，$f_5(x)=|\sin x|$，$f_6(x)=3-x$.

(1)现在取两张卡片，记事件 A 为“所得两个函数的奇偶性相同”，求事件 A 的概率；

(2)从盒中不放回地逐一抽取卡片，若取到一张卡片上的函数是奇函数则停止抽取，否则继续进行，记停止时已抽取的次数为 X，求 X 的分布列.

【解析】(1)根据题意，知 $f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$是奇函数，$f_1(x)$，$f_5(x)$是偶函数，$f_6(x)$是非奇非偶函数，

所以 $P(A)=\dfrac{C_3^2+C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{4}{15}$.

(2)根据题意，随机变量 X 的所有可能取值为 1，2，3，4.

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1}{C_6^1}=\dfrac{1}{2}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_3^1C_2^1C_3^1}{C_6^1C_5^1C_4^1}=\dfrac{3}{20}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_3^1C_2^1C_3^1}{C_6^1C_5^1C_4^1C_3^1}=\dfrac{1}{20}$.

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

探究 3 超几何分布的综合应用

【例 3】某高校文学院和理学院的学生组队参加大学生辩论赛，文学院推荐了 2 名男生、3 名女生，理学院推荐了 4 名男生、3 名女生，文学院和理学院所推荐的学生一起参加集训，由于集训后学生水平相当，从参加集训的男生中随机抽取 3 人，女生中随机抽取 3 人组成代表队.

(1)求文学院至少有 1 名学生入选代表队的概率；

(2)某场比赛前，从代表队的 6 名学生中再随机抽取 4 名参赛，记 X 表示参赛的男生人数，求 X 的分布列.

【解析】(1)由题意，参加集训的男、女学生各有 6 人，参赛学生全从理学院中抽出(相当于文学院中没有学生入选代表队)的概率为 $\dfrac{C_3^3C_4^3}{C_6^3C_6^3}=\dfrac{1}{100}$，因此文学院至少有 1 名学生入选代表队的概率为 $1-\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{100}$.

(2)由题意知 X 的可能取值为 1，2，3.

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^3}{C_6^4}=\dfrac{1}{5}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\dfrac{3}{5}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_3^1C_3^3}{C_6^4}=\dfrac{1}{5}$.

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

点睛 利用超几何分布的知识解决与概率相关的问题，关键是将实际问题转化为超几何分布的模型.在利用超几何分布的模型时，将实际背景与超几何分布的模型相比较，认清实质，可将问题涉及的对象转化为“产品”“次品”等进行分析.

【变式训练 3】在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一种接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理

暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用，现有 6 名男志愿者 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 和 4 名女志愿者 B_1,B_2,B_3,B_4，从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示，另 5 人接受乙种心理暗示.

(1)求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的概率；

(2)用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求 X 的分布列.

【解析】(1)记“接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1”的事件为 M，

则 $P(M)=\frac{C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{18}$.

(2)由题意知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4，则

$P(X=0)=\frac{C_6^5}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}$,

$P(X=1)=\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$,

$P(X=2)=\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{10}{21}$,

$P(X=3)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$,

$P(X=4)=\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}$.

因此 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

随堂小练

1.(**多选题**)一个袋中有 6 个同样大小的黑球，编号为 1,2,3,4,5,6，还有 4 个同样大小的白球，编号为 7,8,9,10. 现从中任取 4 个球，下列几种变量中服从超几何分布的是　(　CD　)

A. X 表示取出的球的最大号码

B. X 表示取出的球的最小号码

C. 取出一个黑球记 2 分，取出一个白球记 1 分，X 表示取出的 4 个球的总得分

D. X 表示取出的黑球个数

【解析】选 CD. 对于 A，X 的可能取值为 4,5,6,7,8,9,10，不是从 0 开始的连续自然数，故不服从超几何分布；同理 B 也不服从；D 中 X 和黑球的个数有关，球根据颜色可以分成固定数目的两类，且 X 的取值为 0,1,2,3,4，故服从超几何分布.

2. 一个盒子里装有大小相同的红球、白球共 30 个，其中白球 4 个. 从中任取 2 个，则概率为 $\frac{C_{26}^1C_4^1+C_4^2}{C_{30}^2}$ 的事件是　(　B　)

A. 没有白球　　B. 至少有一个白球

C. 至少有一个红球　　D. 至多有一个白球

【解析】选 B. $\frac{C_{26}^1C_4^1+C_4^2}{C_{30}^2}=\frac{C_{26}^1C_4^1}{C_{30}^2}+\frac{C_4^2}{C_{30}^2}$ 表示任取的两个球中只有一个白球和两个都是白球的概率，即至少有一个白球的概率.

3. 袋中有 6 个红球、4 个白球，从袋中任取 4 个球，则至少有 2 个白球的概率是__$\frac{23}{42}$__.

【解析】设取出的白球个数为离散型随机变量 X，则 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4，则 $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}+\frac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}+\frac{C_4^4C_6^0}{C_{10}^4}=\frac{90+24+1}{210}=\frac{115}{210}=\frac{23}{42}$. 故至少有 2 个白球的概率为 $\frac{23}{42}$.

4. 某手机经销商在已购买某品牌手机的市民中抽取 20 人参加宣传活动，这 20 人中年龄

低于 30 岁的有 5 人. 现从这 20 人中随机选取 2 人各赠送一部手机，记 X 为选取的年龄低于 30 岁的人数，则 $P(X=1)=$ $\underline{\dfrac{15}{38}}$.

【解析】$P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_{15}^1}{C_{20}^2}=\dfrac{15}{38}$.

5. 学校文艺队的每位队员唱歌、跳舞至少会一项，已知会唱歌的有 2 人，会跳舞的有 5 人，现从中选 2 人. 设 X 为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数，且 $P(X>0)=\dfrac{7}{10}$.

(1)求文艺队的队员人数；

(2)写出 X 的分布列.

【解析】设既会唱歌又会跳舞的有 x 人，则文艺队中共有 $(7-x)$ 人，只会一项的人数是 $(7-2x)$ 人.

(1)因为 $P(X>0)=P(X\geqslant 1)$

$=1-P(X=0)=\dfrac{7}{10}$，

所以 $P(X=0)=\dfrac{3}{10}$，即 $\dfrac{C_{7-2x}^2}{C_{7-x}^2}=\dfrac{3}{10}$，

所以 $\dfrac{(7-2x)(6-2x)}{(7-x)(6-x)}=\dfrac{3}{10}$，解得 $x=2$.

故文艺队共有 5 人.

(2)X 的取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^2C_2^0}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

温馨提示：请自主完成课后作业(十八)

课后作业 · 单独成册

7.5 正态分布

自主预习

知新预学

1. 正态曲线

若 $f(x)=$ $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,$x\in\mathbf{R}$. 其中 $\mu\in\mathbf{R}$,$\sigma>0$ 为参数,我们称 $f(x)$ 为正态密度函数,称它的图象为正态密度曲线,简称正态曲线.

2. 正态分布

(1)若随机变量 X 的概率分布密度函数为 $f(x)$,则称随机变量 X 服从正态分布,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 特别地,当 $\mu=$ 0 ,$\sigma=$ 1 时,称随机变量 X 服从标准正态分布.

(2)若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $E(X)=$ μ ,$D(X)=$ σ^2 .

3. 正态曲线的特点

(1)曲线是单峰的,它关于直线 $x=\mu$ 对称;

(2)曲线在 $x=\mu$ 处达到峰值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

(3)当 $|x|$ 无限增大时,曲线无限接近 x 轴 .

4. 3σ 原则

(1)假设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,可以证明:对给定的 $k\in\mathbf{N}^*$,$P(\mu-k\sigma\leqslant X\leqslant\mu+k\sigma)$是一个只与 k 有关的定值. 特别地,

$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.682\ 7$,

$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.954\ 5$,

$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.997\ 3$.

(2)在一次试验中,X 的取值几乎总落在区间$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$内,而在此区间以外取值的概率大约只有 0.002 7 ,通常认为这种情况几乎不可能发生.

(3)在实际应用中,通常认为服从于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$的随机变量 X 只取$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$中的值,这在统计学中称为 3σ 原则.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)函数 $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 中参数 μ,σ 的意义分别是样本的均值与方差. (×)

(2)正态曲线是单峰的,其与 x 轴之间的区域的面积是随参数 μ,σ 的变化而变化的. (×)

(3)正态曲线可以关于 y 轴对称. (√)

2. 设有一正态总体,它的概率分布密度曲线是函数 $f(x)$的图象,且 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$,则这个正态总体的均值与标准差分别是 (B)

A. 10 与 8 B. 10 与 2

C. 8 与 10 D. 2 与 10

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,9)$. 若 $P(X>c+1)=P(X<c-1)$,则 $c=$ (B)

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 已知随机变量 $X\sim N(0,1)$,则 X 在区间$(-\infty,-2)$内取值的概率约为 (D)

A. 0.954 B. 0.046

C. 0.977 D. 0.023

5. 若 $X\sim N\left(0,\frac{4}{9}\right)$，则 X 落在 $(-2,2)$ 内的概率为__0.997 3__.

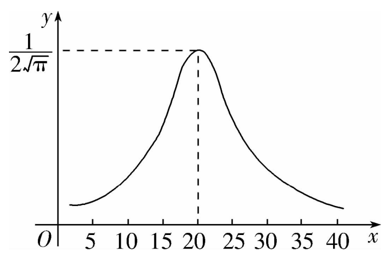
【解析】由题可得 $\mu=0,\sigma=\frac{2}{3}$，$P(-2<X<2)=P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.997\ 3$.

互动课堂

合作探究

探究 1　正态密度函数

【例 1】如图是一条正态曲线，试根据该图象写出其对应的正态密度函数的解析式，求出服从这一分布的随机变量的均值和方差.



【解析】从图象可知，该正态曲线关于直线 $x=20$ 对称，最大值为 $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$，

所以 $\mu=20$，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$，

所以 $\sigma=\sqrt{2}$.

于是 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{4}}$，$x\in\mathbf{R}$，随机变量的均值是 $\mu=20$，方差是 $\sigma^2=(\sqrt{2})^2=2$.

点睛 正态密度函数解析式的求法

利用图象求正态密度函数的解析式，应抓住图象的实质，主要有两点：一是对称轴 $x=\mu$，二是最值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. 这两点确定以后，相应参数 μ,σ 便确定了，代入便可求出相应的解析式.

【变式训练 1】(1)某市组织了一次高三调研考试，考试后统计的数学成绩服从正态分布，其正态密度函数为 $f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-80)^2}{200}}$ $(x\in\mathbf{R})$，则下列命题不正确的是　　(B)

A. 该市这次考试中数学的平均成绩为 80 分

B. 分数在 120 分以上的人数与分数在 60 分以下的人数相同

C. 分数在 110 分以上的人数与分数在 50 分以下的人数相同

D. 该市这次考试中数学成绩的标准差为 10

(2)若一个正态密度函数是偶函数，且该函数的最大值为 $\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}$. 求该正态密度函数的解析式.

【解析】(1)选 B. 由正态密度函数知，均值(期望)$\mu=80$，标准差 $\sigma=10$. 又曲线关于直线 $x=80$ 对称，故分数为 100 分以上的人数与分数在 60 分以下的人数相同，所以 B 是错误的.

(2)由于该正态密度函数是一个偶函数，所以其图象关于 y 轴对称，即 $\mu=0$.

由于 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 4}$，所以 $\sigma=4$，

故该正态密度函数的解析式是 $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{32}}$，$x\in\mathbf{R}$.

探究 2　利用正态分布的性质求概率

【例 2】设 $X\sim N(1,2^2)$，试求：

(1)$P(-1\leqslant X\leqslant 3)$；

(2)$P(3<X\leqslant 5)$.

【解析】因为 $X\sim N(1,2^2)$，所以 $\mu=1,\sigma=2$.

(1)$P(-1\leqslant X\leqslant 3)=P(1-2\leqslant X\leqslant 1+2)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0.682\ 7$.

(2)因为 $P(3<X\leqslant 5)=P(-3\leqslant X<-1)$，

所以 $P(3<X\leqslant 5)$

$=\frac{1}{2}[P(-3\leqslant X\leqslant 5)-P(-1\leqslant X\leqslant 3)]$

$=\frac{1}{2}[P(1-4\leqslant X\leqslant 1+4)-P(1-2\leqslant X\leqslant 1+2)]$

$=\frac{1}{2}[P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma)-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma)]$

$\approx\frac{1}{2}(0.954\ 5-0.682\ 7)=0.135\ 9$.

点睛 求正态总体在某个区间内取值的概率的策略

(1)充分利用正态曲线的对称性和曲线与 x 轴之间面积为 1.

(2)熟记 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)$，$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)$ 的值.

(3)注意概率值的求解转化：

①$P(X<a)=1-P(X\geqslant a)$；

②$P(X<\mu-a)=P(X>\mu+a)$；

③若 $b<\mu$，则 $P(X<b)=\frac{1-P(b\leqslant X\leqslant 2\mu-b)}{2}$.

【变式训练 2】(1)若 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(X<4)=0.8$，则 $P(0<X<2)=$ （ C ）

A. 0.6　　B. 0.4

C. 0.3　　D. 0.2

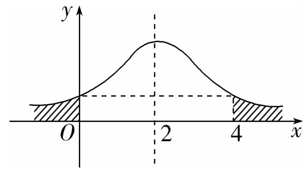
(2)若 $X\sim N(1,4)$，$P(2<X<3)=a$，则 $P(X\leqslant -1)+P(1\leqslant X\leqslant 2)=$ （ B ）

A. $\frac{1-a}{2}$　　B. $\frac{1}{2}-a$

C. $a+0.003a$　　D. $\frac{1}{2}+a$

【解析】(1)选 C. 因为 $P(X<4)=0.8$，所以 $P(X>4)=0.2$.

由题意知图象(如图)的对称轴为直线 $x=2$，



$P(X<0)=P(X>4)=0.2$，

所以 $P(0<X<4)=1-P(X<0)-P(X>4)=0.6$.

所以 $P(0<X<2)=\frac{1}{2}P(0<X<4)=0.3$.

(2)选 B. 因为随机变量 X 服从正态分布 $N(1,4)$，所以正态曲线关于直线 $x=1$ 对称. 因为 $P(2<X<3)=a$，所以 $P(-1<X<0)=a$，$P(1\leqslant X\leqslant 2)=P(0\leqslant X\leqslant 1)$，$P(X\leqslant -1)+P(1\leqslant X\leqslant 2)=\frac{1}{2}-a$.

探究 3　正态分布的实际应用

【例 3】在某次数学考试中，考生的成绩 X 服从正态分布，即 $X\sim N(90,100)$.

(1)试求考试成绩 X 位于区间[70,110]内的概率；

(2)若这次考试共有 2 000 名考生，试估计考试成绩在[80,100]内的考生有多少人.

【解析】因为 $X\sim N(90,100)$，所以 $\mu=90$，$\sigma=10$.

(1)由于正态变量在区间 $[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$ 内取值的概率是 0.954 5，而该正态分布中 $\mu-2\sigma=90-2\times10=70$，$\mu+2\sigma=90+2\times10=110$，所以考试成绩 X 位于区间[70,110]内的概率为 0.954 5.

(2)由 $\mu=90$，$\sigma=10$，得 $\mu-\sigma=80$，$\mu+\sigma=100$. 由于正态变量在区间 $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$ 内取值的概率是 0.682 7，所以考试成绩 X 位于区间[80,100]内的概率就是 0.682 7. 一共有 2 000

名考生，所以考试成绩在$[80,100]$间的考生大约有$2\ 000\times0.682\ 7\approx1\ 365$(人).

点睛 正态分布的应用及求解策略

解答此类题目的关键在于将待求的问题向$[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$,$[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$,$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$这三个区间进行转化，然后利用上述区间的概率求出相应的概率，在此过程中会用到化归思想及数形结合思想.

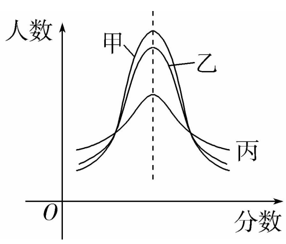
【变式训练3】某厂生产的圆柱形零件的外直径X服从正态分布$N(4,0.5^2)$.质量检查人员从该厂生产的1 000个零件中随机抽查一个，测得它的外直径为5.7 cm，该厂生产的这批零件是否合格?

【解析】由于X服从正态分布$N(4,0.5^2)$，由正态分布的性质，可知X在$[4-3\times0.5,4+3\times0.5]$之外取值的概率只有0.002 7，而$5.7\notin[2.5,5.5]$，

这说明在一次试验中，出现了几乎不可能发生的小概率事件，据此可以认为该批零件是不合格的.

随堂小练

1.某市进行教学质量检测，甲、乙、丙三科考试成绩的正态曲线如图所示(由于人数众多，成绩分布的直方图可视为正态曲线)，下列说法中正确的是 (A)



A.甲科总体成绩的标准差最小

B.丙科总体成绩的平均数最小

C.乙科总体成绩的标准差及平均数都居中

D.甲、乙、丙三科成绩的平均数不相同

2.已知随机变量X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，若$P(X>2)=0.023$，则$P(-2\leqslant X\leqslant2)=$ (C)

A.0.477　　B.0.628

C.0.954　　D.0.977

【解析】选C.由题意可知随机变量X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，所以图象关于y轴对称.

又$P(X>2)=0.023$，

所以$P(-2\leqslant X\leqslant2)$

$=1-P(X>2)-P(X<-2)$

$=1-2P(X>2)=0.954$.

3.若随机变量$X\sim N(10,\sigma^2)$，$P(9\leqslant X\leqslant11)=0.4$，则$P(X>11)=$__0.3__.

【解析】由$P(9\leqslant X\leqslant11)=0.4$且正态曲线以$x=10$为对称轴知，

$P(9\leqslant X\leqslant11)=2P(10\leqslant X\leqslant11)=0.4$，

即$P(10\leqslant X\leqslant11)=0.2$，

又$P(X\geqslant10)=0.5$，

所以$P(X>11)=0.5-0.2=0.3$.

4.设$X\sim N(5,1)$，求$P(6<X\leqslant7)$.

【解析】由已知得$P(4\leqslant X\leqslant6)\approx0.682\ 7$，

$P(3\leqslant X\leqslant7)\approx0.954\ 5$.

又因为正态曲线关于直线$x=5$对称，

所以$P(3\leqslant X<4)+P(6<X\leqslant7)$

$\approx0.954\ 5-0.682\ 7$

$=0.271\ 8$.

由对称性知$P(3\leqslant X<4)=P(6<X\leqslant7)$，

所以$P(6<X\leqslant7)=\frac{0.271\ 8}{2}=0.135\ 9$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十九)

课后作业·单独成册

三、知能拓展

随机变量及其分布复习

重难突破

要点1 条件概率和全概率公式

【例1】口袋中有2个白球和4个红球，现从中不放回地连续随机抽取两次，每次抽取1个，求：

(1)第一次取出的是红球的概率；

(2)第一次和第二次取出的都是红球的概率；

(3)在第一次取出红球的条件下，第二次取出的是红球的概率.

【解析】记事件A：第一次取出的是红球；事件B：第二次取出的是红球.

(1)从中随机不放回地连续抽取两次，每次抽取1个，所有基本事件共6×5个；第一次取出的是红球，第二次取出的是其余5个球中的任一个，符合条件的有4×5个，所以$P(A)=\frac{4\times5}{6\times5}=\frac{2}{3}$.

(2)从中随机不放回地连续抽取两次，每次抽取1个，所有基本事件共6×5个；第一次和第二次都取出的是红球，相当于取两个球，都是红球，符合条件的有4×3个，所以$P(AB)=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{2}{5}$.

(3)利用条件概率的计算公式，可得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}.$$

点睛 条件概率的两个求解策略

(1)定义法：计算$P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，利用$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\left(或P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\right)$求解.

(2)缩小样本空间法：利用$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$求解.此法常用于古典概型的概率计算问题.

【变式训练1】(1)某个电路开关闭合后会出现红灯或绿灯闪烁，已知开关第一次闭合后出现红灯的概率为$\frac{1}{2}$，两次闭合后都出现红灯的概率为$\frac{1}{5}$，则在第一次闭合后出现红灯的条件下，第二次闭合后出现红灯的概率为 (C)

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

(2)一个盒子中有6个白球、4个黑球，从中不放回地每次任取1个，连取2个，求第二次取到白球的概率.

【解析】(1)选C.设“第一次闭合后出现红灯”为事件A，“第二次闭合后出现红灯”为事件B，则由题意可得$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{5}$，则在第一次闭合后出现红灯的条件下第二次闭合出现红灯的概率是$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=$

$\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$.

(2)事件 $A=\{$第一次取到白球$\}$，事件 $B=\{$第二次取到白球$\}$.

因为 $B=AB\cup\overline{A}B$，且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容，所以

$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{10}\times\dfrac{6}{9}=\dfrac{3}{5}$.

要点 2 二项分布

【例 2】某学校为了丰富学生的课余生活，以班级为单位组织学生开展古诗词背诵比赛，随机抽取题目，背诵正确加 10 分，背诵错误减 10 分，只有“正确”和“错误”两种结果. 其中某班背诵正确的概率为 $p=\dfrac{2}{3}$，背诵错误的概率为 $q=\dfrac{1}{3}$，记该班完成 n 首背诵后总得分为 S_n.

(1)求 $S_6=20$ 且 $S_i\geqslant 0(i=1,2,3)$ 的概率；

(2)记 $X=|S_5|$，求 X 的数学期望及方差(精确到 0.01).

【解析】(1)当 $S_6=20$ 时，即背诵 6 首后，4 首正确，2 首错误.

若第 1 首和第 2 首背诵正确，则其余 4 首可任意背诵 2 首正确；

若第 1 首背诵正确，第 2 首背诵错误，第 3 首背诵正确，其余 3 首可任意背诵 2 首正确，故所求的概率

$P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times C_4^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times C_3^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{16}{81}$.

(2)因为 $X=|S_5|$ 的取值为 10，30，50. 又 $p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，

所以 $P(X=10)=C_5^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+C_5^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{40}{81}$，

$P(X=30)=C_5^4\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\times\dfrac{1}{3}+C_5^1\times\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{30}{81}$，

$P(X=50)=C_5^5\left(\dfrac{2}{3}\right)^5+C_5^0\left(\dfrac{1}{3}\right)^5=\dfrac{11}{81}$.

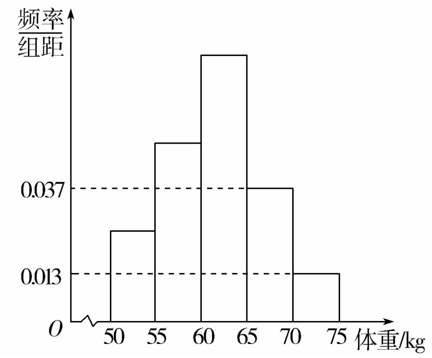
所以 X 的分布列为：

X	10	30	50
P	$\dfrac{40}{81}$	$\dfrac{30}{81}$	$\dfrac{11}{81}$

所以 $E(X)=10\times\dfrac{40}{81}+30\times\dfrac{30}{81}+50\times\dfrac{11}{81}=\dfrac{1\,850}{81}\approx 22.84$，$D(X)=\dfrac{40}{81}\times\left(10-\dfrac{1\,850}{81}\right)^2+\dfrac{30}{81}\times\left(30-\dfrac{1\,850}{81}\right)^2+\dfrac{11}{81}\times\left(50-\dfrac{1\,850}{81}\right)^2\approx 200.58$.

点睛 解决此类问题，一定要掌握如何建模，这一点至关重要，利用二项分布求解时，注意 n 是独立重复试验的次数，p 是每次试验中某事件发生的概率.

【变式训练 2】为了解某校今年高三毕业班报考飞行员的学生的体重情况，将所得的数据整理后，画出了如图所示的频率分布直方图. 已知图中从左到右的前三组的频率之比为 1∶2∶3，其中第 2 组的频数为 12.



(1)求该校报考飞行员的总人数；

(2)以这所学校的样本数据来估计全省的总体数据，若从全省报考飞行员的学生中(人数很多)任选 3 人，设 X 表示体重超过 60 kg 的学生人数，求 X 的分布列.

【解析】(1)设该校报考飞行员的人数为 n，前三个小组的频率分别为 p_1,p_2,p_3，

则由条件可得

$$\begin{cases}p_2=2p_1,\\p_3=3p_1,\\p_1+p_2+p_3+(0.037+0.013)\times5=1.\end{cases}$$

解得 $p_1=0.125,p_2=0.25,p_3=0.375$.

又 $p_2=0.25=\frac{12}{n}$，解得 $n=48$，所以该校报考飞行员的总人数为 48.

(2)由(1)可得，估计抽到一个报考学生的体重超过 60 kg 的概率为 $P=1-(0.125+0.25)=\frac{5}{8}$.

依题意有 $X\sim B\left(3,\frac{5}{8}\right)$，

故 $P(X=k)=C_3^k\left(\frac{5}{8}\right)^k\left(\frac{3}{8}\right)^{3-k}$，

$k=0,1,2,3$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{125}{512}$

要点 3　两点分布与超几何分布

【例 3】一个袋中装有 6 个形状、大小完全相同的小球，其中红球有 3 个，编号为 1，2，3；黑球有 2 个，编号为 1，2；白球有 1 个，编号为 1. 现从袋中一次随机抽取 3 个球.

(1)求取出的 3 个球的颜色都不相同的概率；

(2)记取得 1 号球的个数为随机变量 X，求随机变量 X 的分布列.

【解析】(1)从袋中一次随机抽取 3 个球，基本事件总数 $n=C_6^3=20$，取出的 3 个球的颜色都不相同包含的基本事件的个数为 $C_3^1C_2^1C_1^1=6$，所以取出的 3 个球的颜色都不相同的概率 $P=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

(2)由题意知 $X=0,1,2,3$.

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20},$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}.$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

点睛 解决超几何分布问题的注意事项

(1)在产品抽样检验中，如果采用的是不放回抽样，则抽到的次品数服从超几何分布.

(2)在超几何分布公式中，$P(X=k)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

(3)如果随机变量 X 服从超几何分布，只

要代入公式即可求得相应概率，关键是明确随机变量 X 的所有取值.

(4)当超几何分布用表格表示较繁杂时，可用解析式法表示.

【变式训练 3】某小组共 10 人，利用假期参加义工活动. 已知参加义工活动次数为 1，2，3 的人数分别为 3，3，4. 现从这 10 人中随机选出 2 人作为该组代表参加座谈会.

(1)设事件 A 为“选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4”，求事件 A 发生的概率；

(2)设随机变量 X 为选出的 2 人参加义工活动次数之差的绝对值，求 X 的分布列和数学期望.

【解析】(1)由题意得，$P(A)=\frac{C_3^1C_4^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$.

所以事件 A 发生的概率为 $\frac{1}{3}$.

(2)随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_3^2+C_3^2+C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$，

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^1+C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

$E(X)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{4}{15}=1$.

要点 4 离散型随机变量的数字特征及应用

【例 4】某商场举行有奖促销活动，顾客购买一定金额的商品后即可抽奖. 抽奖规则如下：

1. 抽奖方案有以下两种：

方案 a：从装有 2 个红球、3 个白球(仅颜色不同)的甲袋中随机摸出 2 个球，若都是红球，则获得奖金 30 元；否则，没有奖金，兑奖后将摸出的球放回甲袋中.

方案 b：从装有 3 个红球、2 个白球(仅颜色不同)的乙袋中随机摸出 2 个球，若都是红球，则获得奖金 15 元；否则，没有奖金，兑奖后将摸出的球放回乙袋中.

2. 抽奖条件：顾客购买商品的金额满 100 元，可根据方案 a 抽奖一次；满 150 元，可根据方案 b 抽奖一次.(假如某顾客购买商品的金额为 260 元，则该顾客可以根据方案 a 抽奖两次或方案 a，b 各抽奖一次)已知顾客 A 在该商场购买商品的金额为 350 元.

(1)若顾客 A 只选择方案 a 进行抽奖，求其所获奖金的期望；

(2)要使所获奖金的期望值最大，顾客 A 应如何抽奖？

【解析】(1)按方案 a 抽奖一次，获得奖金的概率 $P=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$.

顾客 A 只选择方案 a 进行抽奖，则其可以按方案 a 抽奖三次.

此时中奖次数服从二项分布 $B\left(3,\frac{1}{10}\right)$.

设所得奖金为 w_1 元，则 $E(w_1)=3\times\frac{1}{10}\times30=9$.

即顾客 A 所获奖金的期望为 9 元.

(2)若顾客 A 按方案 a 抽奖两次，方案 b 抽奖一次，则按方案 a 中奖的次数服从二项分布 $B_1\left(2,\frac{1}{10}\right)$，按方案 b 中奖的次数服从二项分布 $B_2\left(1,\frac{3}{10}\right)$.

设所得奖金为 w_2 元，则 $E(w_2)=2\times\frac{1}{10}\times30+1\times\frac{3}{10}\times15=10.5$.

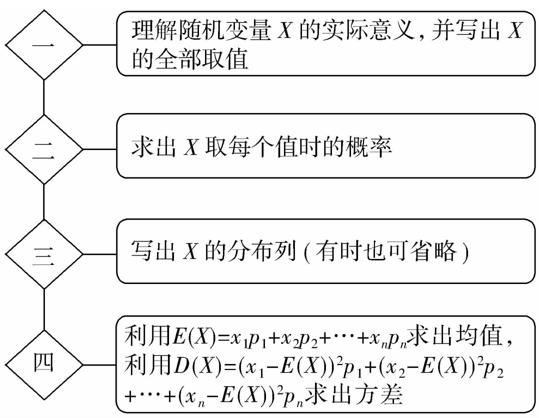
若顾客 A 按方案 b 抽奖两次，则中奖的次数服从二项分布 $B_3\left(2,\frac{3}{10}\right)$.

设所得奖金为 w_3 元，则 $E(w_3)=2\times\frac{3}{10}\times15=9$.

结合(1)可知，$E(w_1)=E(w_3)<E(w_2)$.

所以顾客 A 应该按方案 a 抽奖两次，方案 b 抽奖一次，可使所获奖金的期望值最大.

点睛 求离散型随机变量的期望与方差的步骤



【变式训练 4】同时投掷两枚相同的正方体骰子(骰子质地均匀，且各面分别刻有数字 1，2，2，3，3，3).

(1)设随机变量 X 表示一次掷得的点数之和，求 X 的分布列；

(2)若连续投掷 10 次，设随机变量 Y 表示一次掷得的点数和大于 5 的次数，求 $E(Y)$，$D(Y)$.

【解析】(1)由已知，随机变量 X 的取值为 2，3，4，5，6.

设投掷一次一枚正方体骰子所得点数为 X_0，则

$P(X_0=1)=\frac{1}{6}$，$P(X_0=2)=\frac{1}{3}$，$P(X_0=3)=\frac{1}{2}$，

所以 $P(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，

$P(X=3)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，

$P(X=4)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$，

$P(X=5)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，

$P(X=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

故 X 的分布列为：

X	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

(2)由已知，满足条件的一次投掷的点数和取值为 6，设其发生的概率为 p，由(1)知，$p=\frac{1}{4}$.

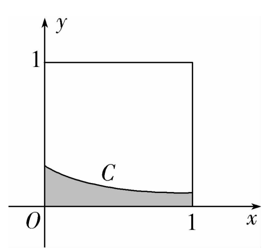
因为随机变量 $Y\sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$，

所以 $E(Y)=np=10\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$，

$D(Y)=np(1-p)=10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$.

要点 5 正态分布

【例 5】在如图所示的正方形区域中随机投掷 10 000 颗豆子，则落入阴影部分(曲线 C 为正态分布 $N(-1,1)$的密度曲线)的豆子的颗数的估计值为　　（ B ）



附：若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.682\ 7$，

$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.954\ 5$，

$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.997\ 3$.

A. 1 193　　B. 1 359

C. 2 718　　D. 3 413

【解析】选 B. 对于正态分布 $N(-1,1)$，$\mu=-1$，$\sigma=1$，正态曲线关于直线 $x=-1$ 对称，故题图中阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}\times(0.954\ 5-0.682\ 7)=0.135\ 9$，所以豆子落入题图中阴影部分的概率 $P=\frac{0.135\ 9}{1}=0.135\ 9$，所以投入 10 000 颗豆子，落入阴影部分的颗数约为 $10\ 000\times0.135\ 9=1\ 359$.

点睛 根据正态曲线的对称性求概率的三个关键点

(1)正态曲线与 x 轴之间的区域的面积为 1.

(2)正态曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，则正态曲线在对称轴 $x=\mu$ 的左右两侧与 x 轴之间的区域的面积都为 0.5.

(3)利用等式 $P(X\geqslant\mu+c)=P(X\leqslant\mu-c)$ $(c>0)$对目标概率进行转化.

【变式训练 5】某工厂生产的一种零件的外直径服从正态分布 $X\sim N(10,0.2^2)$. 从该工厂上午、下午生产的零件中随机各取出一个，测得其外直径分别为 9.52 和 9.98，试分析该工厂这一天的生产状况是否正常.

【解析】因为 $X\sim N(10,0.2^2)$，

所以 $\mu=10$，$\sigma=0.2$.

所以 $\mu-3\sigma=10-3\times0.2=9.4$，

$\mu+3\sigma=10+3\times0.2=10.6$.

因为 $9.52\in(9.4,10.6)$，$9.98\in(9.4,10.6)$，

所以该工厂这一天的生产状况是正常的.

拓展提升

1. 下列随机试验的结果，不能用离散型随机变量表示的是　　(C)

A. 将一枚均匀的正方体骰子抛掷两次，所得的点数之和

B. 某篮球运动员 6 次罚球中投进的球数

C. 电视机的使用寿命

D. 从含有 3 件次品的 50 件产品中，任取 2 件，其中抽到次品的件数

2. 某人射击一次击中目标的概率为 0.6，经过 3 次射击，设 X 表示击中目标的次数，则 $P(X\geqslant2)=$　　(A)

A. $\frac{81}{125}$　　B. $\frac{54}{125}$　　C. $\frac{36}{125}$　　D. $\frac{27}{125}$

3. 设 $X\sim N\left(-2,\frac{1}{4}\right)$，则 X 落在 $(-\infty,-3.5)\cup(-0.5,+\infty)$ 内的概率是　　(D)

A. 95.45%　　B. 99.73%

C. 4.55%　　D. 0.27%

4. 已知 $X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，$Y\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$，且 $E(X)=15$，则 $E(Y)=$　　(D)

A. 15　　B. 20　　C. 5　　D. 10

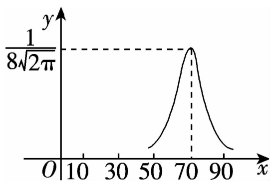
5. 口袋中有 5 只球，编号分别为 1，2，3，4，5，从中任取 3 只球，以 X 表示取出的球的最大号码，则 $E(X)=$　　(B)

A. 4　　B. 4.5　　C. 4.75　　D. 5

6. 某灯泡厂生产大批灯泡，其次品率为 2%，从中任意地陆续取出 100 个，则其中正品数 X 的均值为__98__，方差为__1.96__.

7. n 件产品中有 m 件正品，现从中先后任取 2 件(第一次取出的产品不放回)，记“第一次取到正品”为事件 A，“第二次取到正品”为事件 B，则 $P(B|A)=$__$\frac{m-1}{n-1}$__.

8. 某次测试成绩 X 服从正态分布，其正态密度函数的图象如图所示，则成绩 X 在区间[62，78]内的概率是 0.682 7 .

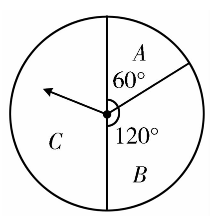


9. 某商场为吸引顾客消费推出一项优惠活动. 活动规则如下：消费额每满 100 元可转动如图所示的转盘一次，并获得相应金额的返券.（假定指针等可能地停在任一位置，指针落在区域的边界时，重新转一次）指针所在的区域及对应的返券金额如表所示. 例如：消费 218 元，可转动转盘 2 次，所获得的返券金额是两次金额之和.

(1)已知顾客甲消费后获得 n 次转动转盘的机会，已知他每转一次转盘指针落在区域边界的概率为 p，每次转动转盘的结果相互独立，设 X 为顾客甲转动转盘指针落在区域边界的次数，X 的数学期望 $E(X)=\frac{1}{25}$，标准差 $\sigma(X)=\frac{3\sqrt{11}}{50}$，求 n,p 的值；

(2)已知顾客乙消费 280 元，并按规则参与了活动，他获得返券的金额记为 Y 元. 求随机变量 Y 的分布列和数学期望.

指针位置	A 区域	B 区域	C 区域
返券金额/元	60	30	0



【解析】(1)依题意知，X 服从二项分布 $B(n,p)$，

所以 $E(X)=np=\frac{1}{25}$，①

又 $D(X)=[\sigma(X)]^2=np(1-p)=\frac{99}{2\,500}$，②

由①②联立解得 $n=4$，$p=\frac{1}{100}$.

(2)设指针落在 A，B，C 区域分别记为事件 A，B，C，则 $P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{2}$.

由题意得，该顾客可转动转盘 2 次.

随机变量 Y 的所有可能值为 0，30，60，90，120.

$P(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P(Y=30)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times2=\frac{1}{3}$，

$P(Y=60)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$，

$P(Y=90)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times2=\frac{1}{9}$，

$P(Y=120)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

所以随机变量 Y 的分布列为

Y	0	30	60	90	120
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

故其数学期望 $E(Y)=0\times\frac{1}{4}+30\times\frac{1}{3}+60\times\frac{5}{18}+90\times\frac{1}{9}+120\times\frac{1}{36}=40$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十)

课后作业·单独成册

第八章 成对数据的统计分析

一、课标导向

课标要求

1. 成对数据的统计相关性

(1)结合实例,了解样本相关系数的统计含义,了解样本相关系数与标准化数据向量夹角的关系.

(2)结合实例,会通过相关系数比较多组成对数据的相关性.

2. 一元线性回归模型

(1)结合具体实例,了解一元线性回归模型的含义,了解模型参数的统计意义,了解最小二乘原理,掌握一元线性回归模型参数的最小二乘估计方法,会使用相关的统计软件.

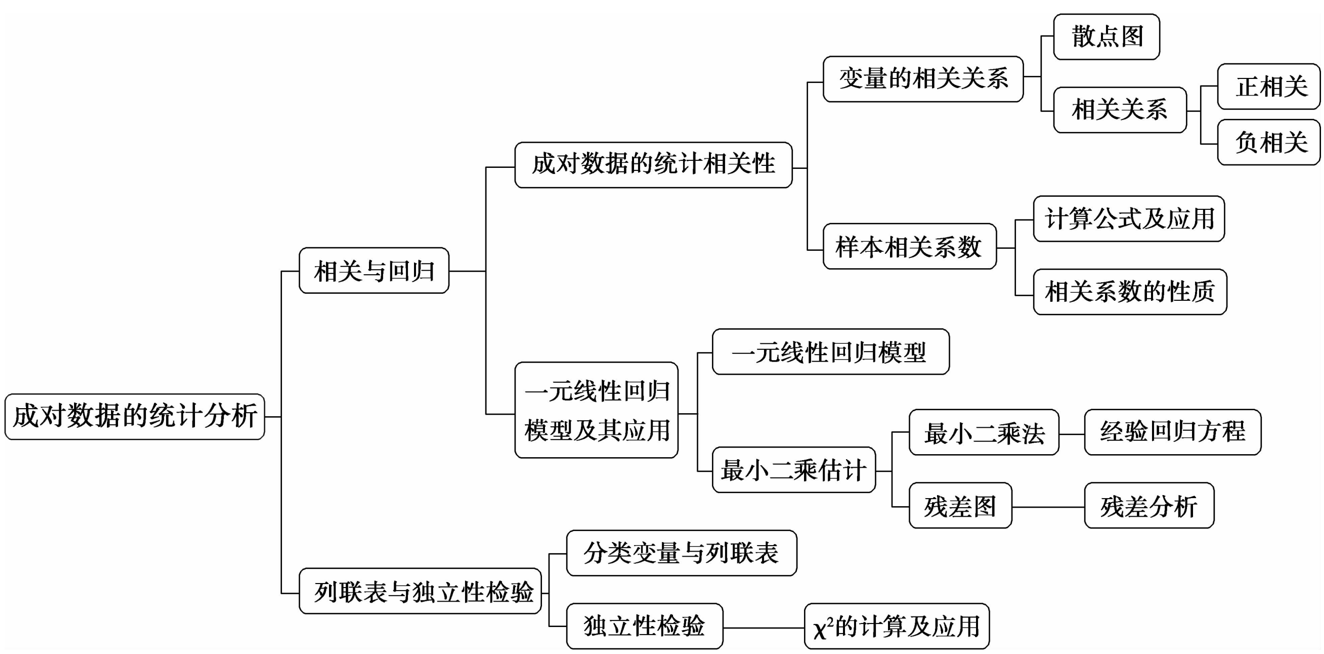
(2)针对实际问题,会用一元线性回归模型进行预测.

3. 2×2 列联表

(1)通过实例,理解 2×2 列联表的统计意义.

(2)通过实例,了解 2×2 列联表独立性检验及其应用.

知识网络



二、精讲精练

8.1 成对数据的统计相关性

自主预习

知新预学

1. 变量的相关关系

(1)相关关系:两个变量有关系,但又没有确切到可由其中的一个去<u>精确地</u>决定另一个的程度,这种关系称为相关关系.

(2)散点图:把成对样本数据用直角坐标系中的点表示出来,由这些点组成的统计图叫做散点图.

(3)正相关与负相关

①正相关:如果从整体上看,当一个变量的值增加时,另一个变量的相应值也呈现<u>增加</u>的趋势,我们就称这两个变量正相关.

②负相关:如果从整体上看,当一个变量的值增加时,另一个变量的相应值呈现<u>减少</u>的趋势,我们就称这两个变量负相关.

(4)线性相关与非线性相关(曲线相关)

①线性相关:一般地,如果两个变量的取值呈现正相关或负相关,而且散点落在<u>一条直线</u>附近,我们就称这两个变量线性相关.

②非线性相关(曲线相关):一般地,如果两个变量具有相关性,但不是<u>线性相关</u>,我们就称这两个变量非线性相关或曲线相关.

2. 样本相关系数

(1)样本相关系数的公式

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}.$$

(2)样本相关系数的意义

样本相关系数 r 可以反映两个随机变量之间线性相关的程度:r 的符号反映了相关关系的正负性;$|r|$ 的大小反映了两个变量线性相关的程度,即散点集中于一条直线的程度.

(3)样本相关系数的性质

①$|r|\leqslant 1$.

②当 $r>0$ 时,称成对样本数据<u>正相关</u>;当 $r<0$ 时,称成对样本数据<u>负相关</u>.

③当 $|r|$ 越接近 1 时,成对样本数据的线性相关程度<u>越强</u>;当 $|r|$ 越接近 0 时,成对样本数据的线性相关程度<u>越弱</u>. 特别地,当 $|r|=1$ 时,说明成对样本数据都落在一条直线上.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)相关关系是一种非确定性关系,体现的不一定是因果关系,可能是伴随关系. (√)

(2)散点图越接近某一条直线,线性相关性越强,相关系数越大. (×)

(3)当$|r|=1$时,成对样本数据(x_i,y_i)都落在一条直线上. (√)

2. 下面属于相关关系的是 (C)

A. 圆的周长和它的半径之间的关系

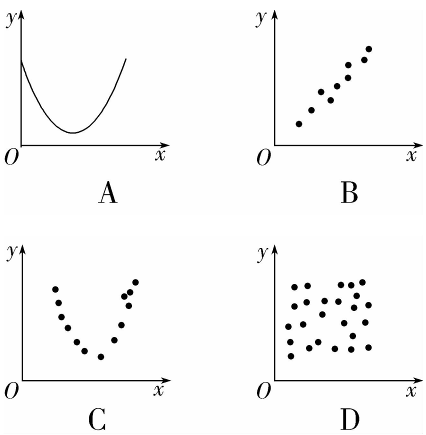
B. 价格不变的条件下,商品销售额与销售量之间的关系

C. 家庭收入愈多时,其消费支出也有增长的趋势

D. 正方形的面积和它的边长之间的关系

【解析】选C.家庭收入会影响消费支出,但不是唯一因素,故C正确;ABD为确定的函数关系.

3. (**多选题**)下列各图中的两个变量具有相关关系的是 (BC)



【解析】选BC.A为函数关系;B,C为相关关系;D中,因为点分布得比较分散,两者之间无相关关系.

4. 已知求得甲、乙、丙3组不同的数据的样本相关系数分别为0.81,-0.98,0.63,其中__乙__(填甲、乙或丙)组数据的线性相关性最强.

【解析】两个变量y与x的样本相关系数的绝对值越接近于1,它的线性相关性越强.在甲、乙、丙中,所给的数值中-0.98的绝对值最接近于1,即乙的线性相关性最强.

互动课堂

合作探究

探究1 相关关系的判断

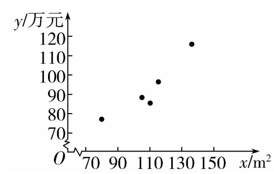
【例1】以下是某地不同楼盘新房的销售价格y(单位:万元)和面积x(单位:m^2)的数据:

面积 x/m^2	115	110	80	135	105
销售价格 y/万元	99.2	86.4	77.6	116.8	88

(1)画出数据对应的散点图;

(2)判断新房的销售价格和面积之间是否具有相关关系.如果有相关关系,是正相关还是负相关?

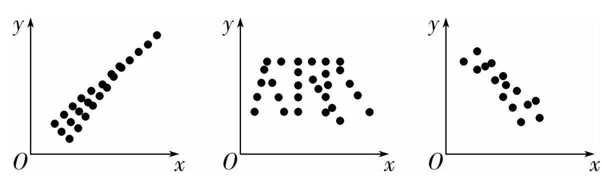
【解析】(1)数据对应的散点图如图所示.



(2)通过以上数据对应的散点图可以判断,新房的销售价格和面积之间具有相关关系,且是正相关.

点睛 判断两个变量x和y之间是否具有线性相关关系,常用的简便方法就是绘制散点图,如果发现点的分布从整体上看大致在一条直线附近,那么这两个变量就是线性相关的,注意不要受个别点的位置的影响.

【变式训练1】观察下列三个关于变量x和y的散点图,它们从左到右对应的相关关系依次为 (D)



A. 正相关、负相关、不相关

B. 负相关、不相关、正相关

C. 负相关、正相关、不相关

D. 正相关、不相关、负相关

【解析】选 D. 由散点图与相关关系的概念可知从左到右：第一个图是正相关；第二个图相关性不明确，所以不相关；第三个图是负相关.

探究 2 相关系数的概念及应用

【例 2】(1)(多选题)下列关于样本相关系数 r 的说法中正确的是 (BCD)

A. r 越大，两个变量间线性相关程度越强

B. r 的取值范围为 $[-1,1]$

C. $r>0$ 时，两个变量正相关；$r<0$ 时，两个变量负相关

D. $r=1$ 时，样本点在同一直线上

(2)为实施分层教学，某学校根据学生的情况分成了 A,B,C 三类，经过一段时间的学习后，从三类学生中分别随机抽取了 1 个学生的 5 次考试成绩，得到的数据如下：

A 类

第 x 次	1	2	3	4	5
成绩 y/分	145	83	95	72	110

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}\approx 182$；

B 类

第 x 次	1	2	3	4	5
成绩 y/分	85	93	90	76	101

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}\approx 59$；

C 类

第 x 次	1	2	3	4	5
成绩 y/分	85	92	101	100	112

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}\approx 64$.

请分别计算出 A,B,C 类学生的 (x_i,y_i) $(i=1,2,3,4,5)$ 的样本相关系数 r_1,r_2,r_3，并通过数据分析抽到的哪类学生学习成绩最稳定.(结果精确到 0.01，$|r|$ 越大认为成绩越稳定)

【解析】(1)选 BCD. 对于样本相关系数 r，有以下结论：①当 $r>0$ 时，表明两个变量正相关；当 $r<0$ 时，表明两个变量负相关. ②r 的绝对值越接近于 1，表明两个变量的线性相关程度越强；r 的绝对值越接近于 0，表明两个变量之间几乎不存在线性相关关系.

对于 A，当 $r<0$ 时此结论不成立，所以 A 不正确；对于 B，由样本相关系数的性质可得 $-1\leqslant r\leqslant 1$，所以 B 正确；对于 C，由样本相关系数的性质可知正确；对于 D，由样本相关系数的性质可知正确.

(2)根据 A,B,C 类学生的数据，得

A 类：$\overline{x}=3,\overline{y}=101$，则 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=-81$，所以 $r_1=\dfrac{-81}{182}\approx-0.45$；

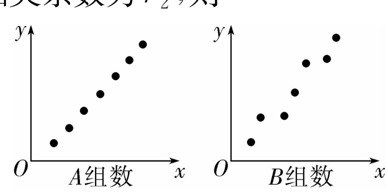
B 类：$\overline{x}=3,\overline{y}=89$，则 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=15$，所以 $r_2=\dfrac{15}{59}\approx 0.25$；

C 类：$\overline{x}=3,\overline{y}=98$，则 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=62$，所以 $r_3=\dfrac{62}{64}\approx 0.97$.

从上述所求的样本相关系数可知，抽到的 C 类学生的成绩最稳定.

点睛 r 的符号反映了相关关系的正负性，$|r|$ 的大小反映了两个变量线性相关的程度.

【变式训练 2】(1)如图所示，给出样本容量均为 7 的 A,B 两组样本数据的散点图，已知 A 组样本数据的样本相关系数为 r_1，B 组数据的样本相关系数为 r_2，则 (C)



A. $r_1=r_2$　　B. $r_1<r_2$

C. $r_1>r_2$　　D. 无法判定

(2)足球是深受人们喜爱的运动,我国正大力发展校园足球.为了解某地区足球特色学校的发展状况,社会调查小组得到的数据如下:

年份 x	2017	2018	2019	2020	2021
足球特色学校 y/百个	0.30	0.60	1.00	1.40	1.70

根据上表数据,计算 y 与 x 的样本相关系数 r,并说明 y 与 x 的线性相关程度.(若 $0.75\leqslant|r|\leqslant1$,则认为 y 与 x 的线性相关程度很强;若 $0.3\leqslant|r|<0.75$,则认为 y 与 x 的线性相关程度一般;若 $|r|<0.3$,则认为 y 与 x 的线性相关程度较弱)

附:$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$,

$\sqrt{13}\approx3.6056$.

【解析】(1)选C.根据 A,B 两组样本数据的散点图知,A 组样本数据几乎在一条直线上,且成正相关,所以样本相关系数 r_1 应最接近1,B 组样本数据分散在一条直线附近,也成正相关,所以样本相关系数 r_2 满足 $r_2<r_1$,即 $r_1>r_2$.

(2)由题意得 $\overline{x}=2016$,$\overline{y}=1$,

$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=10$,$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=1.3$,

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{3.6}{\sqrt{10}\sqrt{1.3}}=\dfrac{3.6}{3.6056}\approx0.9984>0.75$.

所以 y 与 x 的线性相关程度很强.

随堂小练

1.我们常说"吸烟有害健康",则吸烟与健康之间的关系是　　(B)

A.正相关　　B.负相关

C.无相关　　D.不确定

【解析】选B.烟吸得越多,则健康程度越差.

2.在一次试验中,测得 (x,y) 的4组值分别为 $(1,2),(2,0),(4,-4),(-1,6)$,则 y 与 x 的样本相关系数为　　(D)

A. 1　　B. -2

C. 0　　D. -1

【解析】选D. $\overline{x}=1.5$,$\overline{y}=1$,$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=22$,$\sum\limits_{i=1}^{4}y_i^2=56$,$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=-20$,样本相关系数 $r=\dfrac{-20-4\times1.5\times1}{\sqrt{(22-4\times1.5^2)(56-4\times1^2)}}=-1$.

3.某学校开展研究性学习活动,一组同学获得了下面的一组试验数据:

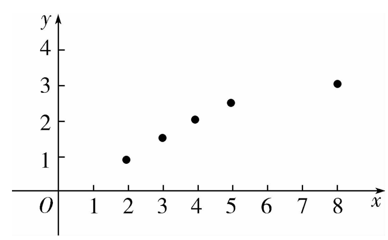
x	1.99	3	4	5.1	8
y	0.99	1.58	2.01	2.35	3.00

现有如下5个模拟函数:

①$y=0.58x-0.16$;②$y=2^x-3.02$;③$y=x^2-5.5x+8$;④$y=\log_2x$;⑤$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1.74$.

请从中选择一个模拟函数,使它能近似地反映这些数据的规律,应选__④__.(填序号)

【解析】画出散点图如图所示.



由图可知上述点大体在函数 $y=\log_2x$ 的图象上,故 $y=\log_2x$ 可以近似地反映这些数据的规律.故填④.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十一)

课后作业·单独成册

8.2　一元线性回归模型及其应用

自主预习

知新预学

1. 一元线性回归模型

假设儿子身高与父亲身高这两个变量之间具有较强的线性相关关系，用 x 表示父亲身高，Y 表示儿子身高，e 表示随机误差. 假定随机误差 e 的均值为 0，方差为与父亲身高无关的定值 σ^2，则它们之间的关系可以表示为 $\begin{cases}Y=bx+a+e,\\E(e)=0,D(e)=\sigma^2,\end{cases}$ 我们称此关系式为 Y 关于 x 的一元线性回归模型. 其中，__Y__称为因变量或响应变量，__x__称为自变量或解释变量；a 和 b 为模型的未知参数，a 称为__截距__参数，b 称为__斜率__参数；e 是 Y 与 $bx+a$ 之间的随机误差.

2. 一元线性回归模型参数的最小二乘估计

(1)经验回归方程与最小二乘估计

我们将 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 称为 Y 关于 x 的__经验回归方程__，也称经验回归函数或经验回归公式，其图形称为__经验回归直线__. 这种求经验回归方程的方法叫做最小二乘法，求得的 $\hat{b}$，$\hat{a}$ 叫做 b，a 的最小二乘估计，其中

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\\ \hat{a}=\underline{\overline{y}-\hat{b}\overline{x}}.\end{cases}$$

(2)观测值、预测值、残差

对于响应变量 Y，通过观测得到的数据称为__观测值__，通过经验回归方程得到的 $\hat{y}$ 称为__预测值__，__观测值__减去__预测值__称为残差.

(3)决定系数 R^2

用 R^2 来比较两个模型的拟合效果，$R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$. R^2 越小，表示残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 越大，模型的拟合效果越差；R^2 越大，表示残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 越小，模型的拟合效果越好.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)经验回归方程必经过点 $(\overline{x},\overline{y})$.　(√)

(2)对于方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，x 增加一个单位时，y 平均增加 $\hat{b}$ 个单位.　(√)

(3)残差是随机误差的估计结果.　(√)

(4)利用经验回归方程求出的值是准确值.　(×)

2. 为研究两个变量之间的关系，选择了 4 个不同的模型进行拟合，计算得到它们的决定系数 R^2，其中拟合效果最好的是　(A)

A. 决定系数 R^2 为 0.96 的模型

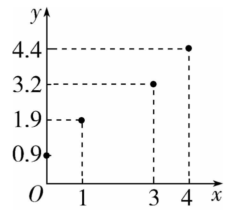
B. 决定系数 R^2 为 0.75 的模型

C. 决定系数 R^2 为 0.52 的模型

D. 决定系数 R^2 为 0.34 的模型

【解析】选 A. 决定系数 R^2 越大、越趋近于 1，拟合效果越好.

3. 如图是一组数据(x,y)的散点图，经最小二乘法计算，y关于x的经验回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+1$，则$\hat{b}=$__0.8__.



【解析】$\overline{x}=\frac{0+1+3+4}{4}=2$，

$\overline{y}=\frac{0.9+1.9+3.2+4.4}{4}=2.6$，

将$(2,2.6)$代入$\hat{y}=\hat{b}x+1$，解得$\hat{b}=0.8$.

4. 某种产品的广告费支出x(单位:万元)与销售额y(单位:万元)的对应数据如下表：

x	2	4	5	6	8
y	30	40	60	50	70

y关于x的经验回归方程为$\hat{y}=6.5x+17.5$，广告支出为5万元时的残差为__10万元__.

【解析】因为y关于x的经验回归方程为$\hat{y}=6.5x+17.5$，当$x=5$时，$\hat{y}=50$. 广告支出为5万元时，由表格得$y=60$，故残差为$60-50=10$万元.

互动课堂

合作探究

探究1 经验回归方程

【例1】在某种产品表面进行腐蚀刻线试验，得到腐蚀深度y(单位:μm)与腐蚀时间x(单位:s)之间的一组观察值如表：

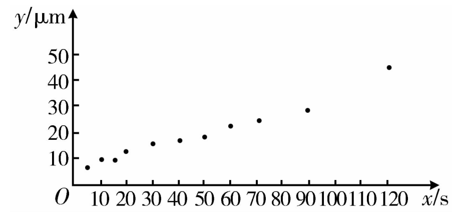
x/s	5	10	15	20	30	40	50	60	70	90	120
y/μm	6	10	10	13	16	17	19	23	25	29	46

(1)画出散点图；

(2)求y关于x的经验回归方程；

(3)当时间为100 s时，利用经验回归方程预测腐蚀深度.

【解析】(1)散点图如图所示.



(2)从散点图中，我们可以看出样本点分布在一条直线附近，因而求经验回归直线方程有意义.

$\overline{x}=\frac{1}{11}(5+10+15+\cdots+120)=\frac{510}{11}$，

$\overline{y}=\frac{1}{11}(6+10+10+\cdots+46)=\frac{214}{11}$，

$\sum\limits_{i=1}^{11}x_iy_i=5\times6+10\times10+15\times10+\cdots+120\times46=13\ 910$，

$\sum\limits_{i=1}^{11}x_i^2=5^2+10^2+15^2+\cdots+120^2=36\ 750$，

所以$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{11}x_iy_i-11\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{11}x_i^2-11\overline{x}^2}$

$=\frac{13\ 910-11\times\frac{510}{11}\times\frac{214}{11}}{36\ 750-11\times\left(\frac{510}{11}\right)^2}\approx0.304$.

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=\frac{214}{11}-0.304\times\frac{510}{11}=5.36$.

故腐蚀深度y关于腐蚀时间x的经验回归方程为$\hat{y}=0.304x+5.36$.

(3)根据(2)求得的经验回归方程，当腐蚀时间为100 s时，$\hat{y}=5.36+0.304\times100=35.76(\mu\text{m})$，即腐蚀时间为100 s时腐蚀深度为35.76 μm.

点睛 求经验回归方程的步骤

(1)计算平均数$\overline{x}$，$\overline{y}$.

(2)计算 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$.

(3)计算 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$.

(4)代入 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$,求出 $\hat{b}$.

(5)代入 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$,求出 $\hat{a}$.

(6)写出经验回归方程.

【变式训练 1】某班主任为了对本班学生的月考成绩进行分析,从全班 40 名学生中随机抽取一个容量为 6 的样本进行分析.随机抽取 6 位同学的数学分数、物理分数对应如表:

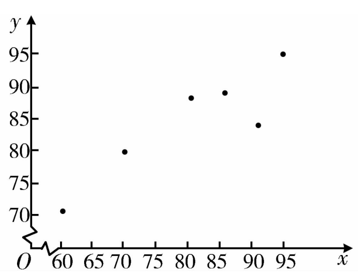
学生编号	1	2	3	4	5	6
数学分数 x	60	70	80	85	90	95
物理分数 y	72	80	88	90	85	95

(1)根据上表数据用散点图说明物理分数 y 与数学分数 x 之间是否具有线性相关性.

(2)如果具有线性相关性,求出经验回归方程(系数精确到 0.1);如果不具有线性相关性,请说明理由.

(3)如果班里的某位同学数学分数为 50,请预测这位同学的物理分数.

【解析】(1)画出散点图:



通过图象可以看出物理分数 y 与数学分数 x 之间具有线性相关性.

(2)$\overline{x}=\dfrac{1}{6}\times(60+70+80+85+90+95)=80$,

$\overline{y}=\dfrac{1}{6}\times(72+80+88+90+85+95)=85$,

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=41\ 285$,$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=39\ 250$,

故 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\overline{x}\ \overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}=\dfrac{41\ 285-6\times80\times85}{39\ 250-6\times80^2}\approx0.6$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=37$.

故经验回归方程是 $\hat{y}=0.6x+37$.

(3)当 $x=50$ 时,解得 $\hat{y}=67$.

故数学分数为 50,预测这位同学的物理分数是 67.

探究 2 残差平方和模拟模型效果的应用

【例 2】某印刷厂为了研究印刷单册书籍的成本 y(单位:元)与印刷册数 x(单位:千册)之间的关系,在印制某种书籍时进行了统计,相关数据如表:

印刷册数 x/千册	2	3	4	5	8
单册成本 y/元	3.2	2.4	2	1.9	1.7

根据以上数据,技术人员分别用甲、乙两种不同的回归模型,得到两个经验回归方程,方程甲:$\hat{y}^{(1)}=\dfrac{4}{x}+1.1$,方程乙:$\hat{y}^{(2)}=\dfrac{6.4}{x^2}+1.6$.

(1)为了比较两种模型的拟合效果,完成以下任务.

①完成下表;

印刷册数 x/千册		2	3	4	5	8
单册成本 y/元		3.2	2.4	2	1.9	1.7
模型甲	估计值 $\hat{y}_i^{(1)}$		2.4	2.1		1.6
	残差 $\hat{e}_i^{(1)}$		0	-0.1		0.1
模型乙	估计值 $\hat{y}_i^{(2)}$		2.3	2	1.9	
	残差 $\hat{e}_i^{(2)}$		0.1	0	0	

②分别计算模型甲与模型乙的残差平方和 Q_1 及 Q_2,并比较 Q_1,Q_2 的大小,判断哪个模型拟合效果更好.

(2)该书上市之后,受到广大读者的喜爱,不久便售罄,于是印刷厂决定进行二次印刷.根据市场调查,新需求量为 8 千册(概率为 0.7)或 16 千册(概率为 0.3).若印刷厂以每册 5 元的价格将书籍出售给订货商,估计印刷厂二次印刷 8 千册还是 16 千册能获得更多利润.(按(1)中拟合效果较好的模型计算印刷单册书的成本)

【解析】(1)①经计算,可得下表:

印刷册数 x(千册)		2	3	4	5	8
单册成本 y(元)		3.2	2.4	2	1.9	1.7
模型甲	估计值 $\hat{y}_i^{(1)}$	3.1	2.4	2.1	1.9	1.6
	残差 $\hat{e}_i^{(1)}$	0.1	0	−0.1	0	0.1
模型乙	估计值 $\hat{y}_i^{(2)}$	3.2	2.3	2	1.9	1.7
	残差 $\hat{e}_i^{(2)}$	0	0.1	0	0	0

②模型甲的残差平方和为 $Q_1=0.1^2+(-0.1)^2+0.1^2=0.03$,

模型乙的残差平方和为 $Q_2=0.1^2=0.01$.

因为 $Q_1>Q_2$,所以模型乙的拟合效果更好.

(2)若二次印刷 8 千册,则估计印刷厂获利为$(5-1.7)\times8\ 000\times0.7=18\ 480$(元),

若二次印刷 16 千册,由(1)可知,单册书印刷成本为$\frac{6.4}{16^2}+1.6=1.625$(元),

则估计印刷厂获利为$(5-1.625)\times16\ 000\times0.3=16\ 200$(元).

因为 $18\ 480>16\ 200$,

故印刷厂二次印刷 8 千册能获得更多利润.

点睛 利用残差平方和模拟模型效果的方法

(1)残差图法:残差点比较均匀地落在以取值为 0 的横轴为对称轴的水平带状区域内,则说明选用的模型比较合适.

(2)残差平方和法:残差平方和$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$越小,模型的拟合效果越好.

【变式训练 2】某同学 4 次考试的数学成绩 x、语文成绩 y 在班级中的排名如表:

数学成绩 x	6	3	2	1
语文成绩 y	9	5	4	2

对上述数据分别用 $y=bx+a$ 与 $y=cx^2+d$ 来拟合 y 与 x 之间的关系,且已知用 $y=cx^2+d$ 来拟合 y 与 x 之间的关系为 $y=0.178x^2+2.77$,此时的残差平方和为 1.593.请用残差分析两者的拟合效果.

【解析】由于 $\overline{x}=\frac{6+3+2+1}{4}=3$,

$\overline{y}=\frac{9+5+4+2}{4}=5$,

$\hat{b}=\frac{6\times9+3\times5+2\times4+1\times2-4\times3\times5}{50-4\times3^2}=\frac{19}{14}$,

所以 $\hat{a}=\frac{13}{14}$.此时可得,$\hat{y}=\frac{19}{14}x+\frac{13}{14}$,此时的残差平方和$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2\approx0.214$.

已知用 $y=cx^2+d$ 来拟合 y 与 x 之间的关系为 $y=0.178x^2+2.77$,此时的残差平方和为 1.593.

由于 $0.214<1.593$,可知用 $\hat{y}=\frac{19}{14}x+\frac{13}{14}$ 来拟合 y 与 x 之间的关系效果更好.

探究 3 R^2 的求解与回归模型的比较方法

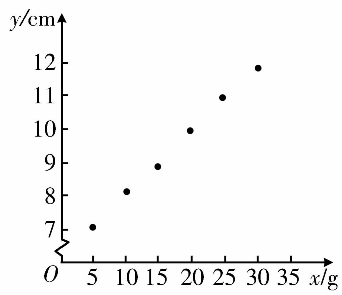
【例 3】为研究质量 x(单位:g)对弹簧长度 y(单位:cm)的影响,对不同质量的 6 个物体进行测量,数据如表:

x/g	5	10	15	20	25	30
y/cm	7.25	8.12	8.95	9.90	10.9	11.8

(1)作出散点图,并求经验回归方程;

(2)求出 R^2.

【解析】(1)散点图如图所示.



因为 $\overline{x}=\frac{1}{6}\times(5+10+15+20+25+30)=17.5$,

$\overline{y}=\frac{1}{6}\times(7.25+8.12+8.95+9.90+10.9+11.8)\approx9.487$,

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=2\ 275$,$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=1\ 076.2$.

计算得 $\hat{b}\approx0.183$,$\hat{a}\approx6.285$,

所以所求经验回归方程为 $\hat{y}=0.183x+6.285$.

(2)列表如下:

$y_i-\hat{y}_i$	0.05	0.005	−0.08	−0.045	0.04	0.025
$y_i-\overline{y}$	−2.24	−1.37	−0.54	0.41	1.41	2.31

所以 $\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2\approx0.013\ 18$,

$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2=14.678\ 4$.

所以 $R^2=1-\frac{0.013\ 18}{14.678\ 4}\approx0.999\ 1$.

点睛 (1)$R^2=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$越接近1,表明回归模型拟合的效果越好.

(2)使用经验回归方程进行预测时的注意点

①只适用于我们所研究的样本的总体.

②一般都有时效性.

③样本数据中的解释变量有一定的取值范围,在该范围内,经验回归方程的预报效果较好,离这个范围越远,预报的效果越差.

④不能期望经验回归方程得到的预报值就是响应变量的精确值.事实上,它是响应变量的可能取值的平均值.

【变式训练3】x 与 y 的部分对应数据如表:

x	2	4	5	6	8
y	30	40	60	50	70

为了对 x,y 两个变量进行统计分析,现根据甲模型:$\hat{y}=6.5x+17.5$、乙模型:$\hat{y}=7x+17$ 分别计算出甲模型的 $R_1^2=0.845$、乙模型的 $R_2^2=0.82$,则__甲__(填"甲"或"乙")模型拟合的效果更好.

【解析】用决定系数 R^2 的值判断模型的拟合效果,R^2 越大,说明残差平方和越小,模型的拟合效果越好.因为甲模型的决定系数为 $R_1^2=0.845$,乙模型的决定系数为 $R_2^2=0.82$,$R_1^2>R_2^2$,所以甲模型拟合的效果更好.

探究4 非线性回归模型

【例4】为防止害虫危害农作物,菜农定期使用低害杀虫农药对蔬菜进行喷洒,但采集上市时蔬菜仍存有少量的残留农药,食用时需要用清水清洗干净.下表记录了用清水 x kg 清洗该蔬菜 1 kg 后残留的农药 y μg.

x/kg	1	2	3	4	5
y/μg	58	54	39	29	10

(1)令 $\omega=x^2$,利用给出的参考数据求出 y 关于 ω 的经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}\omega+\hat{a}$;

(2)对于某种残留在蔬菜上的农药,当它的残留量不高于 20 μg 时对人体无害,为了放心食用该蔬菜,请估计至少需要用多少千克的清水清洗 1 kg 蔬菜.

参考数据:$\sqrt{5}\approx2.24$.

【解析】(1)由题意得,

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(\omega_i-\overline{\omega})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(\omega_i-\overline{\omega})^2}=-\frac{751}{374}\approx-2,$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{\omega}=60$，所以 $\hat{y}=-2\omega+60$.

(2)由(1)得，$\hat{y}=-2\omega+60$，

所以 $\hat{y}=-2x^2+60$，

当 $\hat{y}\leqslant 20$ 时，即 $-2x^2+60\leqslant 20$，

解得 $x\geqslant 2\sqrt{5}\approx 4.48$.

所以为了放心食用该蔬菜，估计需要用 4.48 kg 的清水清洗 1 kg 蔬菜.

点睛 求非线性回归方程的步骤

(1)确定变量，作出散点图.

(2)根据散点图，选择恰当的拟合函数.

(3)变量置换，通过变量置换把非线性回归问题转化为线性回归问题，并求出经验回归方程.

(4)分析拟合效果，通过计算决定系数或画残差图来判断拟合效果.

(5)根据相应的变换，写出非线性回归方程.

【变式训练 4】某地今年上半年患某种传染病的人数 y 与月份 x 的数据如下表，y 与 x 之间满足函数关系，模型为 $y=ae^{bx}$，确定这个函数解析式.

月份 x	1	2	3	4	5	6
人数 y	52	61	68	74	78	83

附：$\ln(52\times 61\times 68\times 74\times 78\times 83)=25.361\ 2$，

$(\ln 52)^2+(\ln 61)^2+(\ln 68)^2+(\ln 74)^2+(\ln 78)^2+(\ln 83)^2=107.347\ 9$，

$\ln 52+2\ln 61+3\ln 68+4\ln 74+5\ln 78+6\ln 83=90.344\ 4$.

【解析】设 $u=\ln y$，$c=\ln a$，得 $\hat{u}=\hat{c}+\hat{b}x$，则 u 与 x 的数据关系如表：

x	1	2	3	4	5	6
$u=\ln y$	3.951 2	4.110 9	4.219 5	4.304 1	4.356 7	4.418 8

由上表，得 $\sum\limits_{i=1}^{6}x_i=21$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}u_i=25.361\ 2$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=91$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}u_i^2\approx 107.347\ 9$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iu_i=90.344\ 4$，

$\overline{x}=3.5$，$\overline{u}\approx 4.226\ 9$，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iu_i-6\overline{x}\ \overline{u}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}\approx 0.090\ 3$，

$\hat{c}=\overline{u}-\hat{b}\overline{x}=4.226\ 9-0.090\ 3\times 3.5=3.910\ 9$.

所以 $\hat{u}=3.910\ 9+0.090\ 3x$.

所以 $y=e^{3.910\ 9}\cdot e^{0.090\ 3x}$.

随堂小练

1. 已知 x，y 的取值如下表所示，若 y 与 x 线性相关，且 $\hat{y}=0.95x+\hat{a}$，则 $\hat{a}=$ (D)

x	0	1	3	4
y	2.2	4.3	4.8	6.7

A. 2.2　　B. 2.9

C. 2.8　　D. 2.6

【解析】选 D. 由表格得 $\overline{x}=\dfrac{1}{4}(0+1+3+4)=2$，$\overline{y}=\dfrac{1}{4}(2.2+4.3+4.8+6.7)=4.5$，

经验回归直线过样本点的中心(2，4.5)，

所以 $4.5=0.95\times 2+\hat{a}$，所以 $\hat{a}=2.6$.

2. 已知变量 x 和 y 满足关系 $y=0.1x-10$，变量 z 与 y 负相关，则下列结论中正确的是 (C)

A. x 与 y 负相关，x 与 z 负相关

B. x 与 y 正相关，x 与 z 正相关

C. x 与 y 正相关，x 与 z 负相关

D. x 与 y 负相关，x 与 z 正相关

【解析】选 C. 由题意知，变量 x 和 y 满足关系 $y=0.1x-10$，所以变量 x 和 y 呈正相关关系，又变量 z 和 y 负相关，所以变量 x 和 z 是负相关关系.

3. 下列说法中正确的是　　(D)

①相关系数 r 用来衡量两个变量之间线性关系的强弱，$|r|$越接近1，相关性越弱；

②经验回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 一定经过样本点的中心$(\overline{x},\overline{y})$；

③随机误差 e 满足 $E(e)=0$，其方差 $D(e)$ 的大小用来衡量预测的精确度；

④决定系数 R^2 用来刻画回归模型的拟合效果，R^2 越小，说明模型的拟合效果越好.

A. ①②　　B. ③④

C. ①④　　D. ②③

【解析】选D. ①线性相关系数 r 是衡量两个变量之间线性关系强弱的量，$|r|$越接近于1，这两个变量线性相关关系越强，$|r|$越接近于0，线性相关关系越弱，①错误；②经验回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 一定通过样本点的中心$(\overline{x},\overline{y})$，②正确；③随机误差 e 是衡量预测精确度的一个量，它满足 $E(e)=0$，③正确；④决定系数 R^2 用来刻画回归模型的拟合效果，R^2 越大，说明模型的拟合效果越好，④不正确.

4. 假定小麦基本苗数 x 与成熟期有效穗 y 之间存在相关关系，今测得5组数据如下：

x	15.0	25.8	30.0	36.6	44.4
y	39.4	42.9	42.9	43.1	49.2

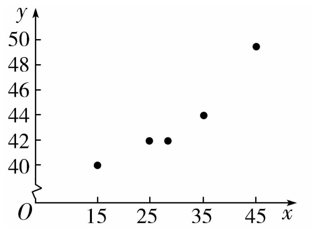
(1)以 x 为解释变量，y 为响应变量，作出散点图；

(2)求 y 关于 x 的经验回归方程，当基本苗数为56.7时，预测成熟期有效穗；

(3)计算各组残差，并计算残差平方和；

(4)计算 R^2 的值.

【解析】(1)散点图如下.



(2)由图看出，样本点呈条状分布，有比较好的线性相关关系，因此可以用经验回归方程刻画它们之间的关系.

设经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，

$\overline{x}=30.36$，$\overline{y}=43.5$，

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=5\ 101.56$，$\overline{x}\ \overline{y}=1\ 320.66$，

$\overline{x}^2=921.729\ 6$，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=6\ 746.76$.

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\ \overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}\approx 0.29$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=43.5-0.29\times 30.36\approx 34.70$.

故所求的经验回归方程为

$\hat{y}=0.29x+34.70$.

当 $x=56.7$ 时，

$\hat{y}=0.29\times 56.7+34.70=51.143$.

预测成熟期有效穗为51.143.

(3)由于 $y=bx+a+e$，

可以算得 $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i$ 分别为 $\hat{e}_1=0.35$，

$\hat{e}_2=0.718$，$\hat{e}_3=-0.5$，$\hat{e}_4=-2.214$，

$\hat{e}_5=1.624$，残差平方和 $\sum_{i=1}^{5}\hat{e}_i^2\approx 8.43$.

(4) $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=50.18$，

所以 $R^2=1-\dfrac{8.43}{50.18}\approx 0.832$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十二)

课后作业 · 单独成册

8.3 列联表与独立性检验

自主预习

知新预学

1. 分类变量与列联表

(1)分类变量

用以区别不同的__现象__或__性质__的一种特殊的随机变量称为分类变量. 分类变量的取值可以用实数表示,例如,学生所在的班级可以用1,2,3等表示,男性、女性可以用1,0表示,等等.

(2)2×2列联表

组别	甲($Y=0$)	乙($Y=1$)	合计
$A(X=0)$	a	b	$a+b$
$B(X=1)$	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

这种形式的数据统计表称为2×2列联表. 2×2列联表给出了成对分类变量数据的交叉分类频数.

2. 独立性检验

(1)设X和Y为定义在Ω上,取值于$\{0,1\}$的成对分类变量. $\{X=0\}$与$\{Y=0\}$独立;$\{X=0\}$与$\{Y=1\}$独立;$\{X=1\}$与$\{Y=0\}$独立;$\{X=1\}$与$\{Y=1\}$独立. 以上四条性质彼此等价,若这些性质成立,我们就称分类变量X和Y独立.

(2)独立性检验

①小概率值α的临界值:对于任何小概率值α,可以找到相应的正实数x_α,使得$P(\chi^2\geqslant x_\alpha)=\alpha$,我们称$x_\alpha$为$\alpha$的临界值. 这个临界值可作为判断$\chi^2$大小的标准,概率值$\alpha$越小,临界值$x_\alpha$越大.

②χ^2的计算公式:

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

③独立性检验:利用χ^2的取值推断分类变量X和Y是否独立的方法称为χ^2独立性检验,读作"卡方独立性检验",简称独立性检验.

④基于小概率值α的检验规则:当$\chi^2\geqslant x_\alpha$时,我们就推断H_0不成立,即认为X和Y不独立,该推断犯错误的概率不超过α;当$\chi^2<x_\alpha$时,我们没有充分证据推断H_0不成立,可以认为X和Y独立.

⑤应用独立性检验解决实际问题包括的主要环节

a. 提出零假设H_0:X和Y相互独立,并给出在问题中的解释.

b. 根据抽样数据整理出2×2列联表,计算χ^2的值,并与临界值x_α比较.

c. 根据检验规则得出推断结论.

d. 在X和Y不独立的情况下,根据需要,通过比较相应的频率,分析X和Y间的影响规律.

⑥独立性检验中几个常用的小概率值和相应的临界值

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)列联表中的数据是两个分类变量的频数. (√)

(2)用独立性检验得出事件A与B无关,即两个事件互不影响. (×)

(3)χ^2 的大小是判断事件 A 与 B 是否相关的统计量. (√)

2. 对于独立性检验,下列说法正确的是 (A)

A. χ^2 独立性检验是假设各事件之间相互独立

B. χ^2 可以为负值

C. χ^2 独立性检验显示"患慢性支气管炎和吸烟习惯有关",这就是指"有吸烟习惯的人必定会患慢性支气管炎"

D. 2×2 列联表中的 4 个数据可以是任意正数

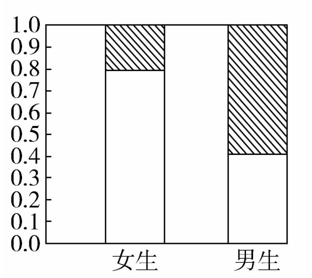
【解析】选 A. 由独立性检验的检验步骤可知 A 正确;

因为 2×2 列联表中的数据均为正整数,故 χ^2 不可能为负值,排除 B;

因为 χ^2 独立性检验显示"患慢性支气管炎和吸烟习惯有关",是指有一定的把握说他们相关,或者说有一定的出错率,故排除 C;

因为 2×2 列联表中的 4 个数据是对于某组特定数据的统计数据,故四个数据间有一定的关系,故排除 D.

3. 如图是调查某地区男、女中学生喜欢理科的等高堆积条形图,阴影部分的高度表示喜欢理科的频率,从图中可以看出 (C)



A. 性别与喜欢理科无关

B. 女生中喜欢理科的占 80%

C. 男生比女生喜欢理科的可能性大些

D. 男生不喜欢理科的占 60%

【解析】选 C. 从图中可以分析,男生喜欢理科的可能性比女生大一些.

4. 利用独立性检验来考虑两个分类变量 X 和 Y 是否有关系时,通过查阅临界值表来确定推断"X 和 Y 有关系"的可信度,如果 $\chi^2>5.024$,那么就推断"X 和 Y 有关系",这种推断犯错误的概率不超过 (C)

α	0.50	0.40	0.25	0.15	0.1
x_α	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706
α	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
x_α	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

A. 0.25　　B. 0.75

C. 0.025　　D. 0.975

【解析】选 C. 因为 $P(\chi^2>5.024)=0.025$,故在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下,认为"X 和 Y 有关系".

互动课堂

合作探究

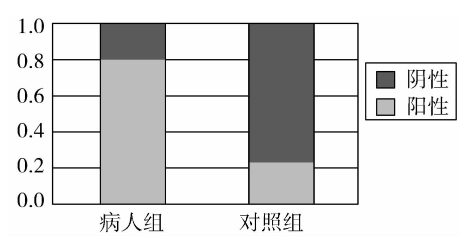
探究 1　等高堆积条形图的应用

【例 1】为了解铅中毒病人与尿棕色素为阳性是否有关系,分别对病人组和对照组的尿液作尿棕色素定性检查,结果如下:

组别	阳性数	阴性数	合计
病人组	29	7	36
对照组	9	28	37
合计	38	35	73

试画出列联表的等高堆积条形图,分析病人组和对照组的尿棕色素阳性数有无差别,铅中毒病人与尿棕色素为阳性是否有关系?

【解析】等高堆积条形图如图所示:



其中两个浅色条的高分别代表病人组和对照组样本中尿棕色素为阳性的频率.

由图可以直观地看出病人组与对照组相比,尿棕色素为阳性的频率差异明显,因此铅中毒病人与尿棕色素为阳性有关系.

点睛 判断两个分类变量是否相关的方法

(1)利用数形结合思想,借助等高堆积条形图来判断两个分类变量是否有关系.

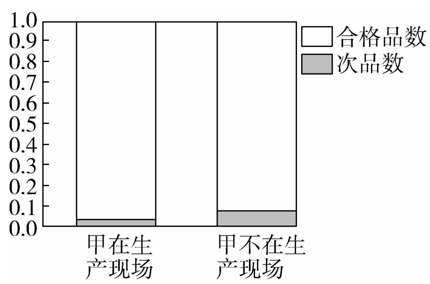
(2)一般地,在等高堆积条形图中,$\frac{a}{a+b}$与$\frac{c}{c+d}$相差越大,两个分类变量有关系的可能性就越大.

【变式训练 1】某生产线上,质量监督员甲在生产现场时,990 件产品中有合格品 982 件,次品 8 件;甲不在生产现场时,510 件产品中有合格品 493 件,次品 17 件.试利用列联表和等高堆积条形图判断监督员甲是否在生产现场对产品质量好坏有无影响.

【解析】根据题目所给数据得如下 2×2 列联表:

组别	合格品数	次品数	合计
甲在生产现场	982	8	990
甲不在生产现场	493	17	510
合计	1 475	25	1 500

所以 $ad-bc=982\times17-8\times493=12\ 750$,$|ad-bc|$比较大,说明甲在不在生产现场与产品质量好坏有关系.相应的等高堆积条形图如图所示:



图中两个阴影部分的高分别表示甲在生产现场和甲不在生产现场时样本中次品数的频率.从图中可以看出,甲不在生产现场时样本中次品数的频率明显高于甲在生产现场时样本中次品数的频率.因此可以认为质量监督员甲是否在生产现场对产品质量好坏有影响.

探究 2 独立性检验

【例 2】为了探究学生选报文、理科是否与对外语的兴趣有关,某同学调查了 361 名高二在校学生,调查结果如下:理科生中对外语有兴趣的有 138 人,无兴趣的有 98 人;文科生中对外语有兴趣的有 73 人,无兴趣的有 52 人.依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验,分析学生对外语的兴趣是否会影响选报文、理科.

【解析】零假设为 H_0:学生选报文、理科与对外语的兴趣无关联.根据题目所给的数据得到如下列联表:

单位:人

兴趣	理科生	文科生	合计
有	138	73	211
无	98	52	150
合计	236	125	361

根据列联表中数据由公式计算得

$$\chi^2=\frac{361\times(138\times52-73\times98)^2}{211\times150\times236\times125}\approx1.871\times10^{-4}<2.706=x_{0.1}.$$

根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即认为学生选报文、理科与对外语的兴趣无关联,此推断犯错误的概率不大于 0.1.

点睛 解决独立性检验问题的基本步骤

(1)根据已知的数据作出列联表.

(2)提出零假设 H_0,并给出在问题中的解释.

(3)求 χ^2 的值.

(4)与临界值 x_α 比较，根据检验规则得出推断结论.

【变式训练 2】某校推广新课改，在两个程度接近的班级进行试验，一班为新课改班级，二班为非课改班级，经过一个学期的教学后对期末考试进行分析评价(规定：总分不低于 550 分为优秀，550 分以下为非优秀)，得到列联表如下：

单位：人

班级	优秀	非优秀	合计
一班	35	13	
二班	17	25	
合计			

(1)请完成列联表；

(2)根据列联表的数据，依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，分析推广新课改是否会影响总成绩.

【解析】(1) 单位：人

班级	优秀	非优秀	合计
一班	35	13	48
二班	17	25	42
合计	52	38	90

(2)零假设为 H_0：推广新课改不会影响总成绩. 根据列联表中的数据，

得到 $\chi^2=\dfrac{90\times(35\times25-13\times17)^2}{48\times42\times52\times38}\approx9.66>7.879=x_{0.005}$，依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为推广新课改会影响总成绩，此推断犯错误的概率不大于 0.005.

随堂小练

1. 某飞机在一次飞行航程中遭遇恶劣气候，55 名男乘客中有 24 名晕机，34 名女乘客中有 8 名晕机. 在检验这些乘客晕机是否与性别有关时，采用的数据分析方法应是 (C)

A. 频率分布直方图

B. 回归分析

C. 独立性检验

D. 用样本估计总体

【解析】选 C. 根据题意，结合题目中的数据，列出 2×2 列联表，求出 χ^2，对照数表可得出概率结论，这种分析数据的方法是独立性检验.

2. 如表是一个 2×2 列联表，则表中 a,b 的值分别为 (C)

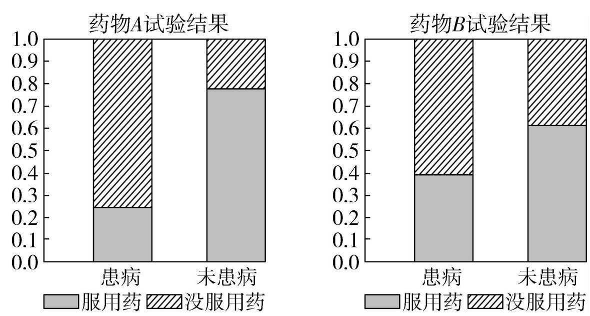
组别	y_1	y_2	合计
x_1	a	21	73
x_2	22	25	47
合计	b	46	120

A. 94，72　　B. 52，50

C. 52，74　　D. 74，52

【解析】选 C. $a=73-21=52$，$b=a+22=52+22=74$.

3. 为考察 A，B 两种药物预防某疾病的效果，进行动物试验，分别得到如下等高堆积条形图.



根据图中信息，下列各项说法中最佳的一项是 (B)

A. 药物 B 的预防效果优于药物 A 的预防效果

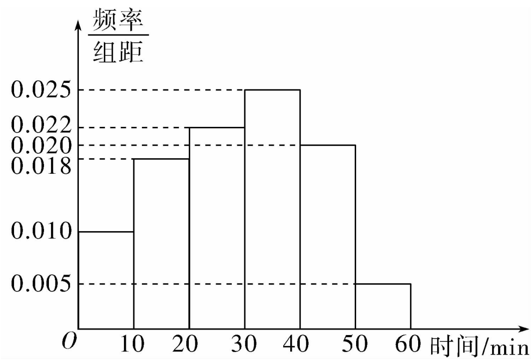
B. 药物 A 的预防效果优于药物 B 的预防效果

C. 药物 A,B 对该疾病均有显著的预防效果

D. 药物 A,B 对该疾病均没有预防效果

【解析】选 B. 从图中可以看出,服用药物 A 后未患病的比例比服用药物 B 后未患病的比例大得多,预防效果更好.

4. 某电视传媒公司为了了解某地区电视观众对某类体育节目的收视情况,随机抽取了 100 名观众进行调查,其中女性有 55 名. 下面是根据调查结果绘制的观众日均收看该体育节目时间的频率分布直方图.



将日均收看该体育节目时间不低于40 min 的观众称为“体育迷”,已知“体育迷”中有 10 名女性.

单位:人

性别	非体育迷	体育迷	合计
男			
女			
合计			

(1)根据已知条件完成 2×2 列联表,依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,你认为“体育迷”与性别是否有关联?

(2)将日均收看该体育节目不低于50 min 的观众称为“超级体育迷”. 已知“超级体育迷”中有 2 名女性,若从“超级体育迷”中任意选取 2 人,求至少有 1 名女性观众的概率.

【解析】(1)零假设为 H_0:“体育迷”与性别无关联. 由频率分布直方图可知,在抽取的 100 人中,“体育迷”有 25 人,

从而 2×2 列联表如下:

单位:人

性别	非体育迷	体育迷	合计
男	30	15	45
女	45	10	55
合计	75	25	100

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算,

得 $\chi^2=\dfrac{100\times(30\times10-45\times15)^2}{75\times25\times45\times55}=\dfrac{100}{33}\approx 3.030<3.841=x_{0.05}$. 根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即认为“体育迷”与性别无关联.

(2)由频率分布直方图可知,“超级体育迷”为 5 人,

从而一切可能结果所组成的样本空间为:

$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_3),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(b_1,b_2)\}$. 其中 a_i 表示男性,$i=1,2,3$,b_j 表示女性,$j=1,2$.

Ω 由 10 个样本点组成,而且这些样本点的出现是等可能的,用 A 表示“任选 2 人中,至少有 1 人是女性”这一事件,

则 $A=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(b_1,b_2)\}$.

事件 A 由 7 个样本点组成,因而 $P(A)=\dfrac{7}{10}$.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十三)

课后作业·单独成册

三、知能拓展

成对数据的统计分析复习

重难突破

要点1 回归分析

【例1】某省级示范高中高三年级对考试的评价指标中，有“难度系数”和“区分度”两个指标. 其中，难度系数$=\dfrac{年级总平均分}{总分}$，区分度$=\dfrac{实验班的平均分-普通班的平均分}{总分}$.（结果精确到0.01）

(1)在某次数学考试（满分150分）中，从实验班和普通班各随机抽取三人，实验班三人的成绩分别为147分、142分、137分，普通班三人的成绩分别为97分、102分、113分，通过样本估算本次考试的区分度.

(2)以下表格是高三年级六次考试的统计数据如下表：

难度系数 x	0.64	0.71	0.74	0.76	0.77	0.82
区分度 y	0.18	0.23	0.24	0.24	0.22	0.15

①计算样本相关系数r，当$|r|<0.75$时，认为线性相关程度弱；当$|r|\geqslant 0.75$时，认为线性相关程度强. 通过计算说明，能否利用线性回归模型拟合y与x的关系.

②已知$t=|x-0.74|$，求出y关于t的经验回归方程，并预测当$x=0.75$时y的值.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=0.930\ 9$，

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2}\approx 0.011\ 2$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}t_iy_i=0.048\ 3$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\overline{t})^2\approx 0.007\ 3$.

【解析】(1)易求得实验班三人成绩的平均分为$\dfrac{147+142+137}{3}=142$（分），

普通班三人成绩的平均分为$\dfrac{97+102+113}{3}=104$（分），

所以区分度为$\dfrac{142-104}{150}\approx 0.25$.

(2)①由题知，

$\overline{x}=\dfrac{0.64+0.71+0.74+0.76+0.77+0.82}{6}=0.74$，

$\overline{y}=\dfrac{0.18+0.23+0.24+0.24+0.22+0.15}{6}=0.21$，

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2}}\approx\frac{0.930\ 9-6\times 0.74\times 0.21}{0.011\ 2}\approx -0.13,$$

故$|r|<0.75$，线性相关程度较弱.

综上可知，不能利用线性回归模型拟合y与x的关系.

②y与t的值如下表：

t	0.10	0.03	0	0.02	0.03	0.08
区分度 y	0.18	0.23	0.24	0.24	0.22	0.15

则$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}t_iy_i-n\overline{t}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\overline{t})^2}\approx\frac{0.048\ 3-6\times\dfrac{0.26}{6}\times 0.21}{0.007\ 3}\approx -0.86,$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}=0.21+0.86\times\frac{0.26}{6}\approx0.25.$

故所求经验回归方程为 $\hat{y}=-0.86t+0.25$.

当 $x=0.75$ 时，$t=0.01$，所以 $\hat{y}\approx0.24$.

点睛 已知解释变量的某个值去预测相应响应变量的某个值时，要弄清楚代入的对象．如第(2)问的②中，易误把 $x=0.75$ 直接代入经验回归方程，求出 y 的值，导致错误．

【变式训练 1】在一段时间内，某种商品的价格 x(单位：元)和需求量 y(单位：件)的一组对应数据如表：

x/元	14	16	18	20	22
y/件	12	10	7	5	3

已知 x 与 y 具有线性相关关系，求出 y 关于 x 的经验回归方程，并说明拟合效果的好坏．

【解析】$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(14+16+18+20+22)=18$，

$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(12+10+7+5+3)=7.4$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=14^2+16^2+18^2+20^2+22^2=1\ 660$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=14\times12+16\times10+18\times7+20\times5+22\times3=620$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}$

$=\frac{620-5\times18\times7.4}{1\ 660-5\times18^2}=-1.15.$

所以 $\hat{a}=7.4+1.15\times18=28.1$.

所以 y 关于 x 的经验回归方程为

$\hat{y}=-1.15x+28.1$.

列出残差表为：

$y_i-\hat{y}_i$	0	0.3	-0.4	-0.1	0.2
$y_i-\overline{y}$	4.6	2.6	-0.4	-2.4	-4.4

所以 $\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2=0.3$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=53.2$，

$R^2=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}\approx0.994.$

所以拟合效果较好．

要点 2 独立性检验

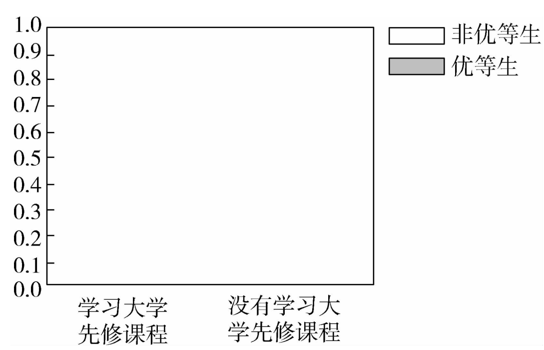
【例 2】中国大学先修课程，是在高中开设的具有大学水平的课程，旨在让学有余力的高中生尽早接受大学思维方式、学习方法的训练，为大学学习乃至未来的职业生涯做好准备．某高中每年招收学生 1 000 人，开设大学先修课程已有两年，共有 300 人参与学习先修课程，两年全校共有优等生 200 人，学习先修课程的优等生有 50 人．

(1)请填写 2×2 列联表，画出等高堆积条形图，并通过图形判断学习先修课程与优等生是否有关联；

(2)依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为学习先修课程与优等生有关联？

单位：人

组别	优等生	非优等生	合计
学习大学先修课程			
没有学习大学先修课程			
合计			



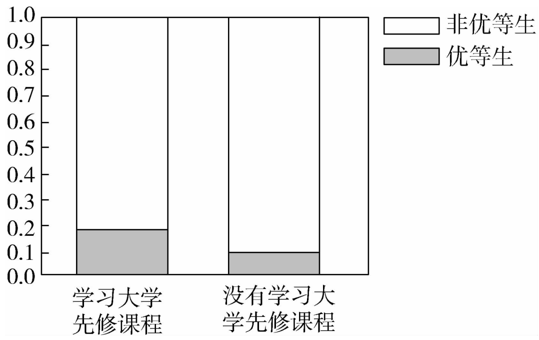
【解析】零假设为 H_0：学习选修课程与优等生无关联.

(1)列联表如下：

单位：人

组别	优等生	非优等生	合计
学习大学先修课程	50	250	300
没有学习大学先修课程	150	1 550	1 700
合计	200	1 800	2 000

等高堆积条形图如下图：



通过图形可判断学习先修课程与优等生有关系.

(2)由列联表可得

$$\chi^2=\frac{2\ 000(50\times1\ 550-150\times250)^2}{300\times1\ 700\times200\times1\ 800}\approx17.429>6.635=x_{0.01},$$

依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为学习先修课程与优等生有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.01.

点睛 独立性检验问题的求解策略

(1)等高堆积条形图法：依据题目信息画出等高堆积条形图，依据频率差异来粗略地判断两个变量的相关性.

(2)χ^2 统计量法：

先计算 $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，再与临界值表作比较，最后得出结论.

【变式训练 2】在 500 只小白鼠身上试验某种血清预防某种疾病的作用，把一年中的记录与另外 500 只未用血清的小白鼠作比较结果如表：

试验血清	未患病	患病	合计
试验	252	248	500
未试验	224	276	500
合计	476	524	1 000

依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，分析血清是否能起到预防疾病的作用.

【解析】由题得

$$\chi^2=\frac{1000(252\times276-248\times224)^2}{500\times500\times476\times524}=3.143>2.706.$$

即依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，血清能起到预防疾病的作用.

拓展提升

1. 样本相关系数 r 可用来衡量两个变量之间线性相关程度的强弱，则下列说法正确的是 (D)
   A. r 只能取正值
   B. r 可以取任意实数
   C. 通常当 r 越接近 0 时，两个变量线性相关程度越强
   D. 通常当 $|r|$ 越接近 1 时，两个变量线性相关程度越强

2. 下列关系中：①学生的学习态度与学习成绩之间的关系；②教师的执教水平与学生的学习成绩之间的关系；③学生的身高与学习成绩之间的关系；④家庭的经济条件与学生的学习成绩之间的关系. 其中具有相关关系的是 (A)
   A. ①② B. ①③
   C. ②③ D. ②④

3. 设两个变量 x 和 y 之间具有线性相关关系，它们的样本相关系数是 r，y 关于 x 的经验回归直线的斜率是 $\hat{b}$，纵截距是 $\hat{a}$，那么有 (A)
   A. $\hat{b}$ 与 r 的符号相同
   B. $\hat{a}$ 与 r 的符号相同

C. $\hat{b}$ 与 r 的符号相反

D. $\hat{a}$ 与 r 的符号相反

4. 为了评价某个电视栏目的改进效果，在改进前后分别从居民点抽取了 100 位居民进行调查，经过计算 $\chi^2=99.9$，根据这一数据分析，下列说法正确的是 (C)

A. 有 99.9%的人认为该栏目优秀

B. 有 99.9%的人认为该栏目的优秀与改进有关系

C. 在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下认为该栏目的优秀与改进有关系

D. 以上说法都不对

5. 由以下数据得到的经验回归直线必过定点 (D)

x	1	2	3	4
y	10	6	8	12

A. (1,10)　　B. (2,6)

C. (5,9)　　D. (2.5,9)

6. 变量 y 与 x 有如下统计数据：

x	2	4	5	6	8
y	30	40	60	50	70

则 y 与 x 线性__相关__(填“相关”或“不相关”).

7. 在一次试验中，测得 (x,y) 的四组值分别是 $A(1,1)$，$B(3,4)$，$C(5,7)$，$D(7,8)$，则 y 与 x 之间的经验回归方程为__$\hat{y}=1.2x+0.2$__.

8. 某市教育局邀请教育专家深入该市多所中小学，开展听课、访谈及随堂检测等活动，他们把收集到的 180 节课分为三类课堂教学模式，教师主讲的为 A 模式，少数学生参与的为 B 模式，多数学生参与的为 C 模式，A，B，C 三类课的节数比例为 3∶2∶1.

(1)为便于研究分析，教育专家将 A 模式称为传统课堂模式，B，C 统称为新课堂模式. 根据随堂检测结果，把课堂教学效率分为高效和非高效，根据检测结果统计得到如下 2×2 列联表：

单位：节

课堂模式	高效	非高效	合计
新课堂模式	60	30	90
传统课堂模式	40	50	90
合计	100	80	180

依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为课堂教学效率与教学模式有关联？并说明理由.

(2)教育专家采用分层随机抽样的方法从收集到的 180 节课中选出 12 节课作为样本进行研究，并从样本中的 B 模式和 C 模式课堂中随机抽取 2 节课，求至少有 1 节课为 C 模式课堂的概率.

【解析】(1)零假设为 H_0：课堂效率与教学模式无关联. 由列联表中的统计数据得

$$\chi^2=\frac{180\times(60\times50-40\times30)^2}{100\times80\times90\times90}=9>6.635=x_{0.01},$$

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为课堂效率与教学模式有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.01.

(2)样本中的 B 模式课堂和 C 模式课堂分别是 4 节和 2 节.

从中任取两节有 $C_6^2=15$(种)取法，其中至少有一节课为 C 模式课堂取法有 $C_6^2-C_4^2=9$(种)，

所以至少有一节课为 C 模式课堂的概率为 $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十四)

课后作业 · 单独成册