CONTENTS 目录

第四章 数 列

一、课标导向

课标要求

1. 数列概念
通过日常生活和数学中的实例,了解数列的概念和表示方法(列表、图象、通项公式),了解数列是一种特殊函数.
2. 等差数列
(1)通过生活中的实例,理解等差数列的概念和通项公式的意义.
(2)探索并掌握等差数列的前 n 项和公式,理解等差数列的通项公式与前 n 项和公式的关系.
(3)能在具体的问题情境中,发现数列的等差关系,并解决相应的问题.
(4)体会等差数列与一元一次函数的关系.
3. 等比数列
(1)通过生活中的实例,理解等比数列的概念和通项公式的意义.
(2)探索并掌握等比数列的前 n 项和公式,理解等比数列的通项公式与前 n 项和公式的关系.
(3)能在具体的问题情境中,发现数列的等比关系,并解决相应的问题.
(4)体会等比数列与指数函数的关系.
4. 数学归纳法(选学内容,不作为考试要求)
了解数学归纳法的原理,能用数学归纳法证明数列中的一些简单命题.

知识网络

- 数 列
  - 一般数列
    - 定 义
    - 分 类
      - 有穷数列
      - 无穷数列
    - 表示方法
      - 列表法
      - 通项公式法
      - 图象法
    - 性 质
      - 增减性
        - 递增数列
        - 递减数列
      - 其 他
        - 常数列
        - 摆动数列
      - 函数特性
        - 定义域
        - 图 象
  - 特殊数列
    - 等差数列
      - 定 义
      - 通项公式 — 性 质 — 应 用
      - 等差中项
      - 等差数列的前 n 项和
        - 定 义
        - 公式推导
        - 基本运算
        - (以上) 性质与应用
    - 等比数列
      - 定 义
      - 通项公式 — 性 质 — 应 用
      - 等比中项
      - 等比数列的前 n 项和
        - 定 义
        - 公式推导
        - 基本运算
        - (以上) 性质与应用
  - 数学归纳法
    - 基本原理
    - 简单应用

二、精讲精练

4.1 数列的概念

第1课时 数列的概念及简单表示法

学习目标	核心素养
理解数列的有关概念与数列的表示方法	数学抽象
理解数列的分类标准	数学抽象
掌握数列通项公式的概念及其应用	逻辑推理、数学运算

自主预习

知新预学

1. 数列的概念

(1)数列：一般地，我们把按照__确定的顺序__排列的一列数称为数列.

(2)项：数列中的每一个数叫做这个数列的项. 数列的第一个位置上的数叫做这个数列的第1项，常用符号__a_1__表示，第二个位置上的数叫做这个数列的第2项，用a_2表示……第n个位置上的数叫做这个数列的第n项，用__a_n__表示. 其中第1项也叫做__首项__.

(3)表示：数列的一般形式是$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为__$\{a_n\}$__.

2. 数列的分类

分类标准	名称	含义
按项的个数	有穷数列	项数__有限__的数列
	无穷数列	项数__无限__的数列
按项的变化趋势	递增数列	从第__2__项起，每一项都__大于__它的前一项的数列
	递减数列	从第__2__项起，每一项都__小于__它的前一项的数列
	常数列	__各项都相等__的数列

3. 数列的通项公式

如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与它的__序号n__之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的通项公式.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)数列1,1,1,…是无穷数列. (√)

(2)数列1,2,3,4和数列1,2,4,3是同一个数列. (×)

(3)数列中的每一项都与它的序号有关. (√)

(4)a_n与$\{a_n\}$是不同的概念. (√)

2. 数列3,4,5,6,…的一个通项公式为 (C)

A. $a_n=n$　　B. $a_n=n+1$

C. $a_n=n+2$　　D. $a_n=2n$

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2+1$，则122是该数列的 (C)

A. 第9项　　B. 第10项

C. 第11项　　D. 第12项

【解析】令$n^2+1=122$，则$n^2=121$，所以$n=11$.

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2n-1$，则$a_8=$__15__.

【解析】$a_8=2\times8-1=15$.

互动课堂

合作探究

探究1 数列的概念及分类

【例1】已知下列数列：

①2 014,2 016,2 018,2 020,2 022；

②$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$；

③$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$；

④$1,-\frac{2}{3},\frac{3}{5},\cdots,\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{2n-1},\cdots$；

⑤$1,0,-1,\cdots,\sin\frac{n\pi}{2},\cdots$；

⑥9,9,9,9,9,9.

其中，__①⑥__是有穷数列，__②③④⑤__是无穷数列，__①②__是递增数列，__③__是递减数列，__⑥__是常数列.（填序号）

【解析】分析可知，①是有穷递增数列；

②是无穷递增数列$\left(因为\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}\right)$；

③是无穷递减数列；

④是摆动数列，且是无穷数列；

⑤是摆动数列，且是无穷数列；

⑥是常数列，且是有穷数列.

点睛（1）数列概念的理解

数列的概念中要把握两个关键点："确定的顺序"与"一列数".也就是说构成数列的元素是"数"，并且这些数是按照确定的顺序排列的，即确定的数在确定的位置.

（2）数列分类的理解

判断给出的数列是有穷数列还是无穷数列，只需观察数列是有限项还是无限项.若数列含有有限项，则是有穷数列，否则为无穷数列.

【变式训练1】（1）下列说法中，正确的是 （ C ）

A. 数列1,3,5,7可表示为{1,3,5,7}

B. 数列1,0,−1,−2与数列−2,−1,0,1是相同的数列

C. 数列的项可以相等

D. 数列a,b,c和数列c,b,a一定不是同一数列

【解析】{1,3,5,7}不表示数列，故A错误；数列具有有序性，故B错误；当$a=c$时，数列a,b,c和数列c,b,a表示同一数列，故D错误；数列的项可以相等，故C正确.

（2）下列数列中，既是递增数列又是无穷数列的是 （ C ）

A. $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$

B. $-1,-2,-3,-4,\cdots$

C. $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\cdots$

D. $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots,\sqrt{n}$

【解析】A是无穷递减数列；B是无穷递减数列；C是无穷递增数列；D是有穷递增数列.

探究2 用观察法求数列的通项公式

【例2】写出下列各数列的一个通项公式：

（1）$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$；

（2）$1,-3,5,-7,9,\cdots$；

（3）$0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\cdots$；

（4）9,99,999,9 999,…；

（5）3,5,3,5,3,5,….

【解析】（1）将数列的项统一化成分数：$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$，分子是位置序号的平方.故该数列的一个通项公式为$a_n=\frac{n^2}{2}$.

（2）数列各项的绝对值为1,3,5,7,9,…，是连续的正奇数.各项的符号是奇数项正，偶数项负，可用$(-1)^{n+1}$表示.故该数列的一个通项公式为$a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$.

（3）数列各项的分母可视为1,2,4,8,…，通项可记为2^{n-1}（$n\in\mathbf{N}^*$）.各项的分子比分母小1，即为$2^{n-1}-1$.故该数列的一个通项公式为$a_n=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$.

（4）数列的各项加1后变为10,100,1 000,10 000,…，变化后数列的第n项应为10^n，故原数列的一个通项公式为$a_n=10^n-1$.

（5）此数列为摆动数列，奇数项为3，偶数项为5，故通项公式可写为$a_n=\begin{cases}3,n为奇数,\\5,n为偶数.\end{cases}$此数列中的两项3与5的平均数为$\frac{3+5}{2}=4$，奇数项为$4-1$，偶数项为$4+1$，故通项公式还可写为$a_n=4+(-1)^n$.

点睛根据数列的前几项求通项公式的解题思路

（1）先统一各项的结构，如都化成分数、根式等.

（2）分析结构中变化的部分与不变的部分，探索变化部分的规律与对应序号间的函数解析式.

（3）对于符号交替出现的情况，可先观察其绝对值，再用$(-1)^n$或$(-1)^{n+1}$处理.

（4）对于周期数列，可考虑拆成几个简单数列之和的形式，或者利用周期函数，如三角函数等.

【变式训练2】（1）数列$1,\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\cdots$的一个通项公式是$a_n=$ （ B ）

A. $\frac{n}{2n+1}$　　B. $\frac{n}{2n-1}$

C. $\frac{n}{2n-3}$　　D. $\frac{n}{2n+3}$

【解析】将原数列$\{a_n\}$写成：$\frac{1}{1},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\cdots$，不难看出，分子构成正整数数列，分母构成正奇数数列，所以数列$\{a_n\}$的一个通项公式是$a_n=\frac{n}{2n-1}$.

（2）数列0.3,0.33,0.333,0.333 3,…的通项公式$a_n=$ （ C ）

A. $\frac{1}{9}(10^n-1)$　　B. $\frac{2}{9}(10^n-1)$

C. $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$　　D. $\frac{3}{10}(10^n-1)$

【解析】因为数列0.9,0.99,0.999,0.999 9,…的通项公式为$a_n=1-\frac{1}{10^n}$.而数列0.3,0.33,0.333,0.333 3,…的每一项都是上面数列对应项的$\frac{1}{3}$.

探究 3 数列通项公式的简单应用

【例 3】已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n^2-28n$.

(1)写出此数列的第 4 项和第 6 项；

(2)-49是否是该数列中的一项？如果是，应是第几项？68 是否是该数列中的一项？如果是，应是第几项？

【解析】(1)$a_4=3\times4^2-28\times4=-64$.

$a_6=3\times6^2-28\times6=-60$.

(2)由$3n^2-28n=-49$，得$n=7$或$n=\frac{7}{3}$(舍去)，

所以-49是该数列中的项，是第 7 项.

由$3n^2-28n=68$，得$n=-2$或$n=\frac{34}{3}$，均不合题意，所以 68 不是该数列中的项.

点睛 (1)利用数列的通项公式求某项的方法

数列的通项公式给出了第n项a_n与它的位置序号n之间的关系，只要用序号代替公式中的n，就可以求出数列的相应项.

(2)判断某数值是否为该数列的项的方法

先假定它是数列$\{a_n\}$中的第n项，然后列出关于n的方程.若方程的解为正整数，则它是数列中的一项；若方程无解或解不是正整数，则它不是该数列中的一项.

【变式训练 3】(1)数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2}{n^2+n}$，那么$\frac{1}{10}$是它的 (A)

A. 第 4 项　　B. 第 5 项

C. 第 6 项　　D. 第 7 项

【解析】设$\frac{1}{10}$是数列$\{a_n\}$中的第n项，则$\frac{1}{10}=\frac{2}{n^2+n}$，解得$n=4$或$n=-5$.

因为$-5\notin\mathbf{N}^*$，所以$n=-5$应舍去.故$n=4$.

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{4}{11-2n}$，则满足$a_{n+1}<a_n$的n的值为 (C)

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

【解析】由$a_{n+1}<a_n$，得$a_{n+1}-a_n=\frac{4}{9-2n}-\frac{4}{11-2n}=\frac{8}{(9-2n)(11-2n)}<0$，解得$\frac{9}{2}<n<\frac{11}{2}$.又$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n=5$.

(3)若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=3-2^n$，则$a_{2n}=$ __$3-4^n$__，$\frac{a_2}{a_3}=$ __$\frac{1}{5}$__.

【解析】因为$a_n=3-2^n$，

所以$a_{2n}=3-2^{2n}=3-4^n$.

$\frac{a_2}{a_3}=\frac{3-2^2}{3-2^3}=\frac{1}{5}$.

探究 4 数列增减性的应用

【例 4】已知函数$f(x)=\frac{1-2x}{x+1}(x\geqslant1)$，构造数列$a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证：$a_n>-2$；

(2)数列$\{a_n\}$是递增数列还是递减数列？为什么？

【解析】(1)因为$f(x)=\frac{1-2x}{x+1}=\frac{3-2(x+1)}{x+1}$

$=-2+\frac{3}{x+1}$，

所以$a_n=-2+\frac{3}{n+1}$.

因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$a_n>-2$.

(2)数列$\{a_n\}$为递减数列.理由如下：

因为$a_n=-2+\frac{3}{n+1}$，所以

$a_{n+1}-a_n=\left(-2+\frac{3}{n+2}\right)-\left(-2+\frac{3}{n+1}\right)$

$=\frac{3}{n+2}-\frac{3}{n+1}$

$=\frac{-3}{(n+2)(n+1)}<0$，

即$a_{n+1}<a_n$，所以数列$\{a_n\}$为递减数列.

点睛 (1)数列增减性的判断方法

①定义法：若$a_{n+1}>a_n$，则数列$\{a_n\}$是递增数列；若$a_{n+1}<a_n$，则数列$\{a_n\}$是递减数列；若$a_{n+1}=a_n$，则数列$\{a_n\}$是常数列.

②作差法：若$a_{n+1}-a_n>0$，则数列$\{a_n\}$是递增数列；若$a_{n+1}-a_n<0$，则数列$\{a_n\}$是递减数列；若$a_{n+1}-a_n=0$，则数列$\{a_n\}$是常数列.

③作商法：若$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1(a_n>0,n\in\mathbf{N}^*)$或$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1(a_n<0,n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$是递增数列；若$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1(a_n>0,n\in\mathbf{N}^*)$或$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1(a_n<0,n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$是递减数列；若$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1(a_n\neq0,n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$是常数列.

(2)数列增减性的应用

①求数列的最大项，首先判断数列的增减性或项的增减特征，确定最大项的项数后求出相应的项.

②求参数的范围，由数列的增减性，列出关于a_{n+1}，a_n的不等式，利用不等式及函数知识求范围，其中分离参数是常用的解题技巧.

【变式训练 4】(1)数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n^2-28n$，则数列$\{a_n\}$各项中的最小项是 (B)

A. 第 4 项　　B. 第 5 项

C. 第 6 项　　D. 第 7 项

【解析】$a_n=3n^2-28n=3\left(n-\frac{14}{3}\right)^2-\frac{196}{3}$，又$n\in\mathbf{N}^*$，所以当$n=5$时，$a_n$取最小值.

(2)设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+bn$,若数列$\{a_n\}$是递增数列,则实数b的取值范围为 $(-3,+\infty)$.

【解析】因为数列$\{a_n\}$是递增数列,

所以对任意$n\in\mathbf{N}^*$,$a_{n+1}>a_n$.

即$(n+1)^2+b(n+1)>n^2+bn$,

化简得$b>-(2n+1)$.

因为数列$\{-(2n+1)\}$是递减数列,

所以当$n=1$时,$-(2n+1)$取得最大值-3,

所以$b>-3$.

即实数b的取值范围为$(-3,+\infty)$.

随堂小练

1. 下列数列中,既是无穷数列又是递增数列的是 (C)

A. $1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},\cdots$

B. $\sin\frac{\pi}{13},\sin\frac{2\pi}{13},\sin\frac{3\pi}{13},\sin\frac{4\pi}{13},\cdots$

C. $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$

D. $1,2,3,4,\cdots,30$

【解析】数列$1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},\cdots$是无穷数列,但它不是递增数列,而是递减数列;数列$\sin\frac{\pi}{13},\sin\frac{2\pi}{13},\sin\frac{3\pi}{13},\sin\frac{4\pi}{13},\cdots$是无穷数列,但它既不是递增数列,也不是递减数列;数列$-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$是无穷数列,也是递增数列;数列$1,2,3,4,\cdots,30$是递增数列,但它不是无穷数列.

2. 数列$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$的一个通项公式是$a_n=$ (B)

A. $-\frac{1}{2^n}$

B. $\frac{(-1)^n}{2^n}$

C. $\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

D. $\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

【解析】所给的数列每一项的分子都是1,分母等于2^n,每一项的符号为$(-1)^n$,故此数列的一个通项公式是$a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$.

3. 在数列$\{a_n\}$中,$a_n=2n^2-3$,则125是这个数列的 (B)

A. 第4项

B. 第8项

C. 第7项

D. 第12项

【解析】令$2n^2-3=125$得$n=8$或$n=-8$(舍去),故125是这个数列的第8项.

4. 数列$\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{6}{7},\frac{8}{9},\cdots$的第10项是 (C)

A. $\frac{16}{17}$

B. $\frac{18}{19}$

C. $\frac{20}{21}$

D. $\frac{22}{23}$

【解析】由数列的前4项可知,数列的一个通项公式为$a_n=\frac{2n}{2n+1}$.

当$n=10$时,$a_{10}=\frac{2\times10}{2\times10+1}=\frac{20}{21}$.

5. 若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{ 为奇数},\\2n-2,n\text{ 为偶数},\end{cases}$则$a_3a_4=$ 60 .

【解析】因为$a_3=3\times3+1=10$,$a_4=2\times4-2=6$,

所以$a_3a_4=10\times6=60$.

温馨提示:请自主完成课后作业(一)

课后作业·单独成册

第 2 课时 数列的递推公式及前 n 项和

学习目标	核心素养
理解数列递推公式的含义，能根据递推公式求出数列的前几项	逻辑推理、数学运算
理解数列$\{a_n\}$前 n 项和的含义，会用 a_n 与 S_n 的关系求通项 a_n	逻辑推理、数学运算

自主预习

知新预学

1. 数列的递推公式

如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用__一个式子__来表示，那么__这个式子__叫做这个数列的递推公式.

2. 数列$\{a_n\}$的前 n 项和

我们把数列$\{a_n\}$从第 1 项起到第 n 项止的各项之和，称为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，记作 S_n，即 $S_n=$__$a_1+a_2+\cdots+a_n$__.

3. 数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式

如果数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 与__它的序号 n__之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的前 n 项和公式.

4. a_n 与 S_n 的关系

$$a_n=\begin{cases}\underline{S_1}, & n=1,\\ \underline{S_n-S_{n-1}}, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)递推公式也是表示数列的一种方法. (√)

(2)所有数列都有递推公式. (×)

(3)仅由数列$\{a_n\}$的关系式 $a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$就能确定这个数列. (×)

2. 符合递推关系式 $a_n=\sqrt{2}a_{n-1}$ 的数列是 (B)

A. $1,2,3,4,\cdots$　　B. $1,\sqrt{2},2,2\sqrt{2},\cdots$

C. $\sqrt{2},2,\sqrt{2},2,\cdots$　　D. $0,\sqrt{2},2,2\sqrt{2},\cdots$

3. 已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n}+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则这个数列的第 4 项是 (B)

A. $\dfrac{11}{7}$　　B. $\dfrac{11}{5}$　　C. $\dfrac{21}{11}$　　D. 6

4. 在数列$\{a_n\}$中，若 $a_{n+1}-a_n-n=0$，则 $a_{2\,023}-a_{2\,022}=$__2 022__.

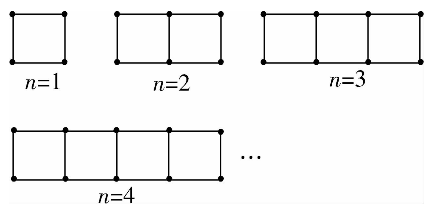
【解析】由 $a_{n+1}-a_n=n$，得 $a_{2\,023}-a_{2\,022}=2\,022$.

互动课堂

合作探究

探究 1 根据图形特征写通项公式

【例 1】下列由火柴棒拼成的图形中，第 n 个图形由 n 个正方形组成.



通过观察可以发现：第 n 个图形中，火柴棒的根数为 (C)

A. $3n-1$　　B. $3n$

C. $3n+1$　　D. $3(n+1)$

【解析】通过观察题图发现，第 1 个图形中，火柴棒有 4 根；第 2 个图形中，火柴棒有$(4+3)$根；第 3 个图形中，火柴棒有$(4+3+3=4+3\times 2)$根；第 4 个图形中，火柴棒有$(4+3+3+3=4+3\times 3)$根……可以发现，从第二项起，每一项与前一项的差都等于 3，即 $a_2-a_1=3,a_3-a_2=3,a_4-a_3=3,\cdots,a_n-a_{n-1}=3(n\geqslant 2)$. 把上面的式子累加，则可得第 n 个图形中，火柴棒的根数为 $a_n=4+3(n-1)=3n+1$.

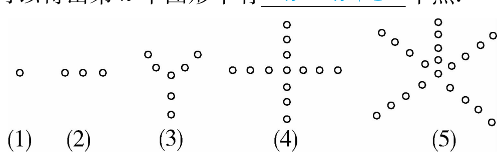
点睛 根据图形特征写出数列通项公式的步骤

(1)观察图形，寻找相邻的两个图形之间的变化；

(2)把这些变化同图形的序号联系起来，发现其中的规律；

(3)归纳猜想出通项公式.

【变式训练 1】根据下列 5 个图形及相应点的个数的变化规律，可以得出第 n 个图形中有__n^2-n+1__个点.



【解析】观察题图，5 个图形中点的个数分别为 $1,1\times 2+1,2\times 3+1,3\times 4+1,4\times 5+1$，故第 n 个图形中点的个数为$(n-1)\cdot n+1=n^2-n+1$.

探究 2 由递推公式求数列的项

【例 2】(1)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2n}(n\in$

$\mathbf{N}^*$),则此数列的第 3 项是 (C)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{5}{8}$

【解析】$a_1=1,a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}=1$,

$a_3=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2\times 2}=\frac{3}{4}$.

(2)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2,a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_{2\,023}=$ (C)

A. $\frac{1}{2}$　　B. -1

C. 2　　D. 1

【解析】由 $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$ 及 $a_1=2$,得 $a_2=\frac{1}{2},a_3=-1,a_4=2,\cdots$,可发现数列$\{a_n\}$是周期为 3 的周期数列:$2,\frac{1}{2},-1,2,\frac{1}{2},-1,\cdots$. 而 $2\,023=674\times 3+1$,故 $a_{2\,023}=a_1=2$.

点睛 由递推公式写出数列的项的方法

(1)根据递推公式写出数列的前几项,首先要弄清楚公式中各部分的关系,依次代入计算即可.

(2)若知道的是末项,通常将所给公式整理成用后面的项表示前面的项的形式.

(3)若知道的是首项,通常将所给公式整理成用前面的项表示后面的项的形式.

[注意]由递推公式写出数列的项时,易忽视数列的周期的判断,导致陷入思维误区.

【变式训练 2】已知在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1,a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)写出数列$\{a_n\}$的前 5 项;

(2)猜想数列$\{a_n\}$的通项公式;

(3)画出数列$\{a_n\}$的图象.

【解析】(1)$a_1=1,a_2=\frac{1}{1+1}\times 1=\frac{1}{2}$,

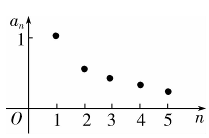
$a_3=\frac{2}{1+2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

$a_4=\frac{3}{1+3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$,

$a_5=\frac{4}{1+4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$.

(2)猜想:$a_n=\frac{1}{n}$.

(3)图象如图所示:



探究 3 由递推公式求通项公式

【例 3】在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2,a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_n=$ (A)

A. $2+\ln n$　　B. $2+(n-1)\ln n$

C. $2+n\ln n$　　D. $1+n+\ln n$

【解析】方法一(归纳法):数列的前 5 项分别为

$a_1=2,a_2=2+\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)=2+\ln 2$,

$a_3=(2+\ln 2)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=2+\ln 3$,

$a_4=(2+\ln 3)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)=2+\ln 4$,

$a_5=(2+\ln 4)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)=2+\ln 5$,

由此可得数列的一个通项公式为 $a_n=2+\ln n$.

方法二(迭代法):$a_2=a_1+\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)$,

$a_3=a_2+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right),\cdots,a_n=a_{n-1}+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$ $(n\geqslant 2)$,

则 $a_n=a_1+\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\right)=2+\ln n(n\geqslant 2)$.

又 $a_1=2=2+\ln 1$,所以 $a_n=2+\ln n$.

方法三(累加法):

$a_{n+1}-a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n$,

$a_1=2$,

$a_2-a_1=\ln 2$,

$a_3-a_2=\ln 3-\ln 2$,

$a_4-a_3=\ln 4-\ln 3$,

…

$a_n-a_{n-1}=\ln n-\ln(n-1)(n\geqslant 2)$,

以上各式相加得

$a_n=2+\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln n-\ln(n-1)]$.

所以 $a_n=2+\ln n(n\geqslant 2)$.

因为 $a_1=2$ 也适合上式,

所以 $a_n=2+\ln n$.

点睛 由递推公式求通项公式的常用方法

(1)归纳法:根据数列的某项和递推公式,求出数列的前几项,归纳出通项公式.

(2)迭代法、累加法或累乘法:

①$a_{n+1}-a_n=$常数或 $a_{n+1}-a_n=f(n)$($f(n)$是可以求和的),使用累加法或迭代法;

②$a_{n+1}=pa_n$(p 为非零常数)或 $a_{n+1}=f(n)a_n$($f(n)$是可以求积的),使用累乘法或迭代法;

③$a_{n+1}=pa_n+q$(p,q 为非零常数),适当变形后转化为第②类解决.

[注意]已知数列递推公式求其通项公式的问题未必总可

以使用累加法或累乘法求解，只有递推公式表示的是数列相邻两项的差或商时才可以使用.

【变式训练 3】(1)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}(n\geqslant 2)$，求$a_n$.

【解析】因为$a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}(n\geqslant 2)$，

所以$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

所以$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\cdots+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+1=\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$.

又因为$a_1=1$符合上式，

所以$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$.

(2)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\ln a_n-\ln a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$，求$a_n$.

【解析】因为$\ln a_n-\ln a_{n-1}=1$，

所以$\ln\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$，即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=e$.

所以$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1$

$=\underbrace{e\cdot e\cdot\cdots\cdot e}_{(n-1)\text{个}}\cdot 1$

$=e^{n-1}$.

又因为$a_1=1$符合上式，

所以$a_n=e^{n-1}$.

探究 4 利用 a_n 与 S_n 的关系求 a_n

【例 4】已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，求$\{a_n\}$的通项公式a_n.

(1)$S_n=2n^2-3n$；

(2)$S_n=3^n+b$.

【解析】(1)$a_1=S_1=2-3=-1$.

当$n\geqslant 2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-3n)-[2(n-1)^2-3(n-1)]$

$=4n-5$，

因为a_1也适合此等式，所以$a_n=4n-5$.

(2)$a_1=S_1=3+b$.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+b)-(3^{n-1}+b)=2\cdot 3^{n-1}$.

当$b=-1$时，a_1适合此等式；

当$b\neq -1$时，a_1不适合此等式.

所以当$b=-1$时，$a_n=2\cdot 3^{n-1}$.

当$b\neq -1$时，$a_n=\begin{cases}3+b, n=1,\\ 2\cdot 3^{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$

点睛 已知S_n求a_n的步骤

(1)先利用$a_1=S_1$求出a_1.

(2)用$n-1$替换S_n中的n得到一个新的关系，利用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$便可求出当$n\geqslant 2$时$a_n$的表达式.

(3)对$n=1$时的结果进行检验，看是否符合$n\geqslant 2$时a_n的表达式，如果符合，则可以把数列的通项公式合写；如果不符合，则应该分$n=1$与$n\geqslant 2$两段来写.

【变式训练 4】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

(1)若$S_n=(-1)^{n+1}\cdot n$，求a_5+a_6及a_n；

(2)若$S_n=3^n+2n+1$，求a_n.

【解析】(1)$a_5+a_6=S_6-S_4=(-6)-(-4)=-2$.

当$n=1$时，$a_1=S_1=1$；

当$n\geqslant 2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^{n+1}\cdot n-(-1)^n\cdot(n-1)$

$=(-1)^{n+1}\cdot[n+(n-1)]$

$=(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)$，

又a_1也适合此式，

所以$a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)$.

(2)因为当$n=1$时，$a_1=S_1=6$；

当$n\geqslant 2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+2n+1)-[3^{n-1}+2(n-1)+1]$

$=2\cdot 3^{n-1}+2$.

由于a_1不适合此式，

所以$a_n=\begin{cases}6, n=1,\\ 2\cdot 3^{n-1}+2, n\geqslant 2.\end{cases}$

随堂小练

1. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_n=(-1)^n\cdot 2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，则$a_5=$ (B)

A. $-\dfrac{16}{3}$　　B. $\dfrac{16}{3}$

C. $-\dfrac{8}{3}$　　D. $\dfrac{8}{3}$

【解析】由$a_n=(-1)^n\cdot 2a_{n-1}$及$a_1=\dfrac{1}{3}$知$a_2=\dfrac{2}{3}$，$a_3=-2a_2=-\dfrac{4}{3}$，$a_4=2a_3=-\dfrac{8}{3}$，$a_5=-2a_4=\dfrac{16}{3}$.

2. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_4=$ (D)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

【解析】因为$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n$，

所以$a_2=a_1+1=2+1=3$，

$a_3=a_2+2=3+2=5$，

$a_4=a_3+3=5+3=8$.

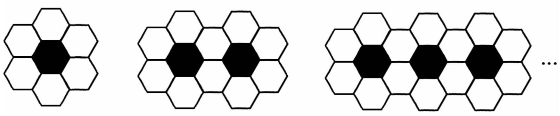
3. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2-2n+2$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为 (C)

A. $a_n=2n-3$　　B. $a_n=2n+3$

C. $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ 2n-3, n\geqslant 2\end{cases}$　　D. $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ 2n+3, n\geqslant 2\end{cases}$

【解析】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$.
当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3$.
由于 $n=1$ 时 a_1 的值不适合 $n\geqslant2$ 的解析式，故通项公式为选项 C.

4. 黑、白两种颜色的正六边形地面砖按如图所示的规律拼成若干个图案，则第 n 个图案中有白色地面砖__$4n+2$__块.



第1个　　第2个　　第3个

【解析】第 1 个图案中有白色地面砖 6 块，第 2 个图案中有白色地面砖 10 块，第 3 个图案中有白色地面砖 14 块……后一个图案总比前一个图案多 4 块白色地面砖，从而第 n 个图案中有 $4n+2$ 块白色地面砖.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}(n\geqslant2)$，则 $a_n=$__$\dfrac{1}{n(n+1)}$__.

【解析】因为 $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}(n\geqslant2)$，

所以当 $n\geqslant2$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}$.

所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}$，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{n-2}{n}$，…，$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{3}$，

以上 $n-1$ 个式子相乘得 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}$

$=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}$，

即 $\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{1}{n}\times2\times1$，所以 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$，符合 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（二）

课后作业 · 单独成册

4.2 等差数列

第 1 课时 等差数列的概念及通项公式

学习目标	核心素养
理解等差数列、等差中项的概念	数学抽象
掌握等差数列的通项公式,能运用公式解决相关问题	数学运算
掌握等差数列的判断与证明方法	逻辑推理

自主预习

知新预学

1. 等差数列的概念

一般地,如果一个数列从__第 2 项__起,每一项与它的__前一项__的差都等于__同一个常数__,那么这个数列就叫做等差数列,这个常数叫做等差数列的__公差__,公差通常用字母 d 表示.

2. 等差中项

由三个数 a,A,b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列. 这时,A 叫做 a 与 b 的等差中项,且 $a+b=$__$2A$__.

3. 等差数列的通项公式

(1)条件:等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公差为 d.

(2)通项公式:$a_n=$__$a_1+(n-1)d$__.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)数列 1,1,1,1,1 是等差数列. (√)

(2)若一个数列从第 2 项起每一项与前一项的差都是常数,则这个数列是等差数列. (×)

(3)任意两个实数都有等差中项. (√)

(4)等差数列的公差是相邻两项的差. (×)

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=4$,公差 $d=-2$,则通项公式 $a_n=$ (C)

A. $4-2n$　　B. $2n-4$

C. $6-2n$　　D. $2n-6$

3. 已知实数 m 是 1 和 5 的等差中项,则 $m=$ (C)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\pm\sqrt{5}$

C. 3　　D. ±3

4. 已知在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,$a_n=21$,$d=2$,则 $n=$__10__.

互动课堂

合作探究

探究 1 等差数列的通项公式及其应用

【例 1】在等差数列$\{a_n\}$中,

(1)若 $a_5=-1$,$a_8=2$,求 a_1 与 d;

(2)若 $a_1+a_6=12$,$a_4=7$,求 a_n.

【解析】(1)由题意知$\begin{cases}a_1+(5-1)d=-1,\\a_1+(8-1)d=2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-5,\\d=1.\end{cases}$

(2)由题意知$\begin{cases}a_1+a_1+(6-1)d=12,\\a_1+(4-1)d=7,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times2=2n-1$.

点睛 等差数列通项公式的求法与应用技巧

(1)等差数列的通项公式可由首项与公差确定,所以要求等差数列的通项公式,只需求出首项与公差即可.

(2)等差数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 中共含有四个参数,即 a_1,d,n,a_n,知道其中的任意三个数,就可以求出第四个数,这一求未知量的过程,我们通常称之为"知三求一".

(3)通项公式可变形为 $a_n=dn+(a_1-d)$,可把 a_n 看作关于自变量 n 的一次函数.

【变式训练 1】(1)已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3-4n$,则数列$\{a_n\}$的首项与公差分别是 (B)

A. 1,4　　B. $-1,-4$

C. 4,1　　D. $-4,-1$

【解析】当 $n=1$ 时,$a_1=-1$,当 $n=2$ 时,$a_2=3-4\times2=-5$,所以公差 $d=a_2-a_1=-4$.

(2)设$\{a_n\}$是等差数列,且$a_1=3,a_2+a_5=36$,则$\{a_n\}$的通项公式为____$a_n=6n-3$____.

【解析】设数列$\{a_n\}$的公差为d,$a_2+a_5=36$,所以$(a_1+d)+(a_1+4d)=36$,即$2a_1+5d=36$.因为$a_1=3$,所以$d=6$,所以通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=6n-3$.

(3)已知在等差数列$\{a_n\}$中,$a_{15}=33,a_{61}=217$.试判断153是不是这个数列中的项.如果是,是第几项?

【解析】设数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d,则$a_n=a_1+(n-1)d$.

由已知,得$\begin{cases}a_1+(15-1)d=33,\\a_1+(61-1)d=217,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-23,\\d=4.\end{cases}$

所以$a_n=-23+(n-1)\times4=4n-27$.

令$a_n=153$,即$4n-27=153$,解得$n=45\in\mathbf{N}^*$,

所以153是这个数列中的项,是第45项.

探究2 等差中项及其应用

【例2】在-1与7之间顺次插入三个数a,b,c,使这五个数成等差数列,求此数列.

【解析】因为$-1,a,b,c,7$成等差数列,

所以b是-1与7的等差中项,则$b=\dfrac{-1+7}{2}=3$.

又a是-1与3的等差中项,

所以$a=\dfrac{-1+3}{2}=1$.

又c是3与7的等差中项,

所以$c=\dfrac{3+7}{2}=5$.

所以该数列为$-1,1,3,5,7$.

点睛 等差中项的应用

若a,A,b成等差数列,则$A=\dfrac{a+b}{2}$.反之,由$A=\dfrac{a+b}{2}$也可得到a,A,b成等差数列.所以A是a,b的等差中项$\Leftrightarrow A=\dfrac{a+b}{2}$.

【变式训练2】(1)设x是a与b的等差中项,x^2是a^2与$-b^2$的等差中项,则a,b的关系是 (C)

A. $a=-b$　　B. $a=3b$

C. $a=-b$或$a=3b$　　D. $a=b=0$

【解析】由等差中项的定义知,

$x=\dfrac{a+b}{2},x^2=\dfrac{a^2-b^2}{2}$,

所以$\dfrac{a^2-b^2}{2}=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$,

即$a^2-2ab-3b^2=0$,

故$a=-b$或$a=3b$.

(2)已知$1,x,y,10$构成等差数列,则x,y的值分别为____4,7____.

【解析】由已知条件可得,x是1和y的等差中项,

即$2x=1+y$　①,

y是x和10的等差中项,

即$2y=x+10$　②,

由①②可解得$x=4,y=7$.

探究3 等差数列的判定

【例3】已知函数$f(x)=\dfrac{3x}{x+3}$,数列$\{x_n\}$的通项公式由$x_n=f(x_{n-1})(n\geqslant2$且$n\in\mathbf{N}^*)$确定.

(1)求证:数列$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是等差数列;

(2)当$x_1=\dfrac{1}{2}$时,求$x_{2\,023}$.

【解析】(1)因为$f(x)=\dfrac{3x}{x+3}$,数列$\{x_n\}$的通项公式为$x_n=f(x_{n-1})$,所以$x_n=\dfrac{3x_{n-1}}{x_{n-1}+3}$,所以$\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{3}$,所以$\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}=\dfrac{1}{3}(n\geqslant2)$,所以数列$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是等差数列.

(2)当$x_1=\dfrac{1}{2}$时,$\dfrac{1}{x_1}=2$,所以$\dfrac{1}{x_n}=2+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+5}{3}$,

所以$x_n=\dfrac{3}{n+5}$,所以$x_{2\,023}=\dfrac{3}{2\,028}=\dfrac{1}{676}$.

点睛 判断等差数列的方法

(1)定义法:$a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*)$或$a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是等差数列.

(2)等差中项法:$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$为等差数列.

(3)通项公式法:数列$\{a_n\}$的通项公式形如$a_n=pn+q$(p,q为常数)$\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$为等差数列.

[注意]①数列的前有限项成等差数列,该数列未必是等差数列.要否定一个数列是等差数列,只要说明其中连续三项不成等差数列即可.

②当$n\geqslant2$时,$a_{n+1}-a_n=d$(d为常数),无法说明数列$\{a_n\}$是等差数列,因为a_2-a_1不一定等于d.

【变式训练3】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=4,a_n=4-\dfrac{4}{a_{n-1}}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,记$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$.

(1)求证:数列$\{b_n\}$是等差数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】(1)证明:$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}-2}-\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{1}{\left(4-\dfrac{4}{a_n}\right)-2}-\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{a_n}{2(a_n-2)}-\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{a_n-2}{2(a_n-2)}=\dfrac{1}{2}$,

因为$b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{2}$,

所以数列$\{b_n\}$是首项为$\dfrac{1}{2}$,公差为$\dfrac{1}{2}$的等差数列.

(2)由(1)知$b_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n$.

因为 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$，所以 $a_n=\frac{1}{b_n}+2=\frac{2}{n}+2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{2}{n}+2$.

随堂小练

1. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+5$，则此数列是（ A ）

A. 公差为 2 的递增等差数列

B. 公差为 5 的递增等差数列

C. 首项为 7 的递减等差数列

D. 首项为 2 的递减等差数列

【解析】因为 $a_n-a_{n-1}=(2n+5)-[2(n-1)+5]=2(n\geqslant 2)$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的递增等差数列.

2. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_7-2a_4=-1$，$a_3=0$，则公差 $d=$（ B ）

A. -2 B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$ D. 2

【解析】根据题意得，

$a_7-2a_4=a_1+6d-2(a_1+3d)=-a_1=-1$，

所以 $a_1=1$.

又 $a_3=a_1+2d=1+2d=0$，

所以 $d=-\frac{1}{2}$.

3. 若 $\log_2 a$ 是 1 和 5 的等差中项，则 $a=$ <u>8</u>.

【解析】由题意知，$\log_2 a=\frac{1+5}{2}=3$，

所以 $a=2^3=8$.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_{15}=28$，$a_{60}=118$，$a_m=24$，则 $m=$ <u>13</u>.

【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，

则 $\begin{cases}a_{15}=a_1+14d=28,\\ a_{60}=a_1+59d=118,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=0,\\ d=2.\end{cases}$

令 $a_1+(m-1)d=24$，即 $0+(m-1)\times 2=24$，解得 $m=13$.

5. 已知 a,b,c 成等差数列，判断 $a^2(b+c)$，$b^2(c+a)$，$c^2(a+b)$ 是否成等差数列，并给出证明.

【解析】$a^2(b+c)$，$b^2(c+a)$，$c^2(a+b)$ 成等差数列，证明如下：

因为 a,b,c 成等差数列，所以 $a+c=2b$.

又因为 $a^2(b+c)+c^2(a+b)-2b^2(c+a)$

$=a^2c+c^2a+ab(a-2b)+bc(c-2b)$

$=a^2c+c^2a-2abc=ac(a+c-2b)=0$，

所以 $a^2(b+c)+c^2(a+b)=2b^2(c+a)$.

所以 $a^2(b+c)$，$b^2(c+a)$，$c^2(a+b)$ 成等差数列.

温馨提示：请自主完成课后作业（三）

课后作业 · 单独成册

第2课时 等差数列的性质

学习目标	核心素养
能用等差数列的定义推导等差数列的性质，能用等差数列的性质解决一些相关问题	逻辑推理、数学运算
能用等差数列的知识解决一些简单的应用问题	数学建模、数学运算

自主预习

知新预学

等差数列的项与序号的关系

若数列$\{a_n\}$是等差数列，$p,q,s,t\in\mathbf{N}^*$，且$p+q=s+t$，则$a_p+a_q=$__a_s+a_t__.

小试牛刀

1. 判断正误.（正确的打"√"，错误的打"×"）

（1）若$\{a_n\}$是等差数列，则$\{|a_n|\}$也是等差数列. （ × ）

（2）若$\{|a_n|\}$是等差数列，则$\{a_n\}$也是等差数列. （ × ）

（3）若$\{a_n\}$是等差数列，则对任意$n\in\mathbf{N}^*$都有$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$. （ √ ）

（4）若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+5$，则数列$\{a_n\}$的公差与函数$y=3x+5$图象的斜率相等. （ √ ）

2. 已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_3+a_5=9$，$a_2+a_4+a_6=15$，则$a_3+a_4=$ （ D ）

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{100}=120$，$a_{90}=100$，则公差$d=$ （ A ）

A. 2　　B. 20

C. 100　　D. 不确定

【解析】因为$a_{100}-a_{90}=10d$，

即$120-100=10d$，

所以$d=2$.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1=2$，$a_3=6$，则数列$\{2a_n-3\}$是公差为__4__的等差数列.

【解析】因为$a_3-a_1=6-2=4$，

所以$2d=4$.

即$d=2$.

所以$\{2a_n-3\}$的公差为$2d=4$.

互动课堂

合作探究

探究1 等差数列性质的应用

【例1】（1）已知数列$\{a_n\}$是等差数列，若$a_1-a_9+a_{17}=7$，则$a_3+a_{15}=$ （ B ）

A. 7　　B. 14

C. 21　　D. $7(n-1)$

【解析】因为$a_1-a_9+a_{17}=(a_1+a_{17})-a_9=2a_9-a_9=a_9=7$，

所以$a_3+a_{15}=2a_9=2\times7=14$.

（2）已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，且$a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，则数列$\{a_n+b_n\}$的第37项为 （ C ）

A. 0　　B. 37

C. 100　　D. -37

【解析】设等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公差分别为d_1,d_2，则$(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n)=(a_{n+1}-a_n)+(b_{n+1}-b_n)=d_1+d_2$，所以数列$\{a_n+b_n\}$仍然是等差数列. 又$d_1+d_2=(a_2+b_2)-(a_1+b_1)=100-(25+75)=0$，

所以$a_{37}+b_{37}=a_1+b_1=100$.

点睛 等差数列运算的两种常用思路

（1）根据已知条件，列出关于a_1,d的方程（组），确定a_1,d，然后求其他量.

（2）利用性质巧解，观察等差数列中项的序号，若满足$m+n=p+q=2r(m,n,p,q,r\in\mathbf{N}^*)$，则$a_m+a_n=a_p+a_q=2a_r$.

[注意]对于新构造的数列，要注意判断其首项和公差.

【变式训练1】（1）数列$\{a_n\}$满足$3+a_n=a_{n+1}$且$a_2+a_4+a_6=9$，则$\log_6(a_5+a_7+a_9)$的值是 （ C ）

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

【解析】由$3+a_n=a_{n+1}$，得$a_{n+1}-a_n=3$.

所以$\{a_n\}$是公差为 3 的等差数列.

又 $a_2+a_4+a_6=9$ 且 $a_2+a_6=2a_4$,

所以 $3a_4=9$,则 $a_4=3$.

所以 $a_7=a_4+3d=3+3\times3=12$,

故 $\log_6(a_5+a_7+a_9)=\log_6(3a_7)=\log_6 36=2$.

(2)已知数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是等差数列,且 $a_3=2$,$a_{15}=30$,则$a_9=$ (A)

A. 12　　B. 24

C. 16　　D. 32

【解析】令 $b_n=\frac{a_n}{n}$,由题意可知 $b_3=\frac{a_3}{3}=\frac{2}{3}$,$b_{15}=\frac{a_{15}}{15}=2$,$b_9=\frac{a_9}{9}$,由 $b_3+b_{15}=2b_9$,得$\frac{2}{3}+2=\frac{2a_9}{9}$,解得 $a_9=12$.

探究 2 等差数列中对称设项法的应用

【例 2】已知三个数成等差数列,若这三个数的和为 6,积为-24,求此数列.

【解析】设所求数列为 $a-d$,a,$a+d$,依题意得,

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=6,\\(a-d)a(a+d)=-24,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=2,\\d=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\d=-4,\end{cases}$

所以所求数列为-2,2,6 或 6,2,-2.

点睛 等差数列的设项方法和技巧

(1)当已知条件中出现与首项、公差有关的内容时,可直接设首项为 a_1,公差为 d,利用已知条件建立方程求出 a_1 和 d,即可确定此等差数列的通项公式.

(2)当已知数列有 3 项时,可设为 $a-d$,a,$a+d$,此时公差为 d;当有 5 项、7 项……时,可同理设出.

(3)当已知数列有 4 项时,可设为 $a-3d$,$a-d$,$a+d$,$a+3d$,此时公差为 $2d$;当有 6 项、8 项……时,可同理设出.

【变式训练 2】已知递增的等差数列$\{a_n\}$的前三项之和为 21,前三项之积为 231,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】方法一:根据题意,设等差数列$\{a_n\}$的前三项分别为 a_1,a_1+d,a_1+2d,则$\begin{cases}a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=21,\\a_1(a_1+d)(a_1+2d)=231,\end{cases}$

即$\begin{cases}3a_1+3d=21,\\a_1(a_1+d)(a_1+2d)=231,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=4\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=11,\\d=-4.\end{cases}$

因为数列$\{a_n\}$为递增数列,

所以$\begin{cases}a_1=3,\\d=4.\end{cases}$

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=4n-1$.

方法二:因为数列$\{a_n\}$为等差数列,所以可设前三项分别为 $a-d$,a,$a+d$,由题意得$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=21,\\(a-d)a(a+d)=231,\end{cases}$

即$\begin{cases}3a=21,\\a(a^2-d^2)=231,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=7,\\d=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=7,\\d=-4.\end{cases}$

因为数列$\{a_n\}$为递增数列,所以$\begin{cases}a=7,\\d=4.\end{cases}$

所以 $a_n=4n-1$.

探究 3 等差数列的实际应用问题

【例 3】有一批豆浆机原销售价为每台 800 元,在甲、乙两家商场均有销售.甲商场用如下的方法促销:买一台单价为 780 元,买两台单价都为 760 元,以此类推,每多买一台则所买各台单价均再减少 20 元,但每台最低价不能低于 440 元;乙商场一律都按原价的 75%销售.某单位购买一批此类豆浆机,去哪家商场买花费较少?

【解析】设该单位需购买豆浆机 n 台,在甲商场购买每台售价不低于 440 元,售价与台数 n 成等差数列.设该数列为$\{a_n\}$,

则 $a_n=780+(n-1)(-20)=800-20n$.

解不等式 $a_n\geqslant440$,即 $800-20n\geqslant440$,得 $n\leqslant18$.

当购买台数小于等于 18 时,每台售价为$(800-20n)$元,当台数大于 18 时,每台售价为 440 元.

到乙商场购买,每台售价为 $800\times75\%=600$(元).

作差:$(800-20n)n-600n=20n(10-n)$.

当 $0<n<10$ 时,$600n<(800-20n)n$;

当 $n=10$ 时,$600n=(800-20n)n$;

当 $10<n\leqslant18$ 时,$(800-20n)n<600n$;

当 $n>18$ 时,$440n<600n$.

即当购买少于 10 台时到乙商场花费较少,当购买 10 台时到两商场购买花费相同,当购买多于 10 台时到甲商场购买花费较少.

点睛 解决等差数列综合问题的方法策略

(1)结合等差数列的性质或利用等差中项;

(2)利用通项公式,得到一个以首项 a_1 和公差 d 为未知数的方程或不等式;

(3)利用函数或不等式的有关方法解决.

【变式训练 3】某公司 2022 年经销一种数码产品,获利 200 万元.从 2023 年起,预计其利润每年比上一年减少 20 万元,按照这一规律,如果公司不开发新产品,也不调整经营策略,从哪一年起,该公司经销这一产品将亏损?

【解析】记 2022 年为第 1 年,由题设可知第 1 年获利 200 万元,第 2 年获利 180 万元,第 3 年获利 160 万元,以此类推,则每年的获利构成等差数列$\{a_n\}$,且当 $a_n<0$ 时,该公司经销此产品将亏损.

设第 n 年的利润为 a_n,

因为 $a_1=200$，公差 $d=-20$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=220-20n$.

由题意知数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，令 $a_n<0$，

即 $a_n=220-20n<0$，得 $n>11$，

即从第 12 年起，也就是从 2033 年开始，该公司经销此产品将亏损.

随堂小练

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4+a_8=10$，$a_{10}=6$，则公差 $d=$（ A ）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. $-\frac{1}{2}$

【解析】因为 $a_4+a_8=10$，所以 $a_6=5$.

又 $a_{10}=6$，所以 $d=\frac{a_{10}-a_6}{4}=\frac{1}{4}$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为等差数列，且公差分别为 $d_1=2$，$d_2=1$，则数列 $\{2a_n-3b_n\}$ 的公差为（ D ）

A. 7　　B. 5

C. 3　　D. 1

【解析】因为 $\{2a_n-3b_n\}$ 是等差数列，

则 $d=2a_{n+1}-3b_{n+1}-(2a_n-3b_n)=2a_{n+1}-2a_n-3b_{n+1}+3b_n=2(a_{n+1}-a_n)-3(b_{n+1}-b_n)=2d_1-3d_2=1$.

3. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_6+a_{10}=1$，则 $a_6=$ $\underline{\frac{1}{3}}$，$a_4+a_8=$ $\underline{\frac{2}{3}}$.

【解析】根据等差数列的性质，可得 $a_2+a_{10}=a_4+a_8=2a_6$，由 $a_2+a_6+a_{10}=1$，得 $3a_6=1$，所以 $a_6=\frac{1}{3}$. 所以 $a_4+a_8=2a_6=\frac{2}{3}$.

4. 假设某市 2022 年新建住房 400 万平方米，预计在以后的若干年内，该市每年新建住房面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么该市从__2031__年开始新建住房的面积大于 820 万平方米.

【解析】设从 2022 年年底开始，n 年后该市每年新建住房的面积为 a_n 万平方米. 由题意，得 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1=450$，公差 $d=50$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=400+50n$. 令 $400+50n>820$，解得 $n>\frac{42}{5}$. 由于 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $n\geqslant 9$. 所以该市从 2031 年开始新建住房的面积大于 820 万平方米.

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_5+a_7=4$，$a_6+a_8=-2$，则该数列的正数项共有__6__项.

【解析】因为 $a_5+a_7=2a_6=4$，$a_6+a_8=2a_7=-2$，

所以 $a_6=2$，$a_7=-1$，所以 $d=a_7-a_6=-3$.

所以 $a_n=a_6+(n-6)d=2+(n-6)\times(-3)=-3n+20$.

令 $a_n>0$，解得 $n<\frac{20}{3}$，即 $n=1,2,3,\cdots,6$，故该数列的正数项共有 6 项.

温馨提示：请自主完成课后作业（四）

课后作业 · 单独成册

第3课时 等差数列的前 n 项和公式

学习目标	核心素养
了解等差数列前 n 项和公式的推导方法	逻辑推理、数学运算
掌握等差数列前 n 项和的性质及其应用	数学运算
会用等差数列的前 n 项和公式解决相关实际问题	数学建模、数学运算

自主预习

知新预学

等差数列的前 n 项和公式

已知量	首项、末项与项数	首项、公差与项数
求和公式	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$	$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)已知等差数列的首项、公差,可求 S_{10}. (√)

(2)已知等差数列的首项、末项 a_{17},可求 S_{17}. (√)

(3)若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_{10}+S_{20}=S_{30}$. (×)

(4)公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 成立的条件是 $n\in\mathbf{N}^*$. (×)

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=2,d=2$,则 $S_{20}=$ (B)

A. 230 B. 420 C. 450 D. 540

【解析】$S_{20}=20a_1+\dfrac{20\times19}{2}d=20a_1+190d=20\times2+190\times2=420$.

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $a_1=2,S_3=12$,则 $a_6=$ (C)

A. 8 B. 10 C. 12 D. 14

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由等差数列的前 n 项和公式,得 $S_3=3\times2+\dfrac{3\times2}{2}d=12$,解得 $d=2$. 则 $a_6=a_1+(6-1)d=2+5\times2=12$.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,若 $a_1=15,a_5=25$,则 $S_5=$ <u>100</u>.

【解析】$S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=\dfrac{5(15+25)}{2}=100$.

互动课堂

合作探究

探究1 等差数列前 n 项和的有关计算

【例1】在等差数列 $\{a_n\}$ 中,

(1)已知 $a_3=16,S_{20}=20$,求 S_{10};

(2)已知 $a_2+a_4=\dfrac{48}{5}$,求 S_5.

【解析】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则有

$$\begin{cases}a_1+2d=16,\\ 20a_1+\dfrac{20(20-1)}{2}d=20,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a_1=20,\\ d=-2.\end{cases}$$

所以 $S_{10}=10\times20+\dfrac{10\times9\times(-2)}{2}=200-90=110$.

(2)方法一:因为 $a_2+a_4=a_1+d+a_1+3d=\dfrac{48}{5}$,所以 $a_1+2d=\dfrac{24}{5}$. 所以 $S_5=5a_1+10d=5(a_1+2d)=5\times\dfrac{24}{5}=24$.

方法二:因为 $a_2+a_4=a_1+a_5$,所以 $a_1+a_5=\dfrac{48}{5}$,

所以 $S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{48}{5}=24$.

点睛 等差数列中的基本计算

(1)利用基本量求值

等差数列的通项公式与前 n 项和公式中有五个量 a_1,d,n,a_n,S_n,这五个量可以"知三求二". 一般是利用公式列出关于基本量 a_1 和 d 的方程组,解出 a_1 和 d 便可解决问题. 解题时注意整体代换思想的应用.

(2)结合等差数列的性质解题

等差数列的常用性质:若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_m+a_n=a_p+a_q$,常与求和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 结合使用.

【变式训练1】在等差数列 $\{a_n\}$ 中,

(1)$a_1=1,a_4=7$,求 S_9;

(2)$a_1=4$,$S_8=172$,求 a_8 和 d;

(3)$a_1=\frac{5}{6}$,$a_n=-\frac{3}{2}$,$S_n=-5$,求 n 和 d.

【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_4=a_1+3d=1+3d=7$,所以 $d=2$. 故 $S_9=9a_1+\frac{9\times8}{2}d=9+\frac{9\times8}{2}\times2=81$.

(2)由已知得 $S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8(4+a_8)}{2}=172$,

解得 $a_8=39$.

又因为 $a_8=4+(8-1)d=39$,所以 $d=5$.

所以 $a_8=39$,$d=5$.

(3)由题意得,$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{2}\right)}{2}=-5$,

解得 $n=15$.

又 $a_{15}=\frac{5}{6}+(15-1)d=-\frac{3}{2}$,

所以 $d=-\frac{1}{6}$. 所以 $n=15$,$d=-\frac{1}{6}$.

探究 2 等差数列前 n 项和的性质

【例 2】(1)已知等差数列前 3 项的和为 30,前 6 项的和为 100,则它的前 9 项的和为 (C)

A. 130　　B. 170

C. 210　　D. 260

【解析】利用等差数列的性质可得:S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等差数列.

所以 $S_3+(S_9-S_6)=2(S_6-S_3)$,

即 $30+(S_9-100)=2(100-30)$,解得 $S_9=210$.

(2)已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2n+1$,其前 n 项和为 S_n,则数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前 10 项和为__75__.

【解析】因为 $a_n=2n+1$,所以 $a_1=3$.

所以 $S_n=\frac{n(3+2n+1)}{2}=n^2+2n$.

所以$\frac{S_n}{n}=n+2$.

所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是公差为 1,首项为 3 的等差数列,

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前 10 项和为 $3\times10+\frac{10\times9}{2}\times1=75$.

点睛 等差数列前 n 项和的常用性质

(1)等差数列的连续 n 项的和仍成等差数列,即 S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}$,…是等差数列.

(2)数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,公差为数列$\{a_n\}$的公差的$\frac{1}{2}$.

(3)若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等差数列,且前 n 项和分别为 S_n 与 S'_n,则$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{S'_{2n-1}}$.

【变式训练 2】(1)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $S_3=9$,$S_6=36$,则 $a_7+a_8+a_9=$__45__.

【解析】数列$\{a_n\}$为等差数列,则 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 为等差数列,即 $2(S_6-S_3)=S_3+(S_9-S_6)$. 因为 $S_3=9$,$S_6-S_3=27$,所以 $S_9-S_6=45$. 所以 $a_7+a_8+a_9=S_9-S_6=45$.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,$S_{10}=120$,且在这 10 项中,$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{11}{13}$,则公差 $d=$__2__.

【解析】由$\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=120,\\ \frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{11}{13}\end{cases}$解得$\begin{cases}S_{奇}=55,\\ S_{偶}=65.\end{cases}$所以 $S_{偶}-S_{奇}=5d=10$,所以 $d=2$.

探究 3 等差数列前 n 项和的最值问题

【例 3】在等差数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=25$ 且 $S_9=S_{17}$,求 S_n 的最大值.

【解析】因为 $S_9=S_{17}$,$a_1=25$,

所以 $9\times25+\frac{9\times(9-1)}{2}d=17\times25+\frac{17\times(17-1)}{2}d$,

解得 $d=-2$.

所以 $S_n=25n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+26n=-(n-13)^2+169$.

所以当 $n=13$ 时,S_n 有最大值为 169.

点睛 求等差数列前 n 项和 S_n 的最值的方法

(1)函数法

将 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 配方,转化为求二次函数的最值问题,借助函数的单调性来解决,体现了函数思想.

(2)通项法

若 $a_1>0$,$d<0$,则数列的所有正数项之和最大;

若 $a_1<0$,$d>0$,则数列的所有负数项之和最小.

【变式训练 3】在等差数列$\{a_n\}$中,$a_{10}=18$,前 5 项的和 $S_5=-15$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和的最小值,并指出何时取最小值.

【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为在等差数列$\{a_n\}$中,$a_{10}=18$,前 5 项的和 $S_5=-15$,

所以$\begin{cases}a_1+9d=18,\\ 5a_1+\frac{5\times4}{2}\times d=-15,\end{cases}$解得 $a_1=-9$,$d=3$,

所以 $a_n=3n-12$.

(2)因为 $a_1=-9$,$d=3$,$a_n=3n-12$,

所以 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{1}{2}(3n^2-21n)$

$=\frac{3}{2}\left(n-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{147}{8}$，

所以当 $n=3$ 或 4 时，前 n 项和 S_n 取得最小值 $S_3=S_4=-18$.

探究 4 等差数列前 n 项和的实际应用

【例 4】某人用分期付款的方式购买一件家电，价格为 1 150 元，购买当天先付 150 元，以后每月的这一天都交付 50 元，并加付欠款利息，月利率为 1%. 若交付 150 元后的一个月开始算分期付款的第一个月，则分期付款的第 10 个月该交付多少钱？全部贷款付清后，买这件家电实际花费多少钱？

【解析】因购买家电时付了 150 元，则欠款 1 000 元，依题意需分 20 次付款，则每次付款的数额顺次构成数列$\{a_n\}$. 设每次交款数额依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}$，

则 $a_1=50+1\ 000\times1\%=60$，

$a_2=50+(1\ 000-50)\times1\%=59.5$，

……

$a_{10}=50+(1\ 000-9\times50)\times1\%=55.5$，

即第 10 个月应付款 55.5 元.

由于$\{a_n\}$是以 60 为首项，-0.5 为公差的等差数列，

所以有 $S_{20}=\frac{60+(60-19\times0.5)}{2}\times20=1\ 105$.

即全部贷款付清后，买这件家电实际付款 $1\ 105+150=1\ 255$(元).

点睛 建立等差数列的模型时，要根据题意找准首项、公差和项数或者首项、末项和项数.

【变式训练 4】甲、乙两物体分别从相距 70 m 的两处同时相向运动，甲第 1 分钟走 2 m，以后每分钟比前 1 分钟多走 1 m，乙每分钟走 5 m.

(1)甲、乙开始运动后几分钟相遇？

(2)如果甲、乙到达对方起点后立即返回，甲继续每分钟比前 1 分钟多走 1 m，乙继续每分钟走 5 m，那么开始运动几分钟后第 2 次相遇？

【解析】(1)设开始运动 n 分钟后第 1 次相遇，由题意，得 $2n+\frac{n(n-1)}{2}+5n=70$，

整理得 $n^2+13n-140=0$，解得 $n=7$，$n=-20$(舍去).

所以第 1 次相遇是在开始运动后 7 分钟.

(2)设开始运动 n 分钟后第 2 次相遇，由题意，

得 $2n+\frac{n(n-1)}{2}+5n=3\times70$，

整理得 $n^2+13n-420=0$，

解得 $n=15$，$n=-28$(舍去).

所以第 2 次相遇是在开始运动后 15 分钟.

随堂小练

1. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=\frac{1}{2}$，$S_4=20$，则 $S_6=$ (D)

A. 16　　B. 24

C. 36　　D. 48

【解析】设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $S_n=\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}d$，

所以 $S_4=2+6d=20$. 所以 $d=3$.

所以 $S_6=3+15d=48$.

2. (**多选题**)在等差数列$\{a_n\}$中，$d=2$，$a_n=11$，$S_n=35$，则 a_1 的值可能是 (AB)

A. -1　　B. 3

C. 5　　D. 7

【解析】由题意知 $a_1+(n-1)\times2=11$ ①，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times2=35$ ②，由①②解得 $a_1=3$ 或 $a_1=-1$.

3. 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_1=-2$，$a_2+a_6=2$，则 $S_{10}=$__25__.

【解析】通解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则由 $a_2+a_6=2$，得 $a_1+d+a_1+5d=2$，即 $-4+6d=2$，解得 $d=1$，所以 $S_{10}=10\times(-2)+\frac{10\times9}{2}\times1=25$.

优解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，因为 $a_2+a_6=2a_4=2$，所以 $a_4=1$，所以 $d=\frac{a_4-a_1}{4-1}=\frac{1-(-2)}{3}=1$，所以 $S_{10}=10\times(-2)+\frac{10\times9}{2}\times1=25$.

4. 已知在等差数列$\{a_n\}$中，

(1)$a_1=\frac{3}{2}$，$d=-\frac{1}{2}$，$S_n=-15$，求 n 及通项公式 a_n；

(2)$a_1=20$，$a_n=54$，$S_n=666$，求 d 及 n.

【解析】(1)因为 $S_n=\frac{3}{2}n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-15$，整理得 $n^2-7n-60=0$，解得 $n=12$ 或 $n=-5$(舍去).

所以 $a_n=\frac{3}{2}+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2-\frac{1}{2}n$.

所以 $n=12$，$a_n=2-\frac{n}{2}$.

(2)由 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(20+54)}{2}=666$，解得 $n=18$. 由 $a_n=a_1+(n-1)d$，即 $54=20+(18-1)d$，解得 $d=2$. 所以 $d=2$，$n=18$.

温馨提示：请自主完成课后作业(五、六)

课后作业 · 单独成册

4.3 等比数列

第 1 课时 等比数列的概念及通项公式

学习目标	核心素养
理解等比数列的定义,并能运用通项公式解决相关问题	数学抽象、数学运算
理解等比中项的概念	数学运算
掌握等比数列的判定与证明方法	逻辑推理

自主预习

知新预学

1. 等比数列的概念

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的比都等于__同一个常数__,那么这个数列叫做等比数列,这个常数叫做等比数列的__公比__,公比通常用字母 $q(q\neq0)$ 表示.

2. 等比中项

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G,使 a,G,b 成__等比数列__,那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项. 此时,$G^2=ab$.

3. 等比数列的通项公式

首项为 a_1,公比为 $q(q\neq0)$ 的等比数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$__a_1q^{n-1}__.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)数列 $1,-1,1,-1,\cdots$ 是等比数列. (√)

(2)若一个数列从第 2 项起每一项与前一项的比为常数,则该数列为等比数列. (×)

(3)等比数列的首项不能为零,但公比可以为零. (×)

(4)常数列一定为等比数列. (×)

(5)任何两个数都有等比中项. (×)

2. 两个数 4 和 9 的等比中项是 (B)

A. 6　　B. ±6

C. $\frac{13}{2}$　　D. $\pm\frac{13}{2}$

【解析】设 4 和 9 的等比中项为 a,则 $a^2=4\times9$,所以 $a=\pm6$.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=\frac{1}{2}$,$q=\frac{1}{2}$,$a_n=\frac{1}{32}$,则项数 n 为 (C)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【解析】$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

又 $a_n=\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$,所以 $n=5$.

4. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_4=27$,$q=-3$,则 $a_7=$__-729__.

【解析】$a_4=a_1q^3=a_1(-3)^3=27$,故 $a_1=-1$.

所以 $a_7=a_1q^6=-1\times(-3)^6=-729$.

互动课堂

合作探究

探究 1　等比数列的通项公式

【例 1】在等比数列$\{a_n\}$中,

(1)$a_1=1$,$a_4=8$,求 a_n;

(2)$a_4=625$,$q=5$,求 a_1;

(3)$a_2+a_5=18$,$a_3+a_6=9$,$a_n=1$,求 n.

【解析】(1)因为 $a_4=a_1q^3$,所以 $8=q^3$,所以 $q=2$.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

(2)$a_1=\frac{a_n}{q^{n-1}}=\frac{625}{5^{4-1}}=5$,故 $a_1=5$.

(3)因为 $\begin{cases}a_2+a_5=a_1q+a_1q^4=18 & ①,\\ a_3+a_6=a_1q^2+a_1q^5=9 & ②,\end{cases}$

由 $\frac{②}{①}$ 得 $q=\frac{1}{2}$,从而 $a_1=32$.

又 $a_n=1$,所以 $32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1$,即 $2^{6-n}=2^0$,

故 $n=6$.

点睛 等比数列通项公式的求法

(1)根据已知条件,建立关于 a_1,q 的方程组,求出 a_1,q 后再求 a_n,这是常规方法.

(2)充分利用各项之间的关系,直接求出 q 后,再求 a_1,最后求 a_n,这种方法带有一定的技巧性,能简化运算.

【变式训练 1】(1)(多选题)若$\{a_n\}$为等比数列且 $2a_4=a_6-a_5$,则公比 $q=$ (BC)

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q，显然$a_1q\neq 0$. 由已知得$2a_1q^3=a_1q^5-a_1q^4$，即$2=q^2-q$，解得$q=-1$或$q=2$.

(2)等比数列$\{a_n\}$满足：公比$q=-2$，$a_p=48$，$a_{2p-3}=192$，则该数列的通项公式$a_n=$__$3\cdot(-2)^{n-1}$__.

【解析】依题意，有$\begin{cases}a_1(-2)^{p-1}=48 & ①,\\ a_1(-2)^{2p-4}=192 & ②,\end{cases}$

①^2÷②，化简得$a_1=3$.

故$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$.

(3)已知$\{a_n\}$是等比数列，其中$a_7=1$且a_4，a_5+1，a_6成等差数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】方法一：设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为$q(q\neq 0)$，由$a_7=a_1q^6=1$，得$a_1=q^{-6}$，从而$a_4=a_1q^3=q^{-3}$，$a_5=a_1q^4=q^{-2}$，$a_6=a_1q^5=q^{-1}$.

因为a_4，a_5+1，a_6成等差数列，

所以$a_4+a_6=2(a_5+1)$，

即$q^{-3}+q^{-1}=2(q^{-2}+1)$，

即$q^{-1}(q^{-2}+1)=2(q^{-2}+1)$，

因为$q^{-2}+1>0$，所以$q=\frac{1}{2}$.

故$a_n=a_1q^{n-1}=q^{-6}\cdot q^{n-1}=q^{n-7}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-7}=\frac{1}{2^{n-7}}$.

方法二：设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为$q(q\neq 0)$，

由已知$a_7=1$且a_4，a_5+1，a_6成等差数列，

知a_4，a_5+a_7，a_6成等差数列，所以$q=\frac{a_7+a_5}{a_6+a_4}=\frac{1}{2}$，

于是$a_n=a_1q^{n-1}=a_7q^{n-7}=q^{n-7}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-7}=\frac{1}{2^{n-7}}$.

探究 2 等比中项及其应用

【例 2】已知a，$-\frac{3}{2}$，b，$-\frac{243}{32}$，c这五个数成等比数列，求a，b，c的值.

【解析】由题意知$b^2=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{243}{32}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^6$，

所以$b=\pm\frac{27}{8}$.

当$b=\frac{27}{8}$时，$ab=\left(-\frac{3}{2}\right)^2$，解得$a=\frac{2}{3}$；

$bc=\left(-\frac{243}{32}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^{10}$，解得$c=\left(\frac{3}{2}\right)^7$.

同理，当$b=-\frac{27}{8}$时，$a=-\frac{2}{3}$，$c=-\left(\frac{3}{2}\right)^7$.

综上所述，a，b，c的值分别为$\frac{2}{3}$，$\frac{27}{8}$，$\left(\frac{3}{2}\right)^7$或$-\frac{2}{3}$，$-\frac{27}{8}$，$-\left(\frac{3}{2}\right)^7$.

点睛 应用等比中项解题的两个注意点

(1)要证三个数a，G，b成等比数列，只需证明$G^2=ab$即可，其中a，b，G均不为零；

(2)已知等比数列中的相邻三项a_{n-1}，a_n，a_{n+1}，则a_n是a_{n-1}与a_{n+1}的等比中项，即$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$，运用等比中项解决问题，会大大减少运算过程.

【变式训练 2】(1)在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=-16$，$a_4=8$，则$a_7=$　　(A)

A. -4　　B. ± 4

C. -2　　D. ± 2

【解析】因为a_4是a_1与a_7的等比中项，所以$a_4^2=a_1a_7$，即$64=-16a_7$，故$a_7=-4$.

(2)已知等比数列$\{a_n\}$的前三项依次为$a-1$，$a+1$，$a+4$，则$a_n=$__$4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$__.

【解析】由题意，知$(a+1)^2=(a-1)(a+4)$，解得$a=5$，所以$q=\frac{a+1}{a-1}=\frac{5+1}{5-1}=\frac{3}{2}$. 又$a_1=a-1=4$，所以数列$\{a_n\}$是首项为4，公比为$\frac{3}{2}$的等比数列，所以$a_n=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

探究 3 等比数列的判定

【例 3】已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和且$S_n=2a_n+n-4$.

(1)求a_1的值；

(2)若$b_n=a_n-1$，求证：数列$\{b_n\}$为等比数列.

【解析】(1)因为$S_n=2a_n+n-4$，

所以当$n=1$时，$S_1=2a_1+1-4$，

解得$a_1=3$.

(2)因为$S_n=2a_n+n-4$，

所以当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-1)-4$，

$S_n-S_{n-1}=(2a_n+n-4)-(2a_{n-1}+n-5)$，

即$a_n=2a_{n-1}-1$，

所以$a_n-1=2(a_{n-1}-1)$.

又$b_n=a_n-1$，所以$b_n=2b_{n-1}$.

且$b_1=a_1-1=2\neq 0$，

所以数列$\{b_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列.

点睛 判断一个数列是等比数列的常用方法

(1)定义法：若数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q为常数且不为零)或$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$($n\geq 2$，q为常数且不为零)，则数列$\{a_n\}$是等比数列.

(2)通项公式法：若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$($a_1\neq 0$，$q\neq 0$)，则数列$\{a_n\}$是等比数列.

(3)等比中项法：若$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$($n\in\mathbf{N}^*$且$a_{n+1}\neq 0$)，则数列$\{a_n\}$为等比数列.

(4)构造法：当条件中出现$a_{n+1}=ka_n+b$的关系时，往往构造成$a_{n+1}+x=k(a_n+x)$的形式，将其与$a_{n+1}=ka_n+b$对照，求出x即可.

【变式训练 3】在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_{n+1}=4a_n-3n+1$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求证:数列$\{a_n-n\}$是等比数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】(1)证明:由$a_{n+1}=4a_n-3n+1$,得$a_{n+1}-(n+1)=4(a_n-n)$,$n\in\mathbf{N}^*$.

因为$a_1-1=1\neq0$,所以$a_n-n\neq0$.所以$\dfrac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=4$,所以数列$\{a_n-n\}$是首项为1,公比为4的等比数列.

(2)由(1)可知$a_n-n=4^{n-1}$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=4^{n-1}+n$.

随堂小练

1.已知$\{a_n\}$是等比数列,$a_2=2$,$a_5=\dfrac{1}{4}$,则公比$q=$ (A)

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.$-\dfrac{1}{2}$

C.2　　D.-2

【解析】因为$a_2=a_1q=2$ ①,$a_5=a_1q^4=\dfrac{1}{4}$ ②,

由②÷①得$q^3=\dfrac{1}{8}$,所以$q=\dfrac{1}{2}$.

2.(**多选题**)若1,a,3成等差数列,1,b,4成等比数列,则$\dfrac{a}{b}$的值可以为 (AB)

A.1　　B.-1

C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$-\dfrac{1}{2}$

【解析】由1,a,3成等差数列,

得$2a=4$,即$a=2$.

由1,b,4成等比数列,得$b^2=4$,

即$b=\pm2$,则$\dfrac{a}{b}=\pm1$.

3.在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=2$,$a_3a_5=64$,则$\dfrac{a_5+a_6}{a_1+a_2}=$ (C)

A.4　　B.8

C.16　　D.64

【解析】因为在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=2$,$a_3a_5=64$.

所以$\begin{cases}a_1q=2,\\a_1q^2\cdot a_1q^4=64,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\q=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-1,\\q=-2,\end{cases}$

所以$\dfrac{a_5+a_6}{a_1+a_2}=\dfrac{a_1q^4+a_1q^5}{a_1+a_1q}=q^4=16$.

4.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,点(a_n,a_{n+1})在直线$y=2x$上,则$a_4=$__8__.

【解析】因为点(a_n,a_{n+1})在直线$y=2x$上,所以$a_{n+1}=2a_n$.

因为$a_1=1\neq0$,所以$a_n\neq0$,

所以$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,

所以$a_4=1\times2^3=8$.

5.已知$\{a_n\}$为等比数列,$a_1=-\dfrac{16}{9}$,$a_3=-4$,且公比为正数.

(1)写出等比数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)$-\dfrac{81}{4}$是否为数列$\{a_n\}$中的项?若是,是第几项?若不是,请说明理由.

【解析】(1)设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$,

由$a_3=a_1q^2$,得$-4=-\dfrac{16}{9}q^2$,解得$q=\dfrac{3}{2}$,

所以$a_n=-\dfrac{16}{9}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$.

(2)令$-\dfrac{16}{9}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=-\dfrac{81}{4}$,

得$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{81}{4}\times\dfrac{9}{16}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^6$,

解得$n=7$.

故$-\dfrac{81}{4}$是数列$\{a_n\}$中的项,是第7项.

温馨提示:请自主完成课后作业(七)

课后作业·单独成册

第 2 课时 等比数列的性质及应用

学习目标	核心素养
能够运用等比数列的性质解决有关问题	数学运算
能够运用等比数列的知识解决简单的实际问题	数学建模、数学运算

自主预习

知新预学

1. 等比数列的单调性

(1)当 $a_1>0,q>1$ 或 $a_1<0,0<q<1$ 时,等比数列为__递增__数列;

(2)当 $a_1>0,0<q<1$ 或 $a_1<0,q>1$ 时,等比数列为__递减__数列;

(3)当 $q=1$ 时,等比数列为__常__数列;

(4)当 $q<0$ 时,等比数列为摆动数列.

2. 等比数列的项与序号的关系

两项关系	$a_n=a_m\cdot$ __q^{n-m}__$(n,m\in\mathbf{N}^*)$
多项关系	若$\{a_n\}$为等比数列,且 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_m\cdot a_n=$__$a_p\cdot a_q$__

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)当 $q>1$ 时,$\{a_n\}$为递增数列. (×)

(2)当 $q=1$ 时,$\{a_n\}$为常数列. (√)

(3)已知$\{a_n\}$是等比数列,若 $m+n=p$,则 $a_ma_n=a_p$. (×)

(4)若等比数列$\{a_n\}$的公比是 q,则 $a_n=a_mq^{m-n}(m,n\in\mathbf{N}^*)$. (×)

2. 对任意等比数列$\{a_n\}$,下列说法一定正确的是 (D)

A. a_1,a_3,a_9 成等比数列

B. a_2,a_3,a_6 成等比数列

C. a_2,a_4,a_8 成等比数列

D. a_3,a_6,a_9 成等比数列

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_2=1,a_3+a_4=9$,那么 $a_4+a_5=$ (B)

A. 27　　B. 27 或 −27

C. 81　　D. 81 或 −81

【解析】$\dfrac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=\dfrac{(a_1+a_2)q^2}{a_1+a_2}=q^2=9$,所以 $q=\pm3$. 所以 $a_4+a_5=(a_3+a_4)\cdot q=\pm27$.

4. 已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=4,a_7=\dfrac{1}{16}$,则 $a_3a_6+a_4a_5$ 的值是__$\dfrac{1}{2}$__.

【解析】$a_3a_6+a_4a_5=a_2a_7+a_2a_7=2a_2a_7=2\times4\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{2}$.

互动课堂

合作探究

探究 1 等比数列性质的应用

【例 1】(1)已知公比为$\sqrt[3]{2}$的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数,且 $a_3a_{11}=16$,则 $\log_2a_{16}=$ (B)

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

【解析】因为 $a_3a_{11}=16$,所以 $a_7^2=16$. 又因为 $a_n>0$,所以 $a_7=4$,所以 $a_{16}=a_7q^9=32$,即 $\log_2a_{16}=5$.

(2)已知在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,$a_1a_2a_3=5$,$a_7a_8a_9=10$,则 $a_4a_5a_6=$__$5\sqrt{2}$__.

【解析】方法一:因为$\{a_n\}$是等比数列,

所以 $a_1a_7=a_4^2,a_2a_8=a_5^2,a_3a_9=a_6^2$.

所以 $a_4^2\cdot a_5^2\cdot a_6^2=(a_1a_7)\cdot(a_2a_8)\cdot(a_3a_9)=(a_1a_2a_3)\cdot(a_7a_8a_9)=5\times10=50$.

因为 $a_n>0$,所以 $a_4a_5a_6=5\sqrt{2}$.

方法二:因为 $a_1a_2a_3=(a_1a_3)a_2=a_2^2\cdot a_2=a_2^3=5$,

所以 $a_2=5^{\frac{1}{3}}$.

因为 $a_7a_8a_9=(a_7a_9)a_8=a_8^3=10$,所以 $a_8=10^{\frac{1}{3}}$.

同理 $a_4a_5a_6=a_5^3=(a_5^2)^{\frac{3}{2}}=(a_2a_8)^{\frac{3}{2}}=(5^{\frac{1}{3}}\cdot10^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}=50^{\frac{1}{2}}=5\sqrt{2}$.

点睛 利用等比数列的性质解题的基本思路

(1)充分发挥项的下标的指导作用,分析等比数列项与项之间的关系,选择恰当的性质解题;

(2)在等比数列的有关运算中,常常涉及次数较高的指数运算,如果建立关于 a_1,q 的方程组求解,那么解起来很麻烦.

此时,常利用等比数列的性质求解,可使问题简单明了.

[注意]在应用等比数列的性质解题时,需时刻注意等比数列性质成立的前提条件.

【变式训练 1】(1)在等比数列$\{a_n\}$中,若$a_n>0$,且$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$,则$a_3+a_5=$__5__.

【解析】因为$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$,所以$a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=25$.即$(a_3+a_5)^2=25$.又因为$a_n>0$,所以$a_3+a_5=5$.

(2)若等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且$a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$,则$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$__50__.

【解析】根据等比数列的性质可得$a_{10}a_{11}=a_9a_{12}$,所以$a_{10}a_{11}=e^5$. $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=10\ln(a_1a_{20})=10\ln(a_{10}a_{11})=10\ln e^5=50$.

探究 2 灵活设未知项求解等比数列

【例 2】有四个实数,前三个数依次成等比数列,它们的积是-8;后三个数依次成等差数列,它们的积为-80,求出这四个数.

【解析】由题意设这四个数分别为$\frac{b}{q}$,b,bq,a,

则有$\begin{cases}b^3=-8,\\2bq=a+b,\\ab^2q=-80,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=10,\\b=-2,\\q=-2\end{cases}$或$\begin{cases}a=-8,\\b=-2,\\q=\frac{5}{2}.\end{cases}$

所以这四个数分别为$1,-2,4,10$或$-\frac{4}{5},-2,-5,-8$.

点睛 灵活设项求解等比数列的技巧

(1)三个数成等比数列,一般可设为$\frac{a}{q}$,a,aq.

(2)四个数成等比数列,一般可设为$\frac{a}{q^3}$,$\frac{a}{q}$,aq,aq^3或a,aq,aq^2,aq^3,但前一种设法的公比为q^2,只适合数列的各项同正或同负.

(3)五个数成等比数列,一般可设为$\frac{a}{q^2}$,$\frac{a}{q}$,a,aq,aq^2.

【变式训练 2】若有四个数成等比数列,将这四个数分别减去1,1,4,13后所得的数成等差数列,求这四个数.

【解析】设所求的数为a,aq,aq^2,aq^3,

则$a-1,aq-1,aq^2-4,aq^3-13$成等差数列.

所以$\begin{cases}(a-1)+(aq^2-4)=2(aq-1),\\(aq-1)+(aq^3-13)=2(aq^2-4),\end{cases}$

所以$\begin{cases}a(q-1)^2=3,\\aq(q-1)^2=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\q=2.\end{cases}$

因此这四个数为3,6,12,24.

探究 3 等比数列的实际应用问题

【例 3】从盛满$a(a>1)$L纯酒精的容器里倒出1 L,然后添满水摇匀,再倒出1 L混合溶液后又用水添满摇匀,如此继续下去,问:

(1)第n次操作后溶液的浓度是多少?

(2)当$a=2$时至少应操作几次后才能使溶液的浓度低于10%?

【解析】(1)由题意知开始时溶液的浓度为1,设第n次操作后溶液的浓度为a_n,则第1次操作后溶液的浓度为$a_1=1-\frac{1}{a}$,第$(n+1)$次操作后溶液的浓度为$a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{a}\right)$,

所以$\{a_n\}$是首项为$1-\frac{1}{a}$,公比为$1-\frac{1}{a}$的等比数列,

所以$a_n=a_1q^{n-1}=\left(1-\frac{1}{a}\right)^n$,

即第n次操作后溶液的浓度是$\left(1-\frac{1}{a}\right)^n$.

(2)当$a=2$时,

由$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{10}(n\in\mathbf{N}^*)$,解得$n\geq4(n\in\mathbf{N}^*)$.

故至少应操作4次后才能使溶液的浓度低于10%.

点睛 处理有关等比数列的实际应用问题时,关键是认真分析题意,建立适当的等比数列模型,再进一步利用等比数列的有关知识解决.

【变式训练 3】某工厂2022年7月的生产总值为a万元,计划从2022年8月起,每月生产总值比上个月增长$m\%$,那么到2023年12月底该厂的生产总值为多少万元?

【解析】设从2022年7月开始,该厂第n个月的生产总值是a_n万元,则$a_{n+1}=a_n+a_nm\%$,

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+m\%$.

所以数列$\{a_n\}$是首项$a_1=a$,公比$q=1+m\%$的等比数列.

所以$a_n=a(1+m\%)^{n-1}$.

所以到2023年12月底该厂的生产总值为$a_{18}=a(1+m\%)^{18-1}=a(1+m\%)^{17}$(万元).

随堂小练

1. 在等比数列$\{a_n\}$中,若$a_1<0$,$a_2=18$,$a_4=8$,则公比$q=$ (C)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$或$-\frac{2}{3}$

【解析】因为$a_4=a_2\cdot q^2$,所以$q^2=\frac{a_4}{a_2}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.

又因为$a_1<0$,$a_2>0$,

所以$q<0$,所以$q=-\frac{2}{3}$.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,若$a_2a_3a_6a_9a_{10}=32$,则$\frac{a_9^2}{a_{12}}=$ (B)

A. 4　　B. 2　　C. -2　　D. -4

【解析】由 $a_2a_3a_6a_9a_{10}=(a_2a_{10})\cdot(a_3a_9)\cdot a_6=a_6^5=32=2^5$，得 $a_6=2$.

则 $\frac{a_9^2}{a_{12}}=\frac{a_6a_{12}}{a_{12}}=a_6=2$.

3. 已知等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1a_6=a_3$，$a_4+a_5=\frac{3}{2}$，则 $a_1=$ (D)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 4　　D. 8

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

因为 $a_1a_6=a_3$，$a_4+a_5=\frac{3}{2}$，

所以 $a_1^2q^5=a_1q^2$，$a_1q^3(1+q)=\frac{3}{2}$，

解得 $q=\frac{1}{2}$，$a_1=8$.

4. 已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且 $2a_1+3a_2=1$，$a_3^2=9a_2a_6$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】由 $a_3^2=9a_2a_6$，得 $a_3^2=9a_4^2$.

因为等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，所以 $a_3=3a_4$，

即公比 $q=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{3}$.

由 $2a_1+3a_2=1$ 得 $2a_1+3\times\frac{1}{3}a_1=1$，

即 $3a_1=1$，得 $a_1=\frac{1}{3}$.

则数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（八）

课后作业 · 单独成册

第 3 课时 等比数列的前 n 项和公式

学习目标	核心素养
理解等比数列前 n 项和公式的推导方法，会用等比数列的前 n 项和公式进行运算	逻辑推理、数学运算
掌握等比数列前 n 项和公式的有关性质	数学运算
能够运用等比数列的前 n 项和解决有关实际问题	数学建模、数学运算

自主预习

知新预学

等比数列的前 n 项和公式

已知量	首项、公比与项数	首项、公比与末项
求和公式	$S_n=\begin{cases}\underline{na_1}, & q=1,\\ \underline{\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}}, & q\neq 1\end{cases}$	$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \underline{\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}}, & q\neq 1\end{cases}$

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)求等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和时,可直接套用公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$来求. (×)

(2)若数列$\{a_n\}$是公比为 1 的等比数列,则其前 n 项和公式是关于 n 的正比例函数. (√)

2. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1=2,a_2=4$,则 $S_{10}=$ (D)

A. $2^{10}+2$　　B. 2^9-2

C. $2^{10}-2$　　D. $2^{11}-2$

【解析】因为 $a_1=2,a_2=4$,所以 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=2$,所以 $S_{10}=\dfrac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\dfrac{2(1-2^{10})}{1-2}=2(2^{10}-1)=2^{11}-2$.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=2,a_4=16$,则$\{a_n\}$的前 5 项和 $S_5=$ (C)

A. 30　　B. 31

C. 62　　D. 64

【解析】在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2,a_4=16$,

设公比为 q,$\dfrac{a_4}{a_1}=q^3=8$,解得 $q=2$.

则 $S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{2(1-2^5)}{1-2}=62$.

4. 设$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列,S_n 为其前 n 项和. 若 $S_4=10S_2$,则此数列的公比 q 的值为__3__.

【解析】因为 $S_4=10S_2$,

所以 $a_1(1+q+q^2+q^3)=10a_1(1+q)$,

即$(1+q)(q+3)(q-3)=0$,又 $a_n>0$,所以 $q=3$.

互动课堂

合作探究

探究 1 等比数列前 n 项和的相关运算

【例 1】在等比数列$\{a_n\}$中,其前 n 项和为 S_n.

(1)若 $S_2=30,S_3=155$,求 S_n;

(2)若 $S_n=189,a_1=3,a_n=96$,求 q 和 n.

【解析】(1)由题意知$\begin{cases}a_1(1+q)=30,\\ a_1(1+q+q^2)=155,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=5,\\ q=5\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=180,\\ q=-\dfrac{5}{6},\end{cases}$

从而 $S_n=\dfrac{5^{n+1}}{4}-\dfrac{5}{4}$或 $S_n=\dfrac{1\,080\times\left[1-\left(-\dfrac{5}{6}\right)^n\right]}{11}$.

(2)因为在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=3,a_n=96,S_n=189$,所以$\dfrac{3-96q}{1-q}=189$. 所以 $q=2$.

因为 $a_n=a_1q^{n-1}$,

所以 $96=3\times 2^{n-1}$.

所以 $n=6$.

点睛 等比数列前 n 项和运算的技巧

(1)在等比数列的通项公式和前 n 项和公式中,共涉及五个量:a_1,a_n,n,q,S_n,这五个量可以"知三求二",一般利用公式列方程组来求解.

(2)对于基本量的计算,列方程组求解是基本方法,通常用约分或两式相除的方法进行消元,有时会用到整体代换,如 q^n,$\dfrac{a_1}{1-q}$都可以看作一个整体.

【变式训练 1】(1)数列 $1,3,\cdots,3^{n-1},\cdots$的前 n 项和为 (B)

A. 3^n-1 B. $\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$

C. $\frac{3^n}{2}$ D. $\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{1}{2}$

【解析】$S_n=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$.

(2)已知 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$S_n=93,a_n=48$，公比 $q=2$，则 $n=$__5__.

【解析】由 $S_n=93,a_n=48$，公比 $q=2$，得 $\begin{cases}a_1(2^n-1)=93,\\a_1\cdot 2^{n-1}=48,\end{cases}$ 整理得 $2^n=32$，解得 $n=5$.

(3)已知数列$\{a_n\}$是首项为 a_1，公比为 q 的等比数列，其前 n 项和为 S_n，且有 $5S_2=4S_4$，则 $q=$__$\pm\frac{1}{2}$__.

【解析】当 $q=1$ 时，由 $5S_2=4S_4$ 知 $10a_1=16a_1$，则 $a_1=0$，不合题意，故 $q\neq1$.

当 $q\neq1$ 时，由 $5S_2=4S_4$ 知 $\frac{5a_1(1-q^2)}{1-q}=\frac{4a_1(1-q^4)}{1-q}$，

所以 $5(1-q^2)=4(1-q^4)$.

解得 $1+q^2=\frac{5}{4}$，即 $q=\pm\frac{1}{2}$.

探究 2 等比数列前 n 项和的性质

【例 2】(1)已知在等比数列$\{a_n\}$中，若前 10 项的和是 10，前 20 项的和是 30，则前 30 项的和是__70__.

【解析】因为数列$\{a_n\}$是等比数列，

所以有 $S_{10},S_{20}-S_{10},S_{30}-S_{20}$ 成等比数列，

所以$(S_{20}-S_{10})^2=S_{10}(S_{30}-S_{20})$，

即$(30-10)^2=10\times(S_{30}-30)$，

即 $S_{30}-30=40$，即 $S_{30}=70$.

(2)已知等比数列$\{a_n\}$共有 $2n$ 项，其和为-240，且奇数项的和比偶数项的和大 80，则公比 $q=$__2__.

【解析】由题意，得 $\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=-240,\\S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}S_{奇}=-80,\\S_{偶}=-160.\end{cases}$

所以 $q=\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{-160}{-80}=2$.

点睛 等比数列前 n 项和性质的应用

(1)等比数列前 n 项和为 S_n(且 $S_n\neq0$)，则 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 仍成等比数列，其公比为 $q^n(q\neq-1)$.

(2)若项数为 $2n$，则 $\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q(S_{奇}\neq0)$；若项数为 $2n+1$，则 $\frac{S_{奇}-a_1}{S_{偶}}=q(S_{偶}\neq0)$.

【变式训练 2】(1)设在等比数列$\{a_n\}$中，前 n 项和为 S_n. 已知 $S_3=8,S_6=7$，则 $a_7+a_8+a_9=$ (A)

A. $\frac{1}{8}$ B. $-\frac{1}{8}$

C. $\frac{57}{8}$ D. $\frac{55}{8}$

【解析】因为 $a_7+a_8+a_9=S_9-S_6$，且 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等比数列，即 $8,-1,S_9-S_6$ 成等比数列，所以 $8(S_9-S_6)=1$，即 $S_9-S_6=\frac{1}{8}$. 所以 $a_7+a_8+a_9=\frac{1}{8}$.

(2)若等比数列$\{a_n\}$的公比为$\frac{1}{3}$，且 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}=60$，则$\{a_n\}$的前 100 项和为__80__.

【解析】令 $X=a_1+a_3+\cdots+a_{99}=60,Y=a_2+a_4+\cdots+a_{100}$，

则 $S_{100}=X+Y$，

由等比数列前 n 项和性质知，$\frac{Y}{X}=q=\frac{1}{3}$，

所以 $Y=20$.

即 $S_{100}=X+Y=80$.

探究 3 等比数列前 n 项和的实际应用

【例 3】某地本年度旅游业收入估计为 400 万元，由于该地采取了一系列措施，进一步发展旅游业，预计今后旅游业的收入每年会比上一年增加$\frac{1}{4}$.

(1)求 n 年内旅游业的总收入；

(2)试估计大约几年后，旅游业的总收入超过 8 000 万元.(已知 $\lg 2\approx0.301\ 0,\lg 3\approx0.477\ 1,\lg 5\approx0.699\ 0$)

【解析】(1)设第 n 年的旅游业收入估计为 a_n 万元，

则 $a_1=400,a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{4}\right)a_n=\frac{5}{4}a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5}{4}$.

所以数列$\{a_n\}$是首项为 400，公比为$\frac{5}{4}$的等比数列，

所以 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{400\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{5}{4}}$

$=1\ 600\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$.

即 n 年内旅游业总收入为 $1\ 600\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$万元.

(2)由(1)知 $S_n=1\ 600\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$，

令 $S_n>8\ 000$，

即 $1\ 600\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]>8\ 000$，

所以$\left(\frac{5}{4}\right)^n>6$，所以 $\lg\left(\frac{5}{4}\right)^n>\lg 6$，

所以 $n>\frac{\lg 6}{\lg\frac{5}{4}}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 5-2\lg 2}\approx8.021\ 6$.

所以大约第 9 年后，旅游业总收入超过 8 000 万元.

点睛 解数列应用题的方法

(1)认真审题,准确理解题意

①判断应用题是等差数列问题,是等比数列问题,还是含有递推关系的数列问题;是求 a_n,还是求 S_n. 特别要注意准确弄清项数是多少.

②弄清题目中主要的已知项.

(2)抓住数量关系,联想数学知识和数学方法,恰当引入参数变量,将文字语言翻译成数学语言,将数量关系用数学式子表达.

(3)将实际问题抽象为数学问题,将已知与所求联系起来,列出满足题意的数学关系式.

[注意]判断数列类型的两个关键点:平均变化量是常数→等差数列;平均变化率是常数→等比数列.

【变式训练 3】《九章算术》中有一个"两鼠穿墙"的问题:"今有垣厚五尺,两鼠对穿.大鼠日一尺,小鼠亦日一尺.大鼠日自倍,小鼠日自半.问几何日相逢?各穿几何?"其大意为:"今有一堵墙厚 5 尺,两只老鼠从墙的两边沿一条直线相对打洞穿墙,大老鼠第一天打洞 1 尺,以后每天是前一天的 2 倍;小老鼠第一天也打洞 1 尺,以后每天是前一天的 $\frac{1}{2}$. 问大、小老鼠几天后相遇?各自打洞几尺?"如果墙足够厚,S_n 为前 n 天两只老鼠打洞长度之和,则 $S_n=$ ___$2^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$___ 尺.

【解析】由题意可知,大老鼠每天打洞的长度构成以 1 为首项,2 为公比的等比数列,前 n 天打洞长度之和为 $\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. 小老鼠每天打洞的长度构成以 1 为首项,$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,前 n 天打洞长度之和为 $\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

所以 $S_n=2^n-1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$.

探究 4 等差数列、等比数列及前 n 项和的综合应用

【例 4】设 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_1=\ln 2$, $a_2+a_3=5\ln 2$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求 $e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}$.

【解析】(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 因为 $a_2+a_3=5\ln 2$,所以 $2a_1+3d=5\ln 2$.

又 $a_1=\ln 2$,所以 $d=\ln 2$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n\ln 2$.

(2)因为 $e^{a_1}=e^{\ln 2}=2$, $\frac{e^{a_n}}{e^{a_{n-1}}}=e^{a_n-a_{n-1}}=e^{\ln 2}=2(n\geqslant 2)$,

所以数列 $\{e^{a_n}\}$ 是首项为 2,公比为 2 的等比数列,

所以 $e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}$

$=2(2^n-1)=2^{n+1}-2$.

点睛 解决等差数列与等比数列综合问题(即双数列问题)的关键在于用好它们的有关知识、理顺两个数列间的关系. 注意运用等差数列与等比数列的基本量,还应注意等差数列与等比数列之间的相互转化.

【变式训练 4】已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_7=77$, a_1,a_3,a_{11} 成等比数列.

(1)求 a_n;

(2)若 $b_n=2^{a_n}$,求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【解析】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$,

由 $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=77$,可得 $7a_4=77$,

则 $a_1+3d=11$ ①.

因为 a_1,a_3,a_{11} 成等比数列,

所以 $a_3^2=a_1a_{11}$,整理得 $2d^2=3a_1d$.

又 $d\neq 0$,所以 $2d=3a_1$ ②,

联立①②,解得 $a_1=2$, $d=3$,所以 $a_n=3n-1$.

(2)因为 $b_n=2^{a_n}=2^{3n-1}=4\cdot 8^{n-1}$,

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 4,公比为 8 的等比数列.

所以 $T_n=\frac{4\times(1-8^n)}{1-8}=\frac{2^{3n+2}-4}{7}$.

随堂小练

1. 在数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_{n+1}=2a_n$,且 $a_1=1$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和等于 (D)

A. -25 B. 25

C. -31 D. 31

【解析】因为 $a_{n+1}=2a_n$,且 $a_1=1$,所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项的和为 $S_n=\frac{1\times(1-2^5)}{1-2}=\frac{2^5-1}{2-1}=31$.

2. 设各项均不相等的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n. 若 $S_1=1$, $S_3=3$,则 $S_6=$ (C)

A. 27 B. -16

C. -21 D. 36

【解析】根据题意,等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均不相等,则其公比 $q\neq 1$,

因为 $S_1=1$, $S_3=3$,即 $a_1=1$,则 $S_3=a_1+a_1q+a_1q^2=1+q+q^2=3$,可解得 $q=1$ 或 $q=-2$.

又由 $q\neq 1$,则 $q=-2$,

则 $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^6)}{1+2}=-21$.

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_3=\frac{3}{2}$, $S_3=\frac{9}{2}$,则 $a_1=$ ___$\frac{3}{2}$ 或 6___.

【解析】当 $q=1$ 时,$a_1=a_2=a_3=\frac{3}{2}$,

满足 $S_3=\frac{9}{2}$.

当 $q\neq1$ 时，依题意，得 $\begin{cases}a_1q^2=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{9}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=6,\\ q=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

综上可得 $a_1=\dfrac{3}{2}$ 或 $a_1=6$.

4. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 S_1，S_3，S_2 成等差数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 的公比 q；

(2)若 $a_1-a_3=3$，求 S_n.

【解析】(1)依题意有 $a_1+(a_1+a_1q)=2(a_1+a_1q+a_1q^2)$.

由于 $a_1\neq0$ 且 $q\neq0$，从而解得 $q=-\dfrac{1}{2}$.

(2)由已知可得 $a_1-a_1\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=3$，

解得 $a_1=4$.

从而 $S_n=\dfrac{4\times\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{8}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

温馨提示：请自主完成课后作业(九)

课后作业·单独成册

第4课时 数列求和

学习目标	核心素养
掌握数列求和的几种常用基本方法	数学运算
会运用分类讨论思想求和	数学运算

自主预习

知新预学

1. 基本求和公式

(1)等差数列的前 n 项和公式

$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=$ $na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

(2)等比数列的前 n 项和公式

当 $q=1$ 时，$S_n=$ na_1 ；

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=$ $\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

2. 数列求和的三种常用方法

(1)分组求和法

①若 $a_n=b_n\pm c_n$，且$\{b_n\}$，$\{c_n\}$为等差或等比数列，可采用分组求和法求$\{a_n\}$的前 n 项和；

②通项公式为 $a_n=\begin{cases}b_n, n\text{ 为奇数},\\ c_n, n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 的数列，其中数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$是等比数列或等差数列，可采用分组求和法求和.

(2)裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得其和.

(3)错位相减法

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求，如等比数列的前 n 项和就是用此法推导的.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $a_n=S_n-S_{n-1}$.（ × ）

(2)当 $n\geqslant2$ 时，$\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.（ √ ）

2. 数列$\{(-1)^n n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2\,023}=$（ B ）

A. 1 011　　B. $-1\,012$

C. 2 023　　D. $-2\,023$

【解析】$S_{2\,023}=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-2\,021+2\,022)-2\,023=1\,011-2\,023=-1\,012$.

3. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，则 $S_5=$（ B ）

A. 1　　B. $\dfrac{5}{6}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{30}$

【解析】因为 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

所以 $S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n+n$，前 n 项和为 S_n，则 $S_6=$ 147 .

【解析】$S_6=(2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)+(1+2+3+4+5+6)=\dfrac{2(1-2^6)}{1-2}+\dfrac{6(1+6)}{2}=2^7-2+21=2^7+19=147$.

互动课堂

合作探究

探究1 分组求和法求和

【例1】已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且 $b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $c_n=a_n+b_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和.

【解析】(1)等比数列$\{b_n\}$的公比为 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{9}{3}=3$，

所以 $b_1=\dfrac{b_2}{q}=1$，$b_4=b_3q=27$.

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

因为 $a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=27$，

所以 $1+13d=27$，即 $d=2$.

所以 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)知，$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$.

因此 $c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$.

从而数列$\{c_n\}$的前 n 项和

$S_n=1+3+\cdots+(2n-1)+1+3+\cdots+3^{n-1}$

$=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}+\dfrac{1-3^n}{1-3}=n^2+\dfrac{3^n-1}{2}$.

点睛 如果一个数列本身既不是等差数列也不是等比数列，但它的通项公式可以拆分为几项的和，而这些项又构成等差数列或等比数列，那么就可以用分组求和法求这个数列的和，即原数列的前 n 项和等于拆分成的每个数列前 n 项和的和.

【变式训练 1】 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=3$，通项 $a_n=2^np+nq(n\in\mathbf{N}^*,p,q$ 为常数)，且 a_1,a_4,a_5 成等差数列.

(1)求 p,q 的值；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【解析】 (1)由 $a_1=3$，得 $2p+q=3$，

又因为 $a_4=2^4p+4q,a_5=2^5p+5q$，

且 $a_1+a_5=2a_4$，得 $3+2^5p+5q=2^5p+8q$，

解得 $p=1,q=1$.

(2)由(1)知 $a_n=2^n+n$，

所以 $S_n=(2+2^2+\cdots+2^n)+(1+2+\cdots+n)=2^{n+1}-2+\dfrac{n(n+1)}{2}$.

探究 2 裂项相消法求和

【例 2】 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

【解析】 (1)因为 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$，故当 $n\geqslant2$ 时，$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=2(n-1)$. 两式相减得 $(2n-1)a_n=2$，所以 $a_n=\dfrac{2}{2n-1}(n\geqslant2)$.

又由题设可得 $a_1=2$ 满足上式，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{2}{2n-1}$.

(2)由(1)知 $\dfrac{a_n}{2n+1}=\dfrac{2}{(2n+1)(2n-1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$.

则 $S_n=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$.

点睛 常见的裂项公式

(1)若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$，$\dfrac{1}{a_na_{n+2}}=\dfrac{1}{2d}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)$.

(2) $\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$.

(3) $\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

[注意]裂项相消要注意分析项与项之间的抵消规律，注意裂项相消后留下了哪些项.

【变式训练 2】 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=1,a_2+a_3+\cdots+a_{10}=144$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，设 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 S_n.

【解析】 (1)因为等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_3+\cdots+a_{10}=144$，$a_1=1$，所以 $9+45d=144$，所以 $d=3$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=3n-2$.

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$，

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{n}{3n+1}$.

探究 3 错位相减法求和

【例 3】 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_n=3S_n-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【解析】 (1)当 $n=1$ 时，$a_1=3S_1-2=3a_1-2$，解得 $a_1=1$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=3S_n-2$，$a_{n-1}=3S_{n-1}-2$，两式相减得 $a_n-a_{n-1}=3a_n$，化简得 $a_n=-\dfrac{1}{2}a_{n-1}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $-\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)由(1)可得 $na_n=n\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$T_n=1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^0+2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^1+3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$-\dfrac{1}{2}T_n=1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^1+2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+n\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$，

两式相减得 $\dfrac{3}{2}T_n=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-n\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}-n\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{2}{3}-\left(n+\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

所以数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和

$T_n=\dfrac{4}{9}-\left(\dfrac{2}{3}n+\dfrac{4}{9}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

点睛 错位相减法进行求和的基本步骤

(1)在等式 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 两边同时乘以等比数列的公比 q；

(2)两式相减，左边为 $(1-q)S_n$，右边为 q 的同次式对齐相减；

(3)右边去掉最后一项(有时需要去掉第一项)剩下的各项组成等比数列，可以采用公式求和.

[注意]①利用错位相减法时，在写出 S_n 与 qS_n 的表达式时，应注意使两式对齐，以便于作差，正确写出 $(1-q)S_n$ 的表

达式;②利用此法时要注意讨论公比 q 是否等于1.

【变式训练3】设$\{a_n\}$是公比不为1的等比数列,a_1 为 a_2,a_3 的等差中项.

(1)求$\{a_n\}$的公比;

(2)若 $a_1=1$,求数列$\{na_n\}$的前 n 项和.

【解析】(1)设$\{a_n\}$的公比为 q,由题设得 $2a_1=a_2+a_3$,即 $2a_1=a_1q+a_1q^2$.

所以 $q^2+q-2=0$,解得 $q=1$(舍去)或 $q=-2$.

故$\{a_n\}$的公比为-2.

(2)记 S_n 为$\{na_n\}$的前 n 项和.由(1)及题设可得,$a_n=(-2)^{n-1}$.所以 $S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\times(-2)^{n-1}$,

$-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n\times(-2)^n$.

可得 $3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\times(-2)^n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}-n\times(-2)^n$.

所以 $S_n=\dfrac{1}{9}-\dfrac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

探究4 分段讨论法求和

【例4】在公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=10$ 且 $(2a_2+2)^2=5a_1a_3$.

(1)求公差 d 及通项公式 a_n;

(2)若 $d<0$,求$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$.

【解析】(1)由题意,得 $4(11+d)^2=5\times10\times(10+2d)$,即 $d^2-3d-4=0$,故 $d=-1$ 或 $d=4$.

所以 $a_n=-n+11$ 或 $a_n=4n+6$.

(2)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

因为 $d<0$,由(1)得 $d=-1$,$a_n=-n+11$,

则当 $n\leqslant11$ 时,$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=S_n=-\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{21}{2}n$.

当 $n\geqslant12$ 时,$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=-S_n+2S_{11}=\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{21}{2}n+110$.

综上所述,$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{21}{2}n, n\leqslant11,\\ \dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{21}{2}n+110, n\geqslant12.\end{cases}$

点睛 (1)分段讨论法是指将一个数列分成若干段,然后各段分别利用等差(比)数列的前 n 项和公式、错位相减法等进行求和的方法.常见类型:一是数列的通项公式中含有绝对值符号;二是数列的通项公式中含有符号因子$(-1)^n$.

(2)用分段讨论法求数列的前 n 项和的突破口:一是对分段讨论的"度"的把控.若各项前的符号总是以"−""+"交叉形式出现,则分段的"度"定位到"n 为奇数与偶数";若数列含绝对值符号,则分段的"度"需在零点处下功夫.二是分段时应做到不重不漏.

【变式训练4】已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(-1)^n\times(2n-1)$,求其前 n 项和 S_n.

【解析】当 n 为奇数时,

$S_n=(-1+3)+(-5+7)+(-9+11)+\cdots+(-2n+1)=2\times\dfrac{n-1}{2}+(-2n+1)=-n$,

当 n 为偶数时,

$S_n=(-1+3)+(-5+7)+(-9+11)+\cdots+[(-2n+3)+(2n-1)]=2\times\dfrac{n}{2}=n$.

所以 $S_n=\begin{cases}-n, n\text{ 为奇数},\\ n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

随堂小练

1. $1+\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{99\times100}=$ (B)

A. $\dfrac{99}{100}$ B. $\dfrac{199}{100}$

C. $\dfrac{98}{99}$ D. $\dfrac{197}{99}$

【解析】因为 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$,

所以所求和

$=1+\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}\right)\right]$

$=1+\left(1-\dfrac{1}{100}\right)=\dfrac{199}{100}$.

2. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=1+2+3+\cdots+n$,则 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2\,023}}=$ (B)

A. $\dfrac{2\,022}{2\,023}$ B. $\dfrac{2\,023}{1\,012}$

C. $\dfrac{2\,021}{2\,022}$ D. $\dfrac{4\,044}{2\,023}$

【解析】由题意,可知

$a_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

则 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

所以 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2\,023}}$

$=2\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+2\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+2\times\left(\dfrac{1}{2\,023}-\dfrac{1}{2\,024}\right)$

$=2\times\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2\,023}-\dfrac{1}{2\,024}\right)$

$=2\times\left(1-\dfrac{1}{2\,024}\right)$

$=\frac{2\ 023}{1\ 012}$.

3. 若数列 $2\frac{1}{4},4\frac{1}{8},6\frac{1}{16},\cdots,2n+\frac{1}{2^{n+1}},\cdots$的前 n 项和为 S_n，则 $S_7=$ ____$56\frac{127}{256}$____ .

【解析】$S_7=2\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+6\frac{1}{16}+\cdots+\left(2\times7+\frac{1}{2^{7+1}}\right)$

$=(2+4+6+\cdots+14)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^8}\right)$

$=\frac{7\times(14+2)}{2}+\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1-\frac{1}{2}}$

$=56\frac{127}{256}$.

4. 求和：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}$.

【解析】令 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}$ ①，

则 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$ ②，

由①－②得，$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}$,

所以 $S_n=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十、十一）

课后作业・单独成册

4.4* 数学归纳法

学习目标	核心素养
理解数学归纳法的定义，了解数学归纳法的原理	数学抽象
能用数学归纳法证明数列中的一些简单命题	逻辑推理

自主预习

知新预学

数学归纳法的概念及步骤

一般地，证明一个与正整数 n 有关的命题，可按下列步骤进行：

(1)(归纳奠基)证明当 $n=$ ___$n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$___ 时命题成立；

(2)(归纳递推)以“当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$时命题成立”为条件，推出“当 $n=$ ___$k+1$___ 时命题也成立”.

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立，这种证明方法称为数学归纳法.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)用数学归纳法证明问题时，第一步是验证当 $n=1$ 时结论成立. (×)

(2)所有与正整数有关的数学命题都必须用数学归纳法证明. (×)

(3)用数学归纳法证明问题时，归纳假设可以不用. (×)

(4)不论是等式还是不等式，用数学归纳法证明时，由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，项数都增加了一项. (×)

(5)用数学归纳法证明 $1+2+2^2+\cdots+2^{n+2}=2^{n+3}-1$. 当验证 $n=1$ 时，左边式子应为 $1+2+2^2+2^3$. (√)

2. 在用数学归纳法证明凸 n 边形的对角线为 $\frac{1}{2}n(n-3)$条时，第一步检验 $n=$ ___3___.

3. 用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}(a\neq1)$. 当验证 $n=1$ 时，左边式子应为___$1+a+a^2$___.

互动课堂

合作探究

探究 1 用数学归纳法证明等式

【例 1】求证：$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2=-n(2n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

【证明】(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1^2-2^2=-3$，右边 $=-3$，等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant1$，且 $k\in\mathbf{N}^*)$时，等式成立，即 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2k-1)^2-(2k)^2=-k(2k+1)$. 那么，当 $n=k+1$ 时，$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2k-1)^2-(2k)^2+(2k+1)^2-(2k+2)^2=-k(2k+1)+(2k+1)^2-(2k+2)^2=-k(2k+1)-(4k+3)=-(2k^2+5k+3)=-(k+1)[2(k+1)+1]$，即当 $n=k+1$ 时，等式也成立. 由(1)(2)得，等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

点睛 用数学归纳法证明恒等式时的关注点

(1)弄清 n 取第一个值 n_0 时等式两端项的情况.

(2)弄清从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时等式两端增加了哪些项，减少了哪些项.

(3)证明 $n=k+1$ 时结论也成立，要设法将待证式与归纳假设建立联系，并朝 $n=k+1$ 证明目标的表达式变形.

【变式训练 1】设 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证：$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=n[f(n)-1](n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

【证明】(1)当 $n=2$ 时，左边 $=f(1)=1$，右边 $=2\left(1+\frac{1}{2}-1\right)=1$，左边=右边，等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant2$，且 $k\in\mathbf{N}^*)$时，等式成立，

即 $f(1)+f(2)+\cdots+f(k-1)=k[f(k)-1]$，

那么，当 $n=k+1$ 时，$f(1)+f(2)+\cdots+f(k-1)+f(k)=k[f(k)-1]+f(k)=(k+1)f(k)-k=(k+1)\cdot\left[f(k+1)-\frac{1}{k+1}\right]-k=(k+1)f(k+1)-(k+1)=(k+1)\cdot[f(k+1)-1]$，

所以当 $n=k+1$ 时等式仍然成立.

由(1)(2)可知，$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=n[f(n)-1](n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

探究 2 用数学归纳法证明不等式

【例 2】已知函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^2$. 设 $0<a_1<\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=f(a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$. 证明：$a_n<\frac{1}{n+1}$.

【证明】(1)当 $n=1$ 时，$0<a_1<\frac{1}{2}$，显然不等式成立.

因为当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$0<f(x)\leqslant\frac{1}{6}$，

所以 $0<a_2=f(a_1)\leqslant\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$.

故 $n=2$ 时，原不等式也成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式 $0<a_k<\frac{1}{k+1}$ 成立.

因为函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^2$ 的对称轴为直线 $x=\frac{1}{3}$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 为增函数.

所以由 $0<a_k<\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{3}$，

得 $0<f(a_k)<f\left(\frac{1}{k+1}\right)$.

于是 $0<a_{k+1}=f(a_k)<\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{k+2}-\frac{k+4}{2(k+1)^2(k+2)}<\frac{1}{k+2}$.

所以当 $n=k+1$ 时，原不等式也成立.

根据(1)(2)知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $a_n<\frac{1}{n+1}$ 成立.

点睛 用数学归纳法证明不等式时的关注点

(1)当遇到与正整数 n 有关的不等式证明题时，若用其他办法难以证明，则可考虑用数学归纳法证明.

(2)用数学归纳法证明不等式时，由 $n=k$ 成立推证 $n=k+1$ 也成立时，应灵活运用分析法、综合法、作差(作商)比较法、放缩法等证明不等式.

【变式训练 2】 已知 $f(n)=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}$，$g(n)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)当 $n=1,2,3$ 时，试比较 $f(n)$ 与 $g(n)$ 的大小；

(2)猜想 $f(n)$ 与 $g(n)$ 的大小关系，并给出证明.

【解析】(1)当 $n=1$ 时，$f(1)=1$，$g(1)=1$，所以 $f(1)=g(1)$；

当 $n=2$ 时，$f(2)=\frac{9}{8}$，$g(2)=\frac{11}{8}$，所以 $f(2)<g(2)$；

当 $n=3$ 时，$f(3)=\frac{251}{216}$，$g(3)=\frac{312}{216}$，所以 $f(3)<g(3)$.

(2)由(1)猜想 $f(n)\leqslant g(n)$，下面用数学归纳法证明这个猜想.

①当 $n=1,2,3$ 时，不等式显然成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时不等式成立，

即 $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{k^3}<\frac{3}{2}-\frac{1}{2k^2}$.

那么，当 $n=k+1$ 时，

$f(k+1)=f(k)+\frac{1}{(k+1)^3}<\frac{3}{2}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{(k+1)^3}$.

所以 $f(k+1)-g(k+1)<\frac{3}{2}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{(k+1)^3}-\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2(k+1)^2}\right]=\frac{1}{2(k+1)^2}-\left[\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{(k+1)^3}\right]$

$=\frac{k+3}{2(k+1)^3}-\frac{1}{2k^2}=\frac{-3k-1}{2(k+1)^3k^2}<0$，

所以 $f(k+1)<g(k+1)$.

由①②可知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(n)\leqslant g(n)$ 成立.

探究 3 归纳—猜想—证明

【例 3】 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}-1$，且 $a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求 a_1,a_2,a_3，并猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)证明通项公式的正确性.

【解析】(1)当 $n=1$ 时，由已知得 $a_1=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{a_1}-1$，

$a_1^2+2a_1-2=0$，所以 $a_1=\sqrt{3}-1(a_1>0)$.

当 $n=2$ 时，由已知得 $a_1+a_2=\frac{a_2}{2}+\frac{1}{a_2}-1$，

将 $a_1=\sqrt{3}-1$ 代入并整理得 $a_2^2+2\sqrt{3}a_2-2=0$，

所以 $a_2=\sqrt{5}-\sqrt{3}(a_2>0)$. 同理可得 $a_3=\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

猜想 $a_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)证明：①由(1)知，当 $n=1,2,3$ 时，通项公式成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant 3,k\in\mathbf{N}^*)$ 时，通项公式成立，

即 $a_k=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$.

所以 $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{a_{k+1}}{2}+\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{a_k}{2}-\frac{1}{a_k}$，

将 $a_k=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$ 代入上式，整理得

$a_{k+1}^2+2\sqrt{2k+1}a_{k+1}-2=0$，

所以 $a_{k+1}=\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}$

$=\sqrt{2(k+1)+1}-\sqrt{2(k+1)-1}$，

即 $n=k+1$ 时通项公式成立.

由①②可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，

$a_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$ 都成立.

点睛 "归纳—猜想—证明"的步骤

(1)计算：根据条件，计算前若干项；

(2)归纳猜想：通过观察、分析、综合、联想，猜想出一般结论；

(3)证明：对一般结论用数学归纳法进行证明.

【变式训练 3】 设 $a>0$，$f(x)=\frac{ax}{a+x}$. 令 $a_1=1$，$a_{n+1}=f(a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)写出 a_2,a_3,a_4 的值，并猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)用数学归纳法证明所得结论.

【解析】(1)因为 $a_1=1$，

所以 $a_2=f(a_1)=f(1)=\dfrac{a}{1+a}$;

$a_3=f(a_2)=\dfrac{a\cdot\dfrac{a}{1+a}}{a+\dfrac{a}{1+a}}=\dfrac{a}{2+a}$;

$a_4=f(a_3)=\dfrac{a\cdot\dfrac{a}{2+a}}{a+\dfrac{a}{2+a}}=\dfrac{a}{3+a}$.

猜想 $a_n=\dfrac{a}{(n-1)+a}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)证明:①易知,$n=1$ 时,猜想正确.

②假设 $n=k(k\geqslant1$ 且 $k\in\mathbf{N}^*)$时猜想正确,

即 $a_k=\dfrac{a}{(k-1)+a}$.

则 $a_{k+1}=f(a_k)=\dfrac{a\cdot a_k}{a+a_k}=\dfrac{a\cdot\dfrac{a}{(k-1)+a}}{a+\dfrac{a}{(k-1)+a}}$

$=\dfrac{a}{(k-1)+a+1}=\dfrac{a}{[(k+1)-1]+a}$.

这说明,$n=k+1$ 时猜想正确.

由①②知,对于任何 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_n=\dfrac{a}{(n-1)+a}$.

随堂小练

1. 用数学归纳法证明不等式 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}>\dfrac{127}{64}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$成立,其初始值至少应取 (B)

A. 7　　B. 8
C. 9　　D. 10

【解析】左边 $=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$,代入验证可知 n 的最小值是 8.

2. 已知 $f(n)=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$,则 (D)

A. $f(n)$中共有 n 项,当 $n=2$ 时,$f(2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

B. $f(n)$中共有 $n+1$ 项,当 $n=2$ 时,$f(2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

C. $f(n)$中共有 n^2-n 项,当 $n=2$ 时,$f(2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

D. $f(n)$中共有 n^2-n+1 项,当 $n=2$ 时,$f(2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

3. 已知 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$,则 $S_{n+1}-S_n=$ $\underline{\dfrac{1}{2^n+1}+\dfrac{1}{2^n+2}+\dfrac{1}{2^n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n+2^n}}$.

【解析】因为 $S_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n+2^n}$,$S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$,所以 $S_{n+1}-S_n$ $=\dfrac{1}{2^n+1}+\dfrac{1}{2^n+2}+\dfrac{1}{2^n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n+2^n}$.

4. 用数学归纳法证明:$\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{4\times6}+\dfrac{1}{6\times8}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}=\dfrac{n}{4(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【证明】(1)当 $n=1$ 时,

左边 $=\dfrac{1}{2\times1\times(2\times1+2)}=\dfrac{1}{8}$,

右边 $=\dfrac{1}{4(1+1)}=\dfrac{1}{8}$,

左边=右边,所以等式成立.

(2)假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时等式成立,即有

$\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{4\times6}+\dfrac{1}{6\times8}+\cdots+\dfrac{1}{2k(2k+2)}=\dfrac{k}{4(k+1)}$,

则当 $n=k+1$ 时,$\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{4\times6}+\dfrac{1}{6\times8}+\cdots+\dfrac{1}{2k(2k+2)}+\dfrac{1}{2(k+1)[2(k+1)+2]}$

$=\dfrac{k}{4(k+1)}+\dfrac{1}{4(k+1)(k+2)}$

$=\dfrac{k(k+2)+1}{4(k+1)(k+2)}$

$=\dfrac{(k+1)^2}{4(k+1)(k+2)}$

$=\dfrac{k+1}{4(k+2)}=\dfrac{k+1}{4[(k+1)+1]}$,

所以当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

由(1)(2)可知,对于任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 等式都成立.

温馨提示:请自主完成课后作业(十二)

课后作业·单独成册

三、知能拓展

数列复习

核心梳理

1. 数列是特殊的函数. 有些题目可结合函数知识去解决,体现了函数思想和数形结合思想.

2. 等差、等比数列中,$a_1,a_n,n,d(q),S_n$ 可以"知三求二",体现了方程(组)的思想和整体思想,有时用到换元法.

3. 求等比数列的前 n 项和时要考虑公比是否等于 1,公比是字母时要进行讨论,体现了分类讨论的思想.

4. 数列求和的基本方法有:公式法、裂项相消法、分组求和法、错位相减法、倒序相加法、累加法和等价转化法等.

重难突破

要点 1 等差、等比数列的判定

【例 1】已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,na_{n+1}=2(n+1)a_n$. 设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$.

(1)求 b_1,b_2,b_3;

(2)判断数列$\{b_n\}$是否为等比数列,并说明理由;

(3)求$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】(1)由条件可得 $a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n$.

将 $n=1$ 代入得,$a_2=4a_1$,而 $a_1=1$,所以 $a_2=4$.

将 $n=2$ 代入得,$a_3=3a_2$,所以 $a_3=12$.

从而 $b_1=1,b_2=2,b_3=4$.

(2)$\{b_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

由条件可得$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{2a_n}{n}$,即 $b_{n+1}=2b_n$,又 $b_1=1$,

所以$\{b_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

(3)由(2)可得$\dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$,所以 $a_n=n\cdot 2^{n-1}$.

点睛 判断和证明数列是等差(比)数列的方法

(1)定义法:对于 $n\geqslant 1$ 的任意自然数,验证 $a_{n+1}-a_n\left(或\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$为与正整数 n 无关的常数.

(2)中项公式法:

①若 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,则$\{a_n\}$为等差数列;

②若 $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2$ 且 $a_n\neq 0)$,则$\{a_n\}$为等比数列.

【变式训练 1】已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\dfrac{1}{5}$,且当 $n>1$,$n\in\mathbf{N}^*$ 时,有$\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{2a_{n-1}+1}{1-2a_n}$.

(1)求证:数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列;

(2)试问 a_1a_2 是否是数列$\{a_n\}$中的项? 如果是,是第几项? 如果不是,请说明理由.

【解析】(1)证明:当 $n\geqslant 2$ 时,因为$\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{2a_{n-1}+1}{1-2a_n}$,所以 $a_{n-1}-a_n=4a_{n-1}a_n$,

两边同时除以 $a_{n-1}a_n$,得$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=4$.

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是首项为$\dfrac{1}{a_1}=5$,公差 $d=4$ 的等差数列.

(2)由(1)得$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)d=4n+1$,

所以 $a_n=\dfrac{1}{4n+1}$.

所以 $a_1a_2=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{45}$.

假设 a_1a_2 是数列$\{a_n\}$中的第 t 项,

则 $a_t=\dfrac{1}{4t+1}=\dfrac{1}{45}$,解得 $t=11\in\mathbf{N}^*$,

所以 a_1a_2 是数列$\{a_n\}$中的项,是第 11 项.

要点 2 求数列的通项公式

【例 2】(1)设 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 若 $a_1=1$,且 $3S_1,2S_2,S_3$ 成等差数列,则 $a_n=$__3^{n-1}__.

【解析】因为 $3S_1,2S_2,S_3$ 成等差数列,所以 $4S_2=3S_1+S_3$,即$4(a_1+a_2)=3a_1+a_1+a_2+a_3$,化简得$\dfrac{a_3}{a_2}=3$,即等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=3$,故 $a_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$.

(2)若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,且$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=$__$\dfrac{n(n+1)}{2}$__.

【解析】因为 $a_1=1$,且$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以$\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n-2}\cdot\dfrac{n+1}{n-1}$,

即当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

点睛 数列的通项公式的求法

(1)直接利用等差数列或等比数列的定义求通项公式的方法叫定义法，这种方法适用于已知数列类型的题目.

(2)若已知数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 可用 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2\end{cases}$ 求解.

(3)形如 $a_n-a_{n-1}=f(n)(n\geqslant 2)$ 的递推式，可用累加法求通项公式；形如 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)(n\geqslant 2)$ 的递推式，可用累乘法求通项公式.

【变式训练 2】(1)已知数列 $\{2^{n-1}a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=9+2n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$ $\underline{\begin{cases}11, n=1,\\ 2^{2-n}, n\geqslant 2.\end{cases}}$

【解析】因为 $S_n=9+2n$ ①，

所以 $S_{n-1}=9+2(n-1)(n\geqslant 2)$ ②，

①−②，得 $2^{n-1}a_n=2$，所以 $a_n=\dfrac{2}{2^{n-1}}=2^{2-n}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=9+2=11$，不符合上式，

所以 $a_n=\begin{cases}11, n=1,\\ 2^{2-n}, n\geqslant 2.\end{cases}$

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n^2+n}$，则 $a_n=$ $\underline{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}}$.

【解析】由已知得 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

分别将 $n=1,2,3,\cdots,(n-1)$ 代入上式得 $(n-1)$ 个等式，累加得 $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$，即 $a_n-a_1=1-\dfrac{1}{n}$.

因为 $a_1=\dfrac{1}{2}$，所以 $a_n=\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}$.

要点 3 数列求和

【例 3】已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等差数列，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=(a_n+1)\cdot 2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【解析】(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

令 $n=1$，得 $\dfrac{1}{a_1a_2}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $a_1a_2=3$.

令 $n=2$，得 $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{2}{5}$，

所以 $a_2a_3=15$.

解得 $a_1=1, d=2$，

所以 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)知 $b_n=2n\cdot 2^{2n-1}=n\cdot 4^n$，

所以 $T_n=1\times 4^1+2\times 4^2+\cdots+n\cdot 4^n$，

所以 $4T_n=1\times 4^2+2\times 4^3+\cdots+(n-1)\cdot 4^n+n\cdot 4^{n+1}$，

两式相减，得 $-3T_n=4^1+4^2+\cdots+4^n-n\cdot 4^{n+1}$

$=\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{1-3n}{3}\times 4^{n+1}-\dfrac{4}{3}$，

所以 $T_n=\dfrac{3n-1}{9}\times 4^{n+1}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{4+(3n-1)\cdot 4^{n+1}}{9}$.

点睛 数列求和的常用方法

(1)公式法：直接利用等差、等比数列的前 n 项和公式求和.

(2)裂项相消法：将数列的各项分成两个式子的代数和，即 $a_n=f(n+1)-f(n)$，然后相加.

(3)错位相减法：若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，则数列 $\{a_nb_n\}$ 可用错位相减法求和.

(4)倒序相加法：对于满足性质 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots$ 的数列可用倒序相加法求和.

(5)分组求和法：将数列的每一项进行适当的拆分后再分组，可组成几个等差或等比数列，再进行求和.

(6)并项求和法：将数列的某些项合并后转化为特殊的数列求和.

【变式训练 3】已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=f(a_n)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=\dfrac{1}{n+1}a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【解析】(1)由题意得 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$，

所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+1}{a_n}=1+\dfrac{1}{a_n}$，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$.

所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{a_1}=1$，公差为 1 的等差数列.

从而 $\dfrac{1}{a_n}=n$，所以 $a_n=\dfrac{1}{n}$.

(2)由(1)得 $b_n=\dfrac{1}{n+1}a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

要点 4 数列的实际应用

【例 4】某国采用养老储备金制度，要求公民在就业的第一年交纳养老储备金，数目为 a_1，以后每年交纳的数目均比上一年增加 $d(d>0)$，因此，历年所交纳的储备金数目 $a_1,a_2,\cdots$ 是一个公差为 d 的等差数列. 与此同时，国家给予优惠的计息政

策:不仅采用固定利率,而且按复利计算,这就是说,如果固定年利率为 $r(r>0)$,那么,在第 n 年末,第一年所交纳的储备金就变为 $a_1(1+r)^{n-1}$,第二年所交纳的储备金就变为 $a_2(1+r)^{n-2}$,……用 T_n 表示到第 n 年末所累计的储备金总额.

(1)写出 T_n 与 $T_{n-1}(n\geqslant2)$之间的递推关系式;

(2)求证:$T_n=A_n+B_n$,其中$\{A_n\}$是等比数列,$\{B_n\}$是等差数列.

【解析】(1)$T_n=T_{n-1}(1+r)+a_n(n\geqslant2)$.

(2)证明:$T_1=a_1$,对 $n\geqslant2$ 反复使用(1)中关系式,得

$T_n=T_{n-1}(1+r)+a_n=T_{n-2}(1+r)^2+a_{n-1}(1+r)+a_n=\cdots=a_1(1+r)^{n-1}+a_2(1+r)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(1+r)+a_n$ ①.

在①式两端同乘以$(1+r)$得,

$(1+r)T_n=a_1(1+r)^n+a_2(1+r)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(1+r)^2+a_n(1+r)$ ②.

②−①,得 $rT_n=a_1(1+r)^n+d[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)]-a_n=\dfrac{d}{r}[(1+r)^n-1-r]+a_1(1+r)^n-a_n$,

即 $T_n=\dfrac{a_1r+d}{r^2}(1+r)^n-\dfrac{d}{r}n-\dfrac{a_1r+d}{r^2}$.

如果记 $A_n=\dfrac{a_1r+d}{r^2}(1+r)^n$,

$B_n=-\dfrac{a_1r+d}{r^2}-\dfrac{d}{r}n$,

则 $T_n=A_n+B_n$,其中$\{A_n\}$是以$\dfrac{a_1r+d}{r^2}(1+r)$为首项,$1+r(r>0)$为公比的等比数列,

$\{B_n\}$是以$-\dfrac{a_1r+d}{r^2}-\dfrac{d}{r}$为首项,$-\dfrac{d}{r}$为公差的等差数列.

点睛(1)利息=本金×利率×存期,如果涉及复利,常用等比数列模型解决.涉及分期付款时,由于一般采用复利计算利息的办法,所以也要借助等比数列模型解决.处理分期付款需注意:①准确计算出在贷款全部付清时,各期所付款额及利息(最后一次付款没有利息);②明确各期所付的数额连同到最后一次付款时所产生的利息之和,等于商品售价及从购买到最后一次付款时的利息之和,只有掌握了这一点,才能顺利建立等量关系.

(2)如果涉及递增率或递减率要用等比数列,涉及依次增加或减少要用等差数列,有的问题可以通过转化得到等差数列或等比数列,在解决问题时要往这些方面思考.

【变式训练 4】某企业为了进行技术改造需要向银行贷款,设计了两种方案,甲方案:一次性贷款 10 万元,第一年便可获利 1 万元,以后每年比前一年增加 30%的利润;乙方案:每年贷款 1 万元,第一年可获利 1 万元,以后每年比前一年增加 0.5 万元.两种方案的使用期都是 10 年,到期一次性归还本息.若银行两种形式的贷款都按年息 5%的复利计算,试比较两种方案中,哪种获利更多?(参考数据:取 $1.05^{10}\approx1.629$,$1.3^{10}\approx13.786$,$1.5^{10}\approx57.665$)

【解析】甲方案中,每年所获利润组成等比数列,首项为 1,公比为$(1+30\%)$,所以 10 年所获得的总利润为

$S_{10}=1+(1+30\%)+(1+30\%)^2+\cdots+(1+30\%)^9=\dfrac{1.3^{10}-1}{0.3}\approx42.62$(万元),

贷款到期时,需要偿还银行的本息是 $10(1+5\%)^{10}\approx16.29$(万元),

故使用甲方案所获纯利润为 $42.62-16.29=26.33$(万元).

乙方案中,每年所获利润组成等差数列,首项为 1,公差为 0.5,所以 10 年所获得的总利润为

$T_{10}=1+(1+0.5)+(1+2\times0.5)+\cdots+(1+9\times0.5)=10\times1+\dfrac{10\times9}{2}\times0.5=32.5$(万元),

从第一年起,每年的贷款在到期时所产生的本息组成等比数列,首项为 $1\times(1+5\%)^{10}$ 万元,公比为$\dfrac{1}{1+5\%}$,

故贷款到期时,需要偿还银行的本息是

$1\times[(1+5\%)^{10}+(1+5\%)^9+\cdots+(1+5\%)]$

$=1.05\times\dfrac{1.05^{10}-1}{0.05}\approx13.21$(万元),

故使用乙方案所获纯利润为 $32.5-13.21=19.29$(万元).

综上可知,甲方案获利更多.

拓展提升

1.设数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2$,则 $a_8=$ (A)

A. 15　　B. 16

C. 49　　D. 64

2.已知等比数列$\{a_n\}$满足 $a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$,且 $a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}(n\geqslant3)$.当 $n\geqslant1$ 时,$\log_2a_1+\log_2a_3+\cdots+\log_2a_{2n-1}=$ (C)

A. $n(2n-1)$　　B. $(n+1)^2$

C. n^2　　D. $(n-1)^2$

【解析】由 $a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}(n\geqslant3)$得 $a_n^2=2^{2n}$,$a_n>0$,则 $a_n=2^n$,$\log_2a_1+\log_2a_3+\cdots+\log_2a_{2n-1}=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

3.已知在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_3+a_5=105$,$a_2+a_4+a_6=99$.若 S_n 表示$\{a_n\}$的前 n 项和,则使得 S_n 达到最大值的 n 是 (B)

A. 21　　B. 20

C. 19　　D. 18

【解析】由 $a_1+a_3+a_5=105$ 得 $3a_3=105$,即 $a_3=35$,由 $a_2+a_4+a_6=99$ 得 $3a_4=99$,即 $a_4=33$,

$\therefore d=-2$,$a_n=a_4+(n-4)\times(-2)=41-2n$,由$\begin{cases}a_n\geqslant0,\\a_{n+1}<0\end{cases}$得 $n=20$.

4.已知在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_{n+1}=a_n+n+1$,则 $a_n=$ $\underline{\dfrac{n(n+1)}{2}+1}$.

【解析】$\because a_1=2, a_{n+1}=a_n+n+1$,

$\therefore a_n=a_{n-1}+(n-1)+1$,

$a_{n-1}=a_{n-2}+(n-2)+1$,

$a_{n-2}=a_{n-3}+(n-3)+1$,

……

$a_3=a_2+2+1$,

$a_2=a_1+1+1$,

$a_1=2=1+1$,

将以上各式相加得

$a_n=[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]+n+1$

$=\dfrac{(n-1)[(n-1)+1]}{2}+n+1$

$=\dfrac{(n-1)n}{2}+n+1=\dfrac{n(n+1)}{2}+1$.

5. 在数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$中,$b_1=a_1$,$b_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$,$S_n$为$\{a_n\}$的前$n$项和,$a_n+S_n=n$.

(1)设$c_n=a_n-1$,求证:数列$\{c_n\}$是等比数列;

(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式.

【解析】(1)证明:$\because a_1=S_1$,$a_n+S_n=n$,

$\therefore a_1+S_1=1$,得$a_1=\dfrac{1}{2}$.

又$a_{n+1}+S_{n+1}=n+1$,两式相减得$2(a_{n+1}-1)=a_n-1$,即$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=\dfrac{1}{2}$,也即$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{1}{2}$,故数列$\{c_n\}$是等比数列.

(2)$\because c_1=a_1-1=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore c_n=-\dfrac{1}{2^n}$,$a_n=c_n+1=1-\dfrac{1}{2^n}$,$a_{n-1}=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

故当$n\geqslant 2$时,$b_n=a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}$.

又$b_1=a_1=\dfrac{1}{2}$,所以$b_n=\dfrac{1}{2^n}$.

6. 设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,$S_n=kn^2+n$($n\in\mathbf{N}^*$,k为常数).

(1)求a_1及a_n;

(2)若对于任意的$m\in\mathbf{N}^*$,a_m,a_{2m},a_{4m}成等比数列,求k的值.

【解析】(1)当$n=1$,$a_1=S_1=k+1$,

$n\geqslant 2$,$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=kn^2+n-[k(n-1)^2+(n-1)]$

$=2kn-k+1$,

经检验,$n=1$时,上式成立,$\therefore a_n=2kn-k+1$.

(2)$\because a_m$,a_{2m},a_{4m}成等比数列,

$\therefore a_{2m}^2=a_m\cdot a_{4m}$,

即$(4km-k+1)^2=(2km-k+1)(8km-k+1)$,

整理得$mk(k-1)=0$,对任意的$m\in\mathbf{N}^*$成立,

$\therefore k=0$或$k=1$.

温馨提示:请自主完成课后作业(十三)

课后作业·单独成册

第五章 一元函数的导数及其应用

一、课标导向

课标要求

1. 导数概念及其意义

(1)通过实例分析,经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程,了解导数概念的实际背景,知道导数是关于瞬时变化率的数学表达,体会导数的内涵与思想.

(2)体会极限思想.

(3)通过函数图象直观理解导数的几何意义.

2. 导数运算

(1)能根据导数定义求函数 $y=c$,$y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$,$y=\frac{1}{x}$,$y=\sqrt{x}$ 的导数.

(2)能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则,求简单函数的导数;能求简单的复合函数(限于形如 $f(ax+b)$)的导数.

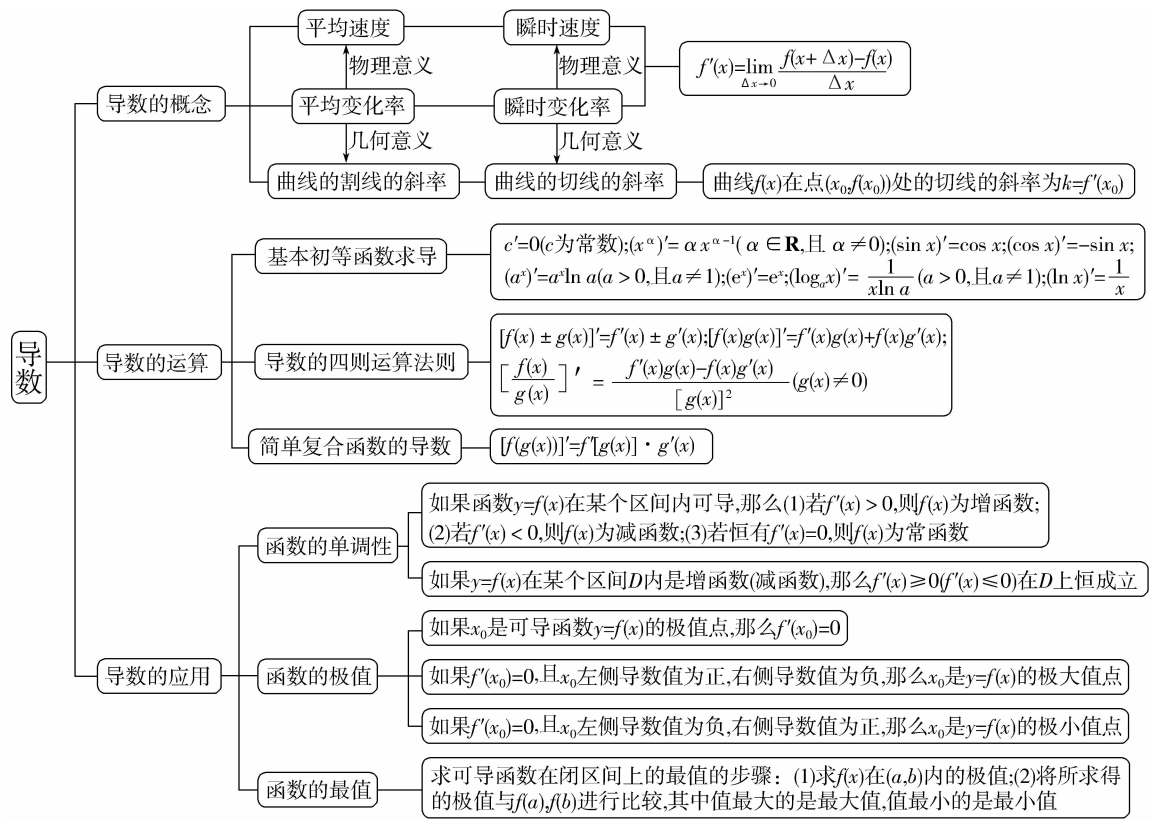
(3)会使用导数公式表.

3. 导数在研究函数中的应用

(1)结合实例,借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系;能利用导数研究函数的单调性;对于多项式函数,能求不超过三次的多项式函数的单调区间.

(2)借助函数的图象,了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件;能利用导数求某些函数的极大值、极小值以及给定闭区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值;体会导数与单调性、极值、最大(小)值的关系.

知识网络



二、精讲精练

5.1 导数的概念及其意义

第1课时 变化率问题及导数的概念

学习目标	核心素养
了解瞬时速度的概念及意义	数学抽象
通过抛物线 $f(x)=x^2$ 在点(1,1)处的切线,了解切线的定义	数学抽象、直观想象
理解导数的概念,会利用导数的定义求函数在某点处的导数	数学抽象、数学运算
理解函数的平均变化率的意义,会求具体函数的平均变化率	数学抽象、数学运算

自主预习

知新预学

1. 瞬时速度

我们把物体在某一时刻的速度称为瞬时速度.

2. 抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$处的切线

当点 $P(x,x^2)$沿着抛物线 $f(x)=x^2$ 无限趋近于点 $P_0(1,1)$ 时,割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置,这个确定位置的直线 P_0T 称为抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线.

3. 函数的平均变化率

对于函数 $y=f(x)$,设自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$,相应地,函数值 y 就从 $f(x_0)$变化到 $f(x_0+\Delta x)$. 这时,x 的变化量为 Δx,y 的变化量为 $\Delta y=$__$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$__. 我们把比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$,即$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$__$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$__叫做函数 $y=f(x)$从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率.

4. 导数的概念

如果当 $\Delta x\to 0$ 时,平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$无限趋近于一个确定的值,即$\frac{\Delta y}{\Delta x}$有极限,则称 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可导,并把这个确定的值叫做 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数(也称为瞬时变化率),记作 $f'(x_0)$或__$y'|_{x=x_0}$__,即 $f'(x_0)=$__$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$__$=$__$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$__.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)函数 $f(x)=c$(c 为常数)在区间$[x_1,x_2]$上的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$为 0. (√)

(2)函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数值与 Δx 值的正、负无关. (√)

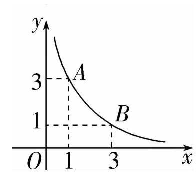
(3)在导数的定义中,Δx,Δy 都不可能为零. (×)

2. 已知函数 $y=f(x)$,设自变量 x 由 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$,则 $\Delta y=$ (D)

A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$

C. $f(x_0)\cdot\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

3. 如图,函数 $y=f(x)$在 A,B 两点间的平均变化率是 (B)



A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

【解析】$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{1-3}{2}=-1$.

4. 已知函数 $f(x)=-2x+1$,则 $f'(0.5)=$__-2__.

互动课堂

合作探究

探究1 求瞬时速度

【例1】已知质点 M 做直线运动,且位移随时间变化的函数为 $s=2t^2+3$(位移单位:cm,时间单位:s).

(1)当 $t=2$，$\Delta t=0.01$ 时，求 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$；

(2)当 $t=2$，$\Delta t=0.001$ 时，求 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$；

(3)求质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度.

【解析】 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{2(t+\Delta t)^2+3-(2t^2+3)}{\Delta t}=4t+2\Delta t$.

(1)当 $t=2$，$\Delta t=0.01$ 时，

$\frac{\Delta s}{\Delta t}=4\times2+2\times0.01=8.02(\text{cm/s})$.

(2)当 $t=2$，$\Delta t=0.001$ 时，

$\frac{\Delta s}{\Delta t}=4\times2+2\times0.001=8.002(\text{cm/s})$.

(3)当 $t=2$ 时，瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(4t+2\Delta t)=4t=4\times2=8(\text{cm/s})$.

即质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度为 8 cm/s.

点睛 求运动物体瞬时速度的三个步骤

(1)求时间改变量 Δt 和位移改变量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$；

(2)求平均速度 $\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$；

(3)求瞬时速度，当 Δt 无限趋近于 0 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 无限趋近于常数 v，即瞬时速度 $v=s'(t_0)$.

【变式训练 1】(1)已知一物体运动的位移 s 与时间 t 之间的关系为 $s=7t^2-13t+8$，且在 $t=t_0$ 时的瞬时速度为 1，则 $t_0=$__1__.

【解析】因为 $\Delta s=7(t_0+\Delta t)^2-13(t_0+\Delta t)+8-7t_0^2+13t_0-8=14t_0\cdot\Delta t-13\Delta t+7(\Delta t)^2$，

所以 $\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(14t_0-13+7\Delta t)=14t_0-13=1$，

所以 $t_0=1$.

(2)一物体做直线运动，其位移 s 与时间 t 之间的关系是 $s=3t-t^2$. 求此物体在 $t=2$ 时的瞬时速度.

【解析】取一时间段 $[2,2+\Delta t]$，

$\Delta s=s(2+\Delta t)-s(2)$

$=[3(2+\Delta t)-(2+\Delta t)^2]-(3\times2-2^2)$

$=-\Delta t-(\Delta t)^2$，

$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{-\Delta t-(\Delta t)^2}{\Delta t}=-1-\Delta t$，

$\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(-1-\Delta t)=-1$，

所以当 $t=2$ 时，此物体的瞬时速度为 -1.

探究 2 求函数的平均变化率

【例 2】已知函数 $f(x)=2x^2+3x-5$.

(1)当 $x_1=4$ 且 $\Delta x=1$ 时，求函数增量 Δy 和平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(2)当 $x_1=4$ 且 $\Delta x=0.1$ 时，求函数增量 Δy 和平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3)分析(1)(2)中的平均变化率的几何意义.

【解析】因为 $f(x)=2x^2+3x-5$，

所以 $\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$

$=2(x_1+\Delta x)^2+3(x_1+\Delta x)-5-(2x_1^2+3x_1-5)$

$=2[(\Delta x)^2+2x_1\Delta x]+3\Delta x$

$=2(\Delta x)^2+(4x_1+3)\Delta x$.

(1)当 $x_1=4$，$\Delta x=1$ 时，$\Delta y=2\times1^2+(4\times4+3)\times1=21$，

则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{21}{1}=21$.

(2)当 $x_1=4$，$\Delta x=0.1$ 时，

$\Delta y=2\times0.1^2+(4\times4+3)\times0.1=0.02+1.9=1.92$，

则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.92}{0.1}=19.2$.

(3)在(1)中，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(4)}{5-4}$，它表示抛物线上点 $A(4,39)$ 与点 $B(5,60)$ 连线的斜率；

在(2)中，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4.1)-f(4)}{4.1-4}$，它表示抛物线上点 $A(4,39)$ 与点 $C(4.1,40.92)$ 连线的斜率.

点睛 求函数平均变化率的步骤

(1)求自变量的变化量 $\Delta x=x_2-x_1$；

(2)求函数值的变化量 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$；

(3)求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

[注意]Δx，Δy 的值可正、可负，但 $\Delta x\neq0$、Δy 可为零. 若函数 $f(x)$ 为常数函数，则 $\Delta y=0$.

【变式训练 2】(1)已知函数 $y=3x-x^2$ 在 $x_0=2$ 处的增量为 $\Delta x=0.1$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ (B)

A. -0.11　　B. -1.1

C. 3.89　　D. 0.29

【解析】因为 $\Delta y=f(2+0.1)-f(2)=3\times2.1-2.1^2-6+4=-0.11$. 所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.1$.

(2)求函数 $f(x)=2x^2+3$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率，并求当 $x_0=2$，$\Delta x=\frac{1}{2}$ 时该函数的平均变化率.

【解析】当自变量从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\frac{[2(x_0+\Delta x)^2+3]-(2x_0^2+3)}{\Delta x}$

$=\frac{4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x$.

当 $x_0=2$，$\Delta x=\frac{1}{2}$ 时，

平均变化率的值为 $4\times2+2\times\frac{1}{2}=9$.

探究3 利用定义求函数在某点处的导数

【例3】求函数 $f(x)=3x^2-2x$ 在 $x=1$ 处的导数.

【解析】$\Delta y=3(1+\Delta x)^2-2(1+\Delta x)-(3\times1^2-2\times1)$

$=3(\Delta x)^2+4\Delta x$,

因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{3(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}=3\Delta x+4$,

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(3\Delta x+4)=4$.

点睛 求函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的步骤

求函数的增量 →	$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
↓ 求函数的平均变化率 →	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
↓ 取极限,得导数 →	$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

简称:一差、二比、三极限.

【变式训练3】(1)函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数为 (B)

A. $2x$　　B. 2

C. $2+\Delta x$　　D. 1

【解析】$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(2+\Delta x)=2$.

(2)已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}$ 且 $f'(m)=-\dfrac{1}{2}$,则 m 的值为 (D)

A. -4　　B. 2

C. -2　　D. ±2

【解析】因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(m+\Delta x)-f(m)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\frac{2}{m+\Delta x}-\frac{2}{m}}{\Delta x}=\dfrac{-2}{m(m+\Delta x)}$,

所以 $f'(m)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-2}{m(m+\Delta x)}=-\dfrac{2}{m^2}$,

所以 $-\dfrac{2}{m^2}=-\dfrac{1}{2}$,$m^2=4$,解得 $m=\pm2$.

随堂小练

1. 已知一物体做直线运动,其位移 s 与时间 t 之间的关系为 $s(t)=-t^2+2t$,则当 $t=0$ 时,其速度为 (D)

A. -2　　B. -1

C. 0　　D. 2

【解析】因为 $s'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{-(t+\Delta t)^2+2(t+\Delta t)-(-t^2+2t)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to0}(-2t+2-\Delta t)=-2t+2$,

所以 $s'(0)=-2\times0+2=2$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处存在导数,则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=$ (A)

A. $\dfrac{1}{3}f'(1)$　　B. $f'(1)$

C. $3f'(1)$　　D. $f'(3)$

【解析】$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(1)$.

3. 已知函数 $y=x^3-2$,当 $x=2$ 时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$ $\underline{(\Delta x)^2+6\Delta x+12}$.

【解析】因为 $\Delta y=(2+\Delta x)^3-2-6=(\Delta x)^3+6(\Delta x)^2+12\Delta x$,所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^2+6\Delta x+12$.

4. 求函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

【解析】因为 $\Delta y=(1+\Delta x)-\dfrac{1}{1+\Delta x}-(1-1)$

$=\Delta x+\dfrac{\Delta x}{1+\Delta x}$,

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x+\frac{\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=1+\dfrac{1}{1+\Delta x}$.

当 $\Delta x\to0$ 时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to2$,

所以函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数为 2.

温馨提示:请自主完成课后作业(十四)

课后作业 · 单独成册

第 2 课时　导数的几何意义

学习目标	核心素养
理解导数的几何意义，会求曲线在某点处的切线方程	数学抽象、数学运算
理解导函数的定义，会用定义法求简单函数的导函数	数学抽象、数学运算

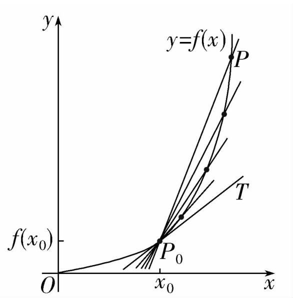
自主预习

知新预学

1. 导数的几何意义

(1)切线的定义

如图，在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $P(x,f(x))$，如果当点 $P(x,f(x))$ 沿着曲线 $y=f(x)$ 无限趋近于点 $P_0(x_0,f(x_0))$ 时，割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置，这个确定位置的<u>直线 P_0T</u>称为曲线 $y=f(x)$ 在点 P_0 处的切线.



(2)切线的斜率

曲线在某一点处切线的斜率，即当横坐标间隔 Δx 无限趋近于 0 时，割线的斜率 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的极限，即 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

(3)导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，就是切线 P_0T 的斜率 k_0，即 $k_0=$<u>$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$</u>$=f'(x_0)$.

2. 导函数的概念

从求函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的过程可以看到，当 $x=x_0$ 时，$f'(x_0)$ 是一个唯一确定的数. 这样，当 x 变化时，$y=f'(x)$ 就是 x 的函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的导函数(简称导数). $y=f(x)$ 的导函数有时也记作 y'，即 $f'(x)=y'=$<u>$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$</u>.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)函数 $y=f(x)$ 在某一点处的导数 $f'(x_0)$ 是一个常数.　(√)

(2)函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值.　(√)

(3)函数 $f(x)=0$ 没有导数.　(×)

(4)直线与曲线相切，则直线与该曲线只有一个公共点.　(×)

2. 曲线 $y=3x^2$ 在点(1,3)处的切线的斜率为　(C)

A. 3　　B. -3

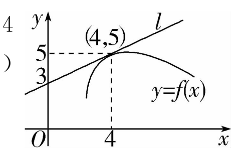
C. 6　　D. -6

【解析】令 $y=f(x)$，

因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=3(1+\Delta x)^2-3=6\Delta x+3(\Delta x)^2$，

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=6+3\Delta x$，所以切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=6$.

3. 如图，直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=4$ 处的切线，则 $f'(4)=$　(A)



A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 3

C. 4　　D. 5

【解析】根据导数的几何意义知 $f'(4)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=4$ 处的切线的斜率 k，注意到 $k=\dfrac{5-3}{4-0}=\dfrac{1}{2}$，所以 $f'(4)=\dfrac{1}{2}$.

4. 曲线 $y=-2x^2+x$ 在点$(1,-1)$处的切线方程为<u>$3x+y-2=0$</u>.

【解析】因为切线的斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2(1+\Delta x)^2+1+\Delta x+1}{\Delta x}=-3$，

所以切线方程为 $y+1=-3(x-1)$，即 $3x+y-2=0$.

互动课堂

合作探究

探究 1　求曲线的切线方程

【例 1】已知曲线 C：$f(x)=x^3+x$.

(1)求曲线 C 在点(1,2)处切线的斜率；

(2)设曲线 C 上任意一点处切线的倾斜角为 α,求 α 的取值范围.

【解析】因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)-x^3-x}{\Delta x}$

$=3x^2+3x\cdot\Delta x+1+(\Delta x)^2$,

所以 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+1+(\Delta x)^2]$

$=3x^2+1$.

(1)曲线 C 在点(1,2)处切线的斜率 $k=f'(1)=3\times1^2+1=4$.

(2)曲线 C 在任意一点处切线的斜率 $k=f'(x)=\tan\alpha$,

所以 $\tan\alpha=3x^2+1\geqslant1$.

又 $\alpha\in[0,\pi)$,所以 $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

点睛 (1)求曲线上某点处切线方程的步骤

求斜率—求出曲线在点$(x_0,f(x_0))$处切线的斜率$f'(x_0)$

↓

写方程—用点斜式$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$写出切线方程

↓

变形式—将点斜式变为一般式

(2)求曲线过曲线外的点 $P(x_1,y_1)$的切线方程的步骤

①设切点为 $Q(x_0,y_0)$;

②求出函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$;

③利用 Q 在曲线上和 $f'(x_0)=k_{PQ}$,解出 x_0,y_0 及 $f'(x_0)$;

④根据直线的点斜式方程,得切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

【变式训练 1】(1)求过点 $P(-1,2)$且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$处的切线平行的直线.

【解析】因为曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$处的切线的斜率 $k=y'|_{x=1}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)+2-(3-4+2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3\Delta x+2)=2$,

所以过点 $P(-1,2)$的直线的斜率为 2.

由直线的点斜式,得 $y-2=2(x+1)$,

即 $2x-y+4=0$,

所以所求直线的方程为 $2x-y+4=0$.

(2)求抛物线 $f(x)=x^2$ 过点$\left(\dfrac{5}{2},6\right)$的切线方程.

【解析】由于点$\left(\dfrac{5}{2},6\right)$不在抛物线上,

所以可设切点为(x_0,x_0^2).

因为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$,

所以该切线的斜率为 $2x_0$.

又因为此切线过点$\left(\dfrac{5}{2},6\right)$和点$(x_0,x_0^2)$,

所以$\dfrac{x_0^2-6}{x_0-\dfrac{5}{2}}=2x_0$,即 $x_0^2-5x_0+6=0$,

解得 $x_0=2$ 或 $x_0=3$.

因此切点为(2,4)或(3,9),

所以切线方程分别为 $y-4=4(x-2)$,$y-9=6(x-3)$,即 $4x-y-4=0$,$6x-y-9=0$.

探究 2 求切点坐标

【例 2】已知抛物线 $y=2x^2+1$ 的切线分别满足下列条件,求对应切点的坐标.

(1)切线的倾斜角为 45°;

(2)切线平行于直线 $4x-y-2=0$;

(3)切线垂直于直线 $x+8y-3=0$.

【解析】设切点坐标为(x_0,y_0),切线斜率为 k,

则 $\Delta y=2(x_0+\Delta x)^2+1-2x_0^2-1$

$=4x_0\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2$,

所以$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x_0+2\Delta x)=4x_0$,即 $y'|_{x=x_0}=4x_0$.

(1)因为抛物线的切线的倾斜角为 45°,

所以斜率为 $\tan45°=1$,即 $4x_0=1$,解得 $x_0=\dfrac{1}{4}$,

所以切点坐标为$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{9}{8}\right)$.

(2)因为抛物线的切线平行于直线 $4x-y-2=0$,

所以 $k=4$,即 $4x_0=4$,解得 $x_0=1$,

所以切点坐标为(1,3).

(3)因为抛物线的切线与直线 $x+8y-3=0$ 垂直,

所以 $k\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)=-1$,即 $k=8$,

所以 $4x_0=8$,解得 $x_0=2$,

所以切点坐标为(2,9).

点睛 求满足某条件的曲线的切点坐标的步骤

(1)先设切点坐标(x_0,y_0);

(2)求导函数 $f'(x)$;

(3)求切线的斜率 $f'(x_0)$;

(4)由斜率间的关系列出关于 x_0 的方程,解方程求出 x_0;

(5)将(x_0,y_0)代入 $f(x)$求出 y_0 可得切点坐标.

【变式训练 2】(1)已知曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 的一条切线的斜率为$\dfrac{1}{2}$,则切点的横坐标为 (A)

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

【解析】因为 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}$,所以 $x=1$,

所以切点的横坐标为 1.

(2)已知曲线 $f(x)=x^2+6$ 在点 P 处的切线平行于直线 $4x-y-3=0$,求点 P 的坐标.

【解析】设切点 P 的坐标为(x_0,y_0).

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+6-(x^2+6)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

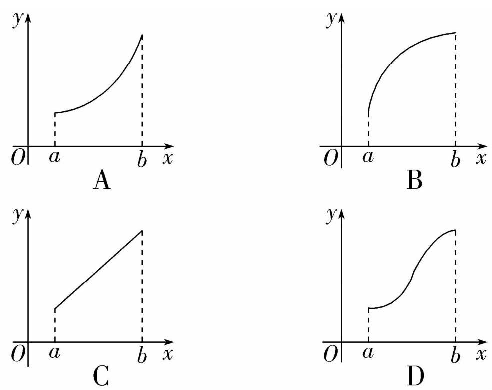
所以点 P 在(x_0,y_0)处的切线的斜率为 $2x_0$.

因为切线与直线 $4x-y-3=0$ 平行,

所以 $2x_0=4$,$x_0=2$,$y_0=x_0^2+6=10$,即切点为$(2,10)$.

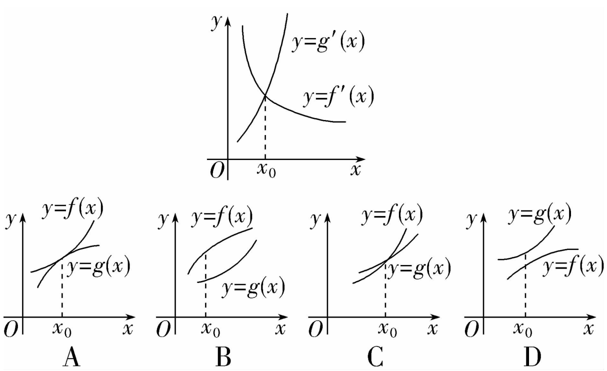
探究 3　导数几何意义的应用

【例 3】(1)若函数 $y=f(x)$的导函数在区间$[a,b]$上是增函数,则函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象可能是下图中的　　(　A　)



【解析】由导数的几何意义知导函数递增说明函数切线斜率随 x 增大而变大.

(2)已知函数 $y=f(x)$,$y=g(x)$的导函数的图象如图所示,那么 $y=f(x)$,$y=g(x)$的图象可能是　　(　D　)

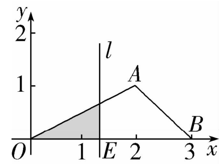


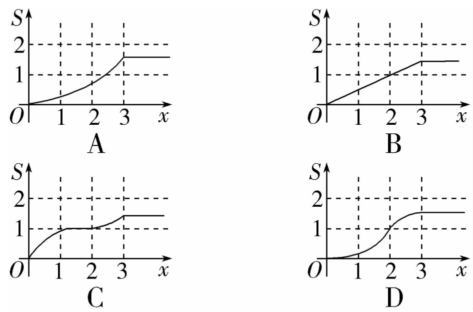
【解析】由 $y=f'(x)$的图象,知 $y=f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,说明函数 $y=f(x)$的切线的斜率越来越小,故可排除 A,C. 又由图象知 $y=f'(x)$与 $y=g'(x)$的图象在 $x=x_0$ 处相交,说明 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图象在 $x=x_0$ 处的切线的斜率相同,故可排除 B.

点睛 导数与函数图象升降的关系

若函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可导且 $f'(x_0)>0$(即切线的斜率大于零),则函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 附近的图象是上升的;若 $f'(x_0)<0$(即切线的斜率小于零),则函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 附近的图象是下降的. 导数绝对值的大小反映了曲线上升和下降的快慢.

【变式训练 3】如图,点 $A(2,1)$,$B(3,0)$,$E(x,0)(x\geq 0)$,过点 E 作 OB 的垂线 l. 记△AOB 在直线 l 左侧部分的面积为 S,则函数 $S=f(x)$的图象为下图中的　　(　D　)





【解析】函数的定义域为$(0,+\infty)$.

当 $x\in[0,2]$时,在单位长度变化量 Δx 内面积变化量 ΔS 越来越大,即斜率 $f'(x)$在$[0,2]$内越来越大,因此,函数 $S=f(x)$的图象是上升的,且图象是下凸的;

当 $x\in(2,3)$时,在单位长度变化量 Δx 内面积变化量 ΔS 越来越小,即斜率 $f'(x)$在$(2,3)$内越来越小,因此,函数 $S=f(x)$的图象是上升的,且图象是上凸的;

当 $x\in[3,+\infty)$时,在单位长度变化量 Δx 内面积变化量 ΔS 为 0,即斜率 $f'(x)$在$[3,+\infty)$内为常数 0,因此,函数图象是平行于 x 轴的射线.

随堂小练

1. 曲线 $f(x)=\dfrac{9}{x}$ 在点$(3,3)$处的切线的倾斜角等于　(　C　)

A. 45°　　B. 60°

C. 135°　　D. 120°

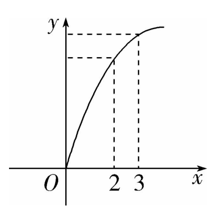
【解析】$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$

$$9\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=-9\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(x+\Delta x)x}=-\frac{9}{x^2},$$

所以 $f'(3)=-1$. 又切线的倾斜角的范围为$[0°,180°)$,

所以所求倾斜角为 135°.

2. 已知函数 $f(x)$的图象如图所示,$f'(x)$是 $f(x)$的导函数,则下列结论正确的是　　(　B　)



A. $0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

B. $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

C. $0<f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$

D. $0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$

【解析】从图象上可以看出 $f(x)$在 $x=2$ 处的切线的斜率比

在 $x=3$ 处的斜率大，且均为正数，所以有 $0<f'(3)<f'(2)$. 过此两点的割线的斜率 $\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$ 比 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线的斜率小，比 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的斜率大，所以 $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$.

3. 抛物线 $y=ax^2$ 在点 $Q(2,1)$ 处的切线方程为 $x-y-1=0$，则 a 的值为 $\underline{\frac{1}{4}}$.

【解析】 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a(\Delta x+2)^2-a\cdot 2^2}{\Delta x}=4a=1$，

所以 $a=\frac{1}{4}$.

4. 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 的交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积.

【解析】 联立两曲线方程得 $\begin{cases}y=\frac{1}{x},\\ y=x^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$

即交点坐标为 $(1,1)$.

又曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率为

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{1+\Delta x}=-1,$$

所以曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=-(x-1)$，

即 $y=-x+2$.

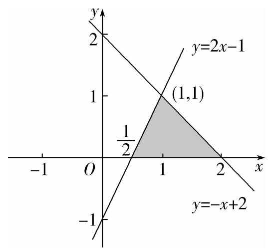
而曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率为

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2,$$

所以曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，

即 $y=2x-1$.

两条切线方程 $y=-x+2$ 和 $y=2x-1$ 与 x 轴所围成的图形如图中阴影部分所示.



所以 $S=\frac{1}{2}\times 1\times\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，

即三角形的面积为 $\frac{3}{4}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十五）

课后作业 · 单独成册

5.2 导数的运算

第 1 课时 基本初等函数的导数

学习目标	核心素养
能应用导数的定义求几个常见函数的导数	逻辑推理
掌握基本初等函数的导数公式	数学运算

自主预习

知新预学

1. 几个常用函数的导数

函数	导数
$f(x)=c$(c 为常数)	$f'(x)=$__0__
$f(x)=x$	$f'(x)=$__1__
$f(x)=x^2$	$f'(x)=$__$2x$__
$f(x)=x^3$	$f'(x)=$__$3x^2$__
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=$__$-\dfrac{1}{x^2}$__
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=$__$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$__

2. 基本初等函数的导数公式

函数	导数
$f(x)=c$(c 为常数)	$f'(x)=$__0__
$f(x)=x^{\alpha}$($\alpha\in\mathbf{R}$,且 $\alpha\neq0$)	$f'(x)=$__$\alpha x^{\alpha-1}$__
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=$__$\cos x$__
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=$__$-\sin x$__
$f(x)=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$)	$f'(x)=$__$a^x\ln a$__
$f(x)=e^x$	$f'(x)=$__e^x__
$f(x)=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq1$)	$f'(x)=$__$\dfrac{1}{x\ln a}$__
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=$__$\dfrac{1}{x}$__

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)$\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)'=\cos\dfrac{\pi}{3}$. (×)

(2)因为$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,所以$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\ln x$. (×)

(3)若 $f'(x)=\sin x$,则 $f(x)=\cos x$. (×)

2. 下列结论正确的是 (D)

A. 若 $y=2$,则 $y'=2$　　B. 若 $y=\dfrac{1}{x}$,则 $y'=\dfrac{1}{x^2}$

C. 若 $y=x^2$,则 $y'=x$　　D. 若 $y=x$,则 $y'=1$

3. 曲线 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 处的切线的倾斜角是 (D)

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

【解析】由题知,$y'=\cos x$,

所以 $y'|_{x=0}=\cos 0=1$. 设此切线的倾斜角为 α,则 $\tan\alpha=1$.

因为 $\alpha\in[0,\pi)$,所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

4. 若 $f(x)=2^x$,则 $f'\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)=$__$e\ln 2$__.

【解析】因为 $f(x)=2^x$,所以 $f'(x)=2^x\ln 2$,

所以 $f'\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)=f'(\log_2 e)=2^{\log_2 e}\ln 2=e\ln 2$.

互动课堂

合作探究

探究 1　运用导数公式求导数

【例 1】求下列函数的导数:

(1)$y=2\ 023$;　(2)$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

(3)$y=3^x$;　(4)$y=\log_3 x$.

【解析】(1)因为 $y=2\ 023$,所以 $y'=(2\ 023)'=0$.

(2)因为 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$,

所以 $y'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$.

(3)因为 $y=3^x$，所以 $y'=3^x\ln 3$.

(4)因为 $y=\log_3 x$，所以 $y'=\frac{1}{x\ln 3}$.

点睛 用公式求函数导数的方法

(1)若所求函数符合基本初等函数的导数公式，则直接用公式求解.

(2)对于不能直接利用公式的类型，则应先将函数的关系式合理转化为可以直接用公式的基本函数的形式，如 $y=\frac{1}{x^4}$ 可以写成 $y=x^{-4}$，$y=\sqrt[5]{x^3}$ 可以写成 $y=x^{\frac{3}{5}}$，等等，这样就可以直接使用幂函数的求导公式进行求导，避免在求导过程中出现指数或系数的运算失误.

【变式训练 1】(1)已知 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(4)=$ (B)

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. -2　　D. 2

【解析】因为 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以 $f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$.

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x<0,\\ \ln x, 0<x<1.\end{cases}$ 若 $f'(a)=12$，则实数 $a=$ $\underline{\frac{1}{12}\text{或}-2}$.

【解析】$f'(x)=\begin{cases}3x^2, x<0,\\ \frac{1}{x}, 0<x<1,\end{cases}$

若 $f'(a)=12$，则

$\begin{cases}0<a<1,\\ \frac{1}{a}=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ 3a^2=12,\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{12}$ 或 $a=-2$.

探究 2 利用导数研究曲线的切线方程

【例 2】(1)求过曲线 $y=\sin x$ 上一点 $P\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ 且与过这点的切线垂直的直线方程.

【解析】因为 $y=\sin x$，所以 $y'=\cos x$，

曲线在点 $P\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率是

$y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以过点 P 且与切线垂直的直线的斜率为 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$，

故所求的直线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，

即 $2x+\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=0$.

(2)已知点 $P(-1,1)$，$Q(2,4)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的两点，求与直线 PQ 平行的曲线 $y=x^2$ 的切线方程.

【解析】因为 $y'=(x^2)'=2x$，

设切点为 $M(x_0,y_0)$，则 $y'|_{x=x_0}=2x_0$.

又因为直线 PQ 的斜率为 $k=\frac{4-1}{2+1}=1$，而切线平行于直线 PQ，所以 $k=2x_0=1$，即 $x_0=\frac{1}{2}$，所以切点 M 为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

所以所求的切线方程为 $y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2}$，

即 $4x-4y-1=0$.

点睛 (1)用导数的几何意义解决切线问题的两种情况

①若已知点是切点，则在该点处的切线斜率就是该点处的导数.

②若已知点不是切点，则应先设出切点，再借助两点连线的斜率公式进行求解.

(2)求过点 P 与曲线相切的直线方程的三个步骤

设 → 设出切点坐标 (x_0,y_0)

写 → 写出切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

求 → 代入点 P 的坐标，求出 x_0，y_0 得切线方程

【变式训练 2】已知曲线 $y=\ln x$ 的一条切线方程为 $x-y+c=0$，求 c 的值.

【解析】设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，

由 $y=\ln x$ 得 $y'=\frac{1}{x}$.

因为曲线 $y=\ln x$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为 $x-y+c=0$，其斜率为 1.

所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}=1$，即 $x_0=1$，所以切点为 $(1,0)$.

所以 $1-0+c=0$，所以 $c=-1$.

随堂小练

1. 下列结论不正确的是 (B)

A. 若 $y=3$，则 $y'=0$

B. 若 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，则 $y'=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$

C. 若 $y=-\sqrt{x}$，则 $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

D. 若 $y=3x$，则 $y'=3$

【解析】$y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

2. 幂函数 $y=x^3$ 的图象在点 $(2,8)$ 处的切线方程为 (A)

A. $y=12x-16$

B. $y=12x+16$

C. $y=-12x-16$

D. $y=-12x+16$

【解析】因为 $y'=3x^2$，当 $x=2$ 时，$y'=12$，

故切线的斜率为 12，切线方程为 $y=12x-16$.

3. 已知函数 $f(x)=\ln x$，且 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0^2}$，则 $x_0=$ __1__.

【解析】因为 $f(x)=\ln x(x>0)$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}$，

所以 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0^2}$，所以 $x_0=1$.

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$；

(2) $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

【解析】(1) 因为 $y=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$，

所以 $y'=(\cos x)'=-\sin x$.

(2) 因为 $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x^{\frac{7}{8}}$，

所以 $y'=(x^{\frac{7}{8}})'=\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}=\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十六）

课后作业 · 单独成册

第 2 课时 导数的四则运算法则

学习目标	核心素养
理解函数的和、差、积、商的求导法则， 能运用导数公式和导数运算法则求函数的导数	数学运算
会用导数的四则运算法则解决相关问题	数学运算

自主预习

知新预学

导数的运算法则

设两个函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$，我们有如下法则：

两个函数的和的导数	$[f(x)+g(x)]'=$ __$f'(x)+g'(x)$__
两个函数的差的导数	$[f(x)-g(x)]'=$ __$f'(x)-g'(x)$__
两个函数的积的导数	$[f(x)g(x)]'=$ __$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$__
两个函数的商的导数	$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$ __$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq 0)$__

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1) $\left(e^x+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)'=e^x$. (√)

(2) 函数 $f(x)=\sin(-x)$ 的导数为 $f'(x)=\cos x$. (×)

2. 函数 $y=x^2\sin x$ 的导数为 (D)

A. $y'=2x+\cos x$ B. $y'=x^2\cos x$

C. $y'=2x\cos x$ D. $y'=2x\sin x+x^2\cos x$

【解析】$y'=(x^2\sin x)'=(x^2)'\cdot\sin x+x^2\cdot(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$.

3. 若函数 $f(x)=\cos x+\ln x$，则 $f'(1)=$ (A)

A. $1-\sin 1$ B. $1+\sin 1$

C. $\sin 1-1$ D. $-\sin 1$

【解析】因为 $f(x)=\cos x+\ln x$，

所以 $f'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{x}$，

所以 $f'(1)=1-\sin 1$.

4. 若 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则 $f'(x)=$ __$\dfrac{1-x}{e^x}$__.

【解析】$f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}$.

互动课堂

合作探究

探究 1 导数运算法则的运用

【例 1】求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{2x^3-3x+\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}$；

(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$；

(3) $y=(x+1)(x+3)(x+5)$；

(4) $y=x\sin x-\dfrac{2}{\cos x}$.

【解析】(1) 因为 $y=2x^{\frac{3}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}$，

所以 $y'=3x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}-x^{-2}-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$.

(2) 方法一：$y'=\dfrac{(x^2+1)'(x^2+3)-(x^2+1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{2x(x^2+3)-2x(x^2+1)}{(x^2+3)^2}=\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$.

方法二：因为 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+3}=\dfrac{x^2+3-2}{x^2+3}=1-\dfrac{2}{x^2+3}$，

所以 $y'=\left(1-\dfrac{2}{x^2+3}\right)'=\left(\dfrac{-2}{x^2+3}\right)'$

$=\dfrac{(-2)'(x^2+3)-(-2)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$.

(3) 方法一：$y'=[(x+1)(x+3)]'(x+5)+(x+1)(x+3)(x+5)'=[(x+1)'(x+3)+(x+1)(x+3)'](x+5)+(x+1)(x+3)=(2x+4)(x+5)+(x+1)(x+3)=3x^2+18x+23$.

方法二：因为 $y=(x+1)(x+3)(x+5)$

$=(x^2+4x+3)(x+5)$

$=x^3+9x^2+23x+15$,

所以 $y'=(x^3+9x^2+23x+15)'=3x^2+18x+23$.

(4) $y'=(x\sin x)'-\left(\dfrac{2}{\cos x}\right)'$

$=x'\sin x+x(\sin x)'-\dfrac{2'\cos x-2(\cos x)'}{(\cos x)^2}$

$=\sin x+x\cos x-\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}$.

点睛 (1)用基本初等函数的导数公式和求导的四则运算法则可迅速解决一些简单函数的求导问题，要透彻理解函数求导法则的结构特点，熟记公式，还要注意挖掘知识的内在联系及其规律.

(2)对一个函数求导时，要紧扣导数运算法则，联系基本初等函数的导数公式，当不易直接应用导数公式时，应先对函数进行化简(恒等变形)，然后再利用公式求导.

(3)利用求导法则求导的原则是尽可能化为和、差的求导法则求导，尽量少用积、商的求导法则求导.

【变式训练 1】求下列函数的导数：

(1) $y=x^2-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$;

(2) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$;

(3) $y=x\tan x$.

【解析】(1)因为 $y=x^2-\dfrac{1}{2}\sin x$,

所以 $y'=2x-\dfrac{1}{2}\cos x$.

(2) $y'=\dfrac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

(3) $y'=(x\tan x)'=\left(\dfrac{x\sin x}{\cos x}\right)'$

$=\dfrac{(x\sin x)'\cos x-x\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(\sin x+x\cos x)\cos x+x\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\sin x\cos x+x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\sin 2x+x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\sin 2x+2x}{2\cos^2 x}$.

探究 2 利用导数求函数解析式

【例 2】(1)已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+2xf'(1)$. 试比较 $f(e)$ 与 $f(1)$ 的大小关系.

(2)设 $f(x)=(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x$，试确定常数 a,b,c,d，使 $f'(x)=x\cos x$.

【解析】(1)由题意得 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+2f'(1)$,

令 $x=1$，得 $f'(1)=\dfrac{1-\ln 1}{1}+2f'(1)$,

即 $f'(1)=-1$.

所以 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-2x$.

所以 $f(e)=\dfrac{\ln e}{e}-2e=\dfrac{1}{e}-2e$，$f(1)=-2$.

由 $f(e)-f(1)=\dfrac{1}{e}-2e+2<0$，得 $f(e)<f(1)$.

(2) $f'(x)=[(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x]'$

$=[(ax+b)\sin x]'+[(cx+d)\cos x]'$

$=(ax+b)'\sin x+(ax+b)(\sin x)'+(cx+d)'\cos x+(cx+d)(\cos x)'$

$=a\sin x+(ax+b)\cos x+c\cos x-(cx+d)\sin x$

$=(a-cx-d)\sin x+(ax+b+c)\cos x$.

又因为 $f'(x)=x\cos x$,

所以 $\begin{cases}a-d-cx=0,\\ ax+b+c=x,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a-d=0,\\ -c=0,\\ a=1,\\ b+c=0,\end{cases}$

解得 $a=d=1$，$b=c=0$.

点睛 (1)中确定函数 $f(x)$ 的解析式，需要求出 $f'(1)$，注意 $f'(1)$ 是常数.

(2)中利用待定系数法可确定 a,b,c,d 的值.

完成(1)(2)问的前提是熟练运用导数的运算法则.

【变式训练 2】已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}+2xf'(1)$，则 $f'(1)=$ __1__.

【解析】对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=\dfrac{2x-1-2x}{(2x-1)^2}+2f'(1)=\dfrac{-1}{(2x-1)^2}+2f'(1)$，所以 $f'(1)=-1+2f'(1)$,

所以 $f'(1)=1$.

探究 3 与切线有关的问题

【例 3】已知函数 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq 0)$，其导函数为 $f'(x)=2x-8$.

(1)求 a,b 的值；

(2)设函数 $g(x)=e^x\sin x+f(x)$，求曲线 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

【解析】(1)因为 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq 0)$,

所以 $f'(x)=2ax+b$.

又知 $f'(x)=2x-8$，所以 $a=1$，$b=-8$.

(2)由(1)可知 $g(x)=e^x\sin x+x^2-8x+3$,

所以 $g'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+2x-8$,

所以 $g'(0)=e^0\sin 0+e^0\cos 0+2\times 0-8=-7$.

又知 $g(0)=3$，所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-3=-7(x-0)$，即 $7x+y-3=0$.

点睛（1）此类问题往往涉及切点、切点处的导数、切线方程三个要素，其他的条件可以转化为这三个要素间的关系.

（2）准确利用求导法则求出导函数是解决此类问题的第一步，也是解题的关键.

（3）分清已知点是否在曲线上，若不在曲线上，则要设出切点，这是解题的易错点.

【变式训练 3】（1）设曲线 $y=\dfrac{2-\cos x}{\sin x}$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},2\right)$ 处的切线与直线 $x+ay+1=0$ 垂直，则 $a=$__1__.

【解析】因为 $y'=\dfrac{\sin^2 x-(2-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{1-2\cos x}{\sin^2 x}$，

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y'=\dfrac{1-2\cos\dfrac{\pi}{2}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2}}=1$.

又直线 $x+ay+1=0$ 的斜率是 $-\dfrac{1}{a}$，

所以 $-\dfrac{1}{a}=-1$，即 $a=1$.

（2）设函数 $f(x)=g(x)+x^2$，曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为__4__.

【解析】因为曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+1$，由导数的几何意义知 $g'(1)=2$.

又因为 $f(x)=g(x)+x^2$，

所以 $f'(x)=g'(x)+2x\Rightarrow f'(1)=g'(1)+2=4$.

所以 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为 4.

随堂小练

1. 若 $y=-2e^x\sin x$，则 $y'=$ （ D ）

A. $-2e^x\cos x$　　B. $-2e^x\sin x$

C. $2e^x\sin x$　　D. $-2e^x(\sin x+\cos x)$

【解析】$y'=-2(e^x\sin x+e^x\cos x)$

$=-2e^x(\sin x+\cos x)$.

2. 函数 $y=\dfrac{\cos x}{1-x}$ 的导数是 （ C ）

A. $\dfrac{-\sin x+x\sin x}{(1-x)^2}$

B. $\dfrac{x\sin x-\sin x-\cos x}{(1-x)^2}$

C. $\dfrac{\cos x-\sin x+x\sin x}{(1-x)^2}$

D. $\dfrac{\cos x-\sin x+x\sin x}{1-x}$

【解析】$y'=\left(\dfrac{\cos x}{1-x}\right)'$

$=\dfrac{(-\sin x)(1-x)-\cos x\cdot(-1)}{(1-x)^2}$

$=\dfrac{\cos x-\sin x+x\sin x}{(1-x)^2}$.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln x-\dfrac{2k}{x}$. 若 $f'(1)=1$，则 $k=$ （ A ）

A. $\dfrac{e}{2}$　　B. $\dfrac{e}{3}$

C. $-\dfrac{e}{2}$　　D. $-\dfrac{e}{3}$

【解析】因为 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2k}{x^2}$，

所以 $f'(1)=-e+1+2k=1$，解得 $k=\dfrac{e}{2}$.

4. 在平面直角坐标系中，若曲线 $y=ax^2+\dfrac{b}{x}$（a,b 为常数）过点 $P(2,-5)$，且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行，则 $a+b$ 的值是__-3__.

【解析】$y=ax^2+\dfrac{b}{x}$ 的导数为 $y'=2ax-\dfrac{b}{x^2}$，

直线 $7x+2y+3=0$ 的斜率为 $-\dfrac{7}{2}$.

由题意得 $\begin{cases}4a+\dfrac{b}{2}=-5,\\ 4a-\dfrac{b}{4}=-\dfrac{7}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-2,\end{cases}$

所以 $a+b=-3$.

5. 曲线 $y=x^3+3x^2+6x-10$ 的切线中，求斜率最小的切线方程.

【解析】因为 $y'=3x^2+6x+6=3(x^2+2x+2)$

$=3(x+1)^2+3\geqslant 3$，

所以当 $x=-1$ 时，斜率最小，切点坐标为 $(-1,-14)$，

所以切线方程为 $y+14=3(x+1)$，即 $3x-y-11=0$.

温馨提示：请自主完成课后作业（十七）

课后作业 · 单独成册

第 3 课时　简单复合函数的导数

学习目标	核心素养
能利用导数的运算法则推导出简单复合函数 $f(ax+b)$ 的导数，并能利用它求其他复合函数的导数	数学抽象、数学运算
会用复合函数的导数求解相关问题	数学运算

自主预习

知新预学

1. 复合函数的概念

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过中间变量 u，y 可以表示成__x 的函数__，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作__$y=f(g(x))$__.

2. 复合函数的求导法则

复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数与函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x=$__$y'_u \cdot u'_x$__，即 y 对 x 的导数等于__y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积__.

小试牛刀

1. 判断正误.（正确的打"√"，错误的打"×"）

(1)函数 $y=2x+5+\ln x$，$y=\ln(2x+5)$ 和 $y=\sin(x+2)$ 都是复合函数.　　(×)

(2)函数 $y=\ln(3x+1)$ 是函数 $y=\ln u$，$u=3x+1$ 的复合函数.　　(√)

2. 函数 $y=(x^2-1)^n$ 的复合过程正确的是　　(A)

A. $y=u^n$，$u=x^2-1$　　B. $y=(u-1)^n$，$u=x^2$

C. $y=t^n$，$t=(x^2-1)^n$　　D. $y=(t-1)^n$，$t=x^2-1$

3. 已知 $f(x)=\sin^n x$，则 $f'(x)=$　　(D)

A. $n\sin^{n-1}x$　　B. $n\cos^{n-1}x$

C. $\cos^n x$　　D. $n\sin^{n-1}x\cdot\cos x$

【解析】由于 $f(x)=\sin^n x$，由函数 $y=t^n$，$t=\sin x$ 复合而成，所以 $y'_x=y'_t\cdot t'_x=nt^{n-1}\cdot\cos x=n\sin^{n-1}x\cdot\cos x$.

4. 已知 $f(x)=\ln(2x+5)$，则 $f'(1)=$__$\frac{2}{7}$__.

【解析】因为 $f'(x)=\frac{1}{2x+5}(2x+5)'=\frac{2}{2x+5}$，

所以 $f'(1)=\frac{2}{2\times1+5}=\frac{2}{7}$.

互动课堂

合作探究

探究 1　简单复合函数求导

【例 1】求下列函数的导数：

(1) $y=e^{\cos x+1}$；　(2) $y=\log_2(2x+1)$；

(3) $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$；　(4) $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

【解析】(1)设 $y=e^u$，$u=\cos x+1$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=e^u\cdot(-\sin x)=-e^{\cos x+1}\cdot\sin x$.

(2)设 $y=\log_2 u$，$u=2x+1$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{2}{u\ln 2}=\frac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

(3)设 $y=2\sin u$，$u=3x-\frac{\pi}{6}$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=2\cos u\times3=6\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(4)设 $y=u^{-\frac{1}{2}}$，$u=1-2x$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(u^{-\frac{1}{2}})'\cdot(1-2x)'$

$=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\times(-2)=(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$.

点睛 (1)求复合函数导数的步骤

分层	选择中间变量，写出构成它的内、外层函数
分别求导	分别求各层函数对相应变量的导数
相乘	把上述求导的结果相乘
变量回代	把中间变量回代

(2)求复合函数导数的注意点

①分解的函数通常为基本初等函数.

②求导时要分清楚是对哪个变量求导.

③计算结果尽量简洁.

【变式训练 1】求下列函数的导数：

(1) $y=10^{3x-2}$；

(2) $y=\ln(e^x+x^2)$；

(3) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

【解析】(1)令 $u=3x-2$，则 $y=10^u$，

所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=10^u\ln 10\cdot(3x-2)'$

$=3\times 10^{3x-2}\cdot\ln 10$.

(2)令 $u=e^x+x^2$，则 $y=\ln u$，所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{u}\cdot(e^x+x^2)'=\frac{1}{e^x+x^2}\cdot(e^x+2x)=\frac{e^x+2x}{e^x+x^2}$.

(3)因为 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$，

所以 $y'=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)'=-\sin 4x$.

探究 2 复合函数与导数的运算法则的综合应用

【例 2】求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{\ln 3x}{e^x}$；

(2) $y=x\sqrt{1+x^2}$；

(3) $y=x\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

【解析】(1)因为 $(\ln 3x)'=\frac{1}{3x}\times(3x)'=\frac{1}{x}$，

所以 $y'=\frac{(\ln 3x)'e^x-(\ln 3x)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-\ln 3x}{e^x}=\frac{1-x\ln 3x}{xe^x}$.

(2)因为 $(\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(1+x^2)'$

$=x\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

$y'=(x\sqrt{1+x^2})'=x'\sqrt{1+x^2}+x(\sqrt{1+x^2})'$

$=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$.

(3)因为 $y=x\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=x(-\sin 2x)\cos 2x=-\frac{1}{2}x\sin 4x$，

所以 $y'=\left(-\frac{1}{2}x\sin 4x\right)'$

$=-\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{x}{2}\cos 4x\cdot 4$

$=-\frac{1}{2}\sin 4x-2x\cos 4x$.

点睛 (1)在对函数求导时，应仔细观察及分析函数的结构特征，紧扣求导法则，联系学过的求导公式，对不易用求导法则求导的函数，可适当地进行等价变形，以达到化异求同、化繁为简的目的.

(2)复合函数的求导熟练后，中间步骤可以省略，即不必再写出函数的复合过程，直接运用公式，从外层开始由外及内逐层求导.

【变式训练 2】求下列函数的导数：

(1) $y=\sin^2\frac{x}{3}$； (2) $y=\sin^3 x+\sin x^3$；

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$； (4) $y=x\ln(1+x)$.

【解析】(1)因为 $y=\frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}$，

所以 $y'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{2x}{3}}{2}\right)'=\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}$.

(2) $y'=(\sin^3 x+\sin x^3)'=(\sin^3 x)'+(\sin x^3)'$

$=3\sin^2 x\cos x+\cos x^3\cdot 3x^2$

$=3\sin^2 x\cos x+3x^2\cos x^3$.

(3) $y'=\frac{0-(\sqrt{1-x})'}{1-x}=\frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)'}{1-x}$

$=\frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$.

(4) $y'=x'\ln(1+x)+x[\ln(1+x)]'$

$=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$.

探究 3 复合函数的导数与导数几何意义的综合应用

【例 3】设 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{3}{2}x$ 在(0,0)点相切，求 a,b 的值.

【解析】由曲线 $y=f(x)$ 过(0,0)点，

可得 $\ln 1+1+b=0$，故 $b=-1$.

由 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}+ax+b$，得

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+a$，

则 $f'(0)=1+\frac{1}{2}+a=\frac{3}{2}+a$，

即为曲线 $y=f(x)$ 在点(0,0)处的切线的斜率.

由题意，得 $\frac{3}{2}+a=\frac{3}{2}$，故 $a=0$.

点睛 正确地求出复合函数的导数是解答此类题目的前提，审题时注意所给点是否为切点，挖掘题目的隐含条件，求出参数. 解决已知经过一定点的切线问题，寻求切点是解决问题的关键.

【变式训练 3】曲线 $y=e^{\sin x}$ 在(0,1)处的切线与直线 l 平行，且与 l 的距离为 $\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

【解析】设 $u=\sin x$，

则 $y'=(e^{\sin x})'=(e^u)'(\sin x)'=\cos x\cdot e^{\sin x}$，

即 $y'|_{x=0}=1$，因为直线 l 与切线平行，可设直线 l 的方程为 $x-y+c=0$.

两平行线间的距离 $d=\frac{|c-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

可得 $c=3$ 或 $c=-1$.

故直线 l 的方程为 $x-y+3=0$ 或 $x-y-1=0$.

随堂小练

1. 函数 $y=(2\ 023-8x)^3$ 的导数等于 (C)

A. $3(2\ 023-8x)^2$　　B. $-24x$

C. $-24(2\ 023-8x)^2$　　D. $24(2\ 023-8x)^2$

【解析】$y'=3(2\ 023-8x)^2\times(2\ 023-8x)'$

$=3(2\ 023-8x)^2\times(-8)=-24(2\ 023-8x)^2$.

2. 函数 $y=x^2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的导数为 (B)

A. $2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-x^2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

B. $2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2x^2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $x^2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2x\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

D. $2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2x^2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

【解析】$y'=(x^2)'\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+x^2\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]'$

$=2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+x^2\left[-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)'$

$=2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2x^2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 函数 $y=\frac{1}{(3x-1)^2}$ 的导数是 (C)

A. $\frac{6}{(3x-1)^3}$　　B. $\frac{6}{(3x-1)^2}$

C. $-\frac{6}{(3x-1)^3}$　　D. $-\frac{6}{(3x-1)^2}$

【解析】$y'=\left[\frac{1}{(3x-1)^2}\right]'=\frac{-2}{(3x-1)^3}\cdot(3x-1)'$

$=\frac{-6}{(3x-1)^3}$.

4. 已知函数 $f(x)=\ln(3x-1)$，则 $f'(1)=$ $\underline{\frac{3}{2}}$.

【解析】因为 $f'(x)=\frac{1}{3x-1}\cdot(3x-1)'=\frac{3}{3x-1}$，

所以 $f'(1)=\frac{3}{2}$.

5. 若曲线 $y=e^{ax}$ 在点$(0,1)$处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，则 $a=$__2__.

【解析】由题意知 $y'|_{x=0}=ae^{ax}|_{x=0}=a=2$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十八)

课后作业·单独成册

5.3　导数在研究函数中的应用

第 1 课时　函数的单调性

学习目标	核心素养
理解导数与函数单调性的关系	数学抽象
能利用导数判断函数单调性及利用导数求函数单调区间	数学运算、逻辑推理

自主预习

知新预学

1. 函数的单调性与其导数正负的关系

在某个区间(a,b)内，如果$f'(x)>0$，那么函数$y=f(x)$在区间(a,b)内__单调递增__；如果$f'(x)<0$，那么函数$y=f(x)$在区间(a,b)内__单调递减__.

2. 利用导数判断函数$y=f(x)$的单调性的步骤

第 1 步，确定函数的__定义域__；

第 2 步，求出导数$f'(x)$的__零点__；

第 3 步，用$f'(x)$的零点将$f(x)$的定义域划分为若干个区间，列表给出$f'(x)$在各区间上的正负，由此得出函数$y=f(x)$在定义域内的单调性.

3. 一般地，设函数$y=f(x)$，在区间(a,b)内函数图象的变化趋势与导数值大小的关系如下表：

导数的绝对值	函数值变化	函数的图象
较大	较__快__	比较“__陡峭__”（向上或向下）
较小	较__慢__	比较“__平缓__”

小试牛刀

1. 判断正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1)若函数$f(x)$在定义域内都有$f'(x)>0$，则函数$f(x)$在定义域内单调递增.　（ × ）

(2)若函数$f(x)$在某区间内单调递增，则一定有$f'(x)>0$.　（ × ）

(3)函数在某个区间内变化越快，则函数在这个区间内的导数的绝对值越大.　（ √ ）

2. 下列函数中，在$(0,+\infty)$上为增函数的是　（ B ）

A. $y=\sin x$　　B. $y=xe^x$

C. $y=x^3-x$　　D. $y=\ln x-x$

3. 函数$f(x)=2x^2-x$的单调递增区间是　（ A ）

A. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$

4. 函数$f(x)=\cos x+\frac{3}{2}x$的单调递增区间是__$(-\infty,+\infty)$__.

【解析】因为$f'(x)=-\sin x+\frac{3}{2}>0$，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数.

互动课堂

合作探究

探究 1　利用导数判断或证明函数的单调性

【例 1】判断下列函数的单调性：

(1)$f(x)=2x(e^x-1)-x^2$；

(2)$f(x)=3x^2-2\ln x$.

【解析】(1)$f'(x)=2(e^x-1+xe^x-x)$

$=2(e^x-1)(x+1)$.

当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)>0$；

当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$；

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

故$f(x)$在$(-\infty,-1]$，$[0,+\infty)$上单调递增，在$(-1,0)$上单调递减.

(2)函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=6x-\frac{2}{x}=2\cdot\frac{3x^2-1}{x}$.

令$f'(x)>0$，即$2\cdot\frac{3x^2-1}{x}>0$，

解得$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<0$或$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又$x>0$，所以$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

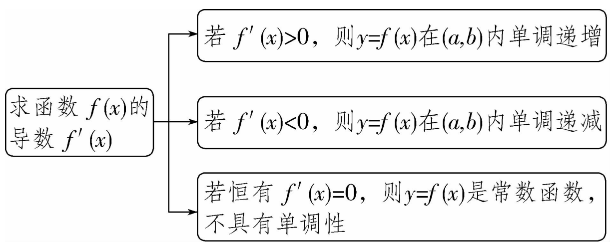
令 $f'(x)<0$，即 $2\cdot\dfrac{3x^2-1}{x}<0$，

解得 $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

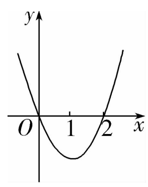
又 $x>0$，所以 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

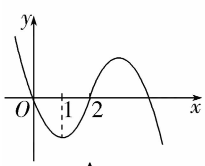
所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 上单调递减.

点睛 利用导数判断或证明函数单调性的思路

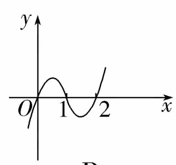


【变式训练 1】(1)已知 $f'(x)$是函数 $y=f(x)$的导函数. 若 $y=f'(x)$的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$的图象可能是 (D)

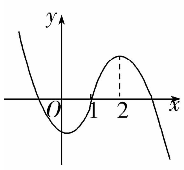




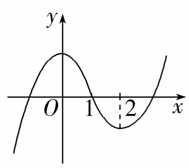
A



B



C



D

【解析】由导函数的图象可知，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，即函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上为增函数；当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，即函数 $f(x)$在$(0,2)$上为减函数；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，即函数 $f(x)$在$(2,+\infty)$上为增函数. 观察选项易知 D 正确.

(2)求证：函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$上是减函数.

【证明】由于 $f'(x)=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，并且当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$时，$\sin x<0$，$\cos x>0$，因此$-x\sin x-\cos x<0$，所以 $f'(x)=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}<0$，故 $f(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$上是减函数.

探究 2 利用导数求不含参数的函数的单调区间

【例 2】求下列函数的单调区间：

(1)$f(x)=x^2-\ln x$；

(2)$f(x)=\dfrac{e^x}{x-2}$.

【解析】(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)}{x}$.

因为 $x>0$，所以$\sqrt{2}x+1>0$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$；

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2)函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)-e^x}{(x-2)^2}=\dfrac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$.

因为 $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，

所以 $e^x>0$，$(x-2)^2>0$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>3$，所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$[3,+\infty)$；

令 $f'(x)<0$，解得 $x<3$. 又 $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，所以函数 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,2)$和$(2,3)$.

点睛 求函数 $y=f(x)$单调区间的步骤

(1)确定函数 $y=f(x)$的定义域；

(2)求导数 $y'=f'(x)$；

(3)解不等式 $f'(x)>0$，函数在解集所表示的定义域内为增函数；

(4)解不等式 $f'(x)<0$，函数在解集所表示的定义域内为减函数.

[注意]如果一个函数的单调区间不止一个，这些单调区间之间不能用“∪”连接，而只能用“逗号”或“和”字隔开.

【变式训练 2】函数 $f(x)=x^3-3x$ 的单调递减区间为 (C)

A. $(-\infty,1)$ B. $(1,+\infty)$

C. $(-1,1)$ D. $(-\infty,+\infty)$

【解析】对 $f(x)$求导得 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

令 $f'(x)<0$，即 $3(x+1)(x-1)<0$，解得$-1<x<1$.

故 $f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$.

探究 3 利用导数求含参数的函数的单调区间

【例 3】设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+x-(a+1)\ln x\ (a\geqslant 0)$，求 $f(x)$的单调区间.

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=ax+1-\dfrac{a+1}{x}=\dfrac{ax^2+x-(a+1)}{x}$.

(1)当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

由 $f'(x)>0$，得 $x>1$，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $[1,+\infty)$.

(2)当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{a\left(x+\dfrac{a+1}{a}\right)(x-1)}{x}$.

因为 $a>0$，所以 $\dfrac{a+1}{a}>0$.

由 $f'(x)>0$，得 $x>1$，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $[1,+\infty)$.

综上所述，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $[1,+\infty)$.

点睛 讨论含有参数的函数的单调性，通常归结为求含参数不等式的解集问题，而对含有参数的不等式要针对具体情况进行讨论，但要始终注意定义域对函数单调性的影响以及分类讨论的标准.

【变式训练 3】 设函数 $f(x)=e^x-ax-2$，求 $f(x)$ 的单调区间.

【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$f'(x)=e^x-a$.

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$.

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\ln a)$，单调递增区间为 $[\ln a,+\infty)$.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\ln a)$，单调递增区间为 $[\ln a,+\infty)$.

探究 4 已知函数的单调性求参数

【例 4】 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{a}{2}x^2+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$.

(1)求 b,c 的值；

(2)若 $a>0$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(3)设函数 $g(x)=f(x)+2x$，且 $g(x)$ 在区间 $(-2,-1)$ 内存在单调递减区间，求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x)=x^2-ax+b$，

由题意得 $\begin{cases}f(0)=1,\\ f'(0)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}c=1,\\ b=0.\end{cases}$

(2)由(1)得，$f'(x)=x^2-ax=x(x-a)(a>0)$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0]$，$[a,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,a)$.

(3) $g'(x)=x^2-ax+2$，依题意，存在 $x\in(-2,-1)$，

使不等式 $g'(x)=x^2-ax+2<0$ 成立，

即 $x\in(-2,-1)$ 时，$a<\left(x+\dfrac{2}{x}\right)_{\max}=-2\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\dfrac{2}{x}$ 即 $x=-\sqrt{2}$ 时等号成立.

所以满足要求的实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2\sqrt{2})$.

点睛 根据函数单调性求参数的一般思路

(1)利用集合间的包含关系处理. $y=f(x)$ 在 (a,b) 上单调，则区间 (a,b) 是相应单调区间的子集.

(2)转化为不等式的恒成立问题. 若函数 $f(x)$ 单调递增，则 $f'(x)\geqslant 0$；若函数 $f(x)$ 单调递减，则 $f'(x)\leqslant 0$.

[注意] $f(x)$ 为增函数的充要条件是"对任意的 $x\in(a,b)$ 都有 $f'(x)\geqslant 0$，且在 (a,b) 内的任一非空子区间上 $f'(x)$ 不恒为 0". 应注意此时式子中的等号不能省略，否则会漏解.

【变式训练 4】 若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 k 的取值范围是__$[1,+\infty)$__.

【解析】由于 $f'(x)=k-\dfrac{1}{x}$，$f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增 $\Leftrightarrow f'(x)=k-\dfrac{1}{x}\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

由于 $k\geqslant\dfrac{1}{x}$，而 $0<\dfrac{1}{x}<1$，所以 $k\geqslant 1$.

即 k 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

随堂小练

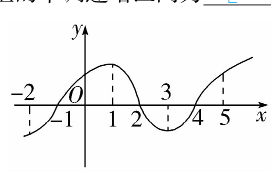
1. 下列函数中，在区间 $(-1,1)$ 内是减函数的是 (C)

A. $y=2-3x^2$ B. $y=\ln x$

C. $y=\dfrac{1}{x-2}$ D. $y=\sin x$

【解析】C 中 $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}=-\dfrac{1}{(x-2)^2}<0$.

2. 如图所示是函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象，则函数 $f(x)$ 在 $[-2,5]$ 上的单调递增区间为__$[-1,2]$和$[4,5]$__.



【解析】因为在 $[-1,2]$ 和 $[4,5]$ 上 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[-2,5]$ 上的单调递增区间为 $[-1,2]$ 和 $[4,5]$.

3. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的单调递减区间是 $\underline{\left(0,\frac{1}{e}\right)}$.

【解析】函数的定义域为 $x>0$，

因为 $f'(x)=\ln x+1$，令 $\ln x+1<0$，得 $0<x<\frac{1}{e}$，

所以函数 $f(x)=x\ln x$ 的单调递减区间是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$，且 $f'(-1)=-4$，$f'(1)=0$.

(1)求 a 和 b 的值；

(2)求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【解析】(1)因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$，

所以 $f'(x)=x^2+2ax+b$.

由 $\begin{cases}f'(-1)=-4,\\ f'(1)=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}1-2a+b=-4,\\ 1+2a+b=0,\end{cases}$

解得 $a=1$，$b=-3$.

(2)由(1)得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$.

$f'(x)=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$.

由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$ 或 $x<-3$；

由 $f'(x)<0$ 得 $-3<x<1$. 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-3)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $[-3,1]$.

温馨提示：请自主完成课后作业(十九)

课后作业·单独成册

第 2 课时　函数的极值

学习目标	核心素养
了解函数极值的概念	数学抽象
会用导数求函数的极大值、极小值	数学运算

自主预习

知新预学

1. 极小值点与极小值

(1)特征：函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点处的函数值____都小____，$f'(a)=$____0____.

(2)符号：在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)$____$<$____0，右侧 $f'(x)$____$>$____0.

(3)结论：a 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值点，$f(a)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值.

2. 极大值点与极大值

(1)特征：函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 处的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点处的函数值____都大____，$f'(b)=$____0____.

(2)符号：在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)$____$>$____0，右侧 $f'(x)$____$<$____0.

(3)结论：b 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值点，$f(b)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值.

3. 极值点与极值

(1)极小值点和极大值点统称为极值点.

(2)极小值和极大值统称为极值.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)函数的极大值一定大于其极小值.　　(×)

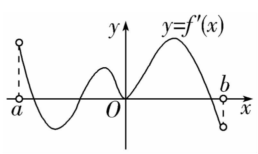
(2)导数为 0 的点一定是极值点.　　(×)

(3)函数 $y=f(x)$ 一定有极大值和极小值.　　(×)

(4)若一个函数在给定的区间内存在极值，则极值点一定在区间的内部.　　(√)

(5)函数的极值点是自变量的值，极值是函数值.　　(√)

2. 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b)，导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点　　(A)



A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3. 函数 $y=x^3-6x$ 的极大值为　　(A)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $-3\sqrt{2}$　　D. $-4\sqrt{2}$

4. 函数 $y=1+3x-x^3$ 的极大值点为____1____，极小值点为____-1____.

【解析】$y'=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$，

令 $y'=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $x<-1$ 时，$y'<0$，函数是减函数；

当 $-1<x<1$ 时，$y'>0$，函数是增函数；

当 $x>1$ 时，$y'<0$，函数是减函数.

所以当 $x=-1$ 时，函数有极小值；

当 $x=1$ 时，函数有极大值.

互动课堂

合作探究

探究 1　求不含参数的函数的极值(点)

【例 1】求下列函数的极值：

(1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-2$；

(2) $f(x)=x^2e^{-x}$.

【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**.

$f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	-3	单调递增	-1	单调递减

因此，当 $x=-1$ 时，函数有极小值，且极小值为 $f(-1)=-3$；

当 $x=1$ 时，函数有极大值，且极大值为 $f(1)=-1$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**.

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	0	单调递增	$4e^{-2}$	单调递减

因此，当 $x=0$ 时，函数有极小值，且极小值为 $f(0)=0$；

当 $x=2$ 时，函数有极大值，且极大值为 $f(2)=\frac{4}{e^2}$.

点睛 函数极值和极值点的求解步骤

(1)确定函数的定义域；

(2)求方程 $f'(x)=0$ 的根；

(3)用方程 $f'(x)=0$ 的根顺次将函数的定义域分成若干个小开区间，并列成表格；

(4)根据 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根左右的符号，来判断 $f(x)$ 在这个根处取极值的情况.

[注意]当实数根较多时，要充分利用表格，使极值点的确定一目了然.

【变式训练 1】设函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，则 (D)

A. $\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极大值点

B. $\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. 2 为 $f(x)$ 的极大值点

D. 2 为 $f(x)$ 的极小值点

【解析】由 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)=0$ 可得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 2 为 $f(x)$ 的极小值点.

探究 2 求含参数的函数的极值(点)

【例 2】设函数 $f(x)=2x^3-3(a-1)x^2+1$，其中 $a\geqslant1$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)讨论 $f(x)$ 的极值.

【解析】由已知得，$f'(x)=6x[x-(a-1)]$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=a-1$.

(1)当 $a=1$ 时，$f'(x)=6x^2$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>1$ 时，$f'(x)=6x[x-(a-1)]$.

当 x 变化时 $f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,a-1)$	$a-1$	$(a-1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	1	单调递减	$1-(a-1)^3$	单调递增

从上表可知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,a-1)$ 上单调递减，在 $(a-1,+\infty)$ 上单调递增.

(2)由(1)知，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 没有极值；

当 $a>1$ 时，函数在 $x=0$ 处取得极大值 1，在 $x=a-1$ 处取得极小值 $1-(a-1)^3$.

点睛 对含参数的函数问题，求极值时可能要对参数讨论，讨论点一般分三类：一是系数，二是判别式，三是两根的大小.

【变式训练 2】已知函数 $f(x)=x-a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)求函数 $f(x)$ 的极值.

【解析】(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=x-2\ln x$，

$f'(x)=1-\frac{2}{x}(x>0)$，因为 $f(1)=1$，$f'(1)=-1$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$.

(2)由 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，$x>0$ 知，

①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，函数 $f(x)$ 无极值；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$.

又当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

从而函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值，且极小值为 $f(a)=a-a\ln a$，无极大值.

综上，当 $a\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 无极值；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值 $a-a\ln a$，无极大值.

探究 3 与函数极值有关的参数问题

【例 3】已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 在 $x=1$ 处取得极值 $\frac{5}{2}$.

(1)求 a，b 的值；

(2)求函数的另一个极值.

【解析】(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，

依题意可得 $f'(1)=0$，$f(1)=\frac{5}{2}$，

即 $\begin{cases}3+2a+b=0,\\1+a+b+4=\frac{5}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=-2.\end{cases}$

(2)由(1)知 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+4$，

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表：

x	$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	$\frac{130}{27}$	单调递减	$\frac{5}{2}$	单调递增

所以函数的另一个极值在 $x=-\frac{2}{3}$ 处取得，是极大值，极大值为 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{130}{27}$.

点睛(1)对于已知可导函数的极值求参数的问题，解题的切入点是极值存在的条件：极值点处的导数值为 0，极值点两侧的导数值异号.

(2)已知可导函数的极值求参数问题的解题步骤

①求函数的导数 $f'(x)$；

②由极值点的导数值为 0，列出方程(组)，求解参数.

[注意]求出参数后，一定要验证是否满足题目的条件.

(3)对于函数无极值的问题，往往转化为其导函数的值非负或非正在某区间内恒成立的问题，即转化为 $f'(x)\geqslant 0$ 或 $f'(x)\leqslant 0$ 在某区间内恒成立的问题，此时需注意不等式中的等号是否成立.

【变式训练 3】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-1$.

(1)若函数的极大值点是 -1，求 a 的值；

(2)若函数 $f(x)$ 有一正一负两个极值点，求 a 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x)=x^2-2x+a$，

由题意 $f'(-1)=1+2+a=0$，

解得 $a=-3$，则 $f'(x)=x^2-2x-3$，经验证可知，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，故 $a=-3$.

(2)由题意，方程 $x^2-2x+a=0$ 有一正一负两个根，设为 x_1,x_2，则 $x_1x_2=a<0$，

故 a 的取值范围是 $(-\infty,0)$.

探究 4 函数极值的综合应用

【例 4】已知函数 $f(x)=x^3-3ax-1(a\neq 0)$. 若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，直线 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点，求 m 的取值范围.

【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，且 $f'(x)=3x^2-3a$，

所以 $f'(-1)=3\times(-1)^2-3a=0$，所以 $a=1$.

所以 $f(x)=x^3-3x-1$，$f'(x)=3x^2-3$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=1$.

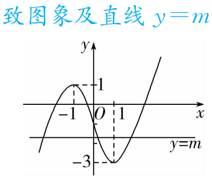
当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；

当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

所以由 $f(x)$ 的单调性可知，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=1$，在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-3$.

作出 $f(x)$ 的大致图象及直线 $y=m$ 如图所示，



因为直线 $y=m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点，结合图象可知，m 的取值范围是 $(-3,1)$.

点睛(1)研究方程根的问题可以转化为研究相应函数的图象问题，一般地，方程 $f(x)=0$ 的根就是函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，方程 $f(x)=g(x)$ 的根就是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点的横坐标.

(2)事实上，利用导数可以判断函数的单调性，研究函数的极值情况，并能在此基础上画出函数的大致图象，从直观上判断函数图象与 x 轴的交点或两个函数图象的交点的个数，从而为研究方程根的个数问题提供了方便.

【变式训练 4】设 a 为实数，函数 $f(x)=-x^3+3x+a$.

(1)求 $f(x)$ 的极值；

(2)若方程 $f(x)=0$ 恰好有两个实数根，求实数 a 的值.

【解析】(1)因为 $f(x)=-x^3+3x+a$，

所以 $f'(x)=-3x^2+3$，

令 $f'(x)=-3x^2+3=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=a-2$，$f(x)$ 的极大值为 $f(1)=a+2$.

(2)方法一：因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，且当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.

又 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$.

而 $a+2>a-2$，即函数的极大值大于极小值，

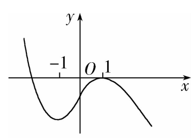
所以当极大值等于 0 时，极小值小于 0，

此时曲线 $f(x)$ 与 x 轴恰有两个交点，

即方程 $f(x)=0$ 恰好有两个实数根，

所以 $a+2=0$，

所以 $a=-2$，如图(1).



图(1)

当极小值等于 0 时，极大值大于 0，

此时曲线 $f(x)$ 与 x 轴恰有两个交点，

即方程 $f(x)=0$ 恰好有两个实数根，

所以 $a-2=0$，

所以 $a=2$，如图(2).

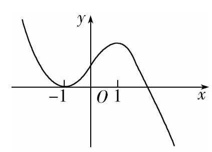


图 (2)

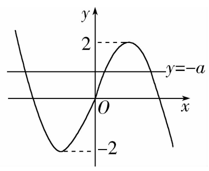
方法二：令 $f(x)=-x^3+3x+a=0$，得 $-x^3+3x=-a$，

令 $y=-a$，设 $y=g(x)=-x^3+3x$.

由方法一可知 $g(x)_{极大值}=g(1)=2$，

$g(x)_{极小值}=g(-1)=-2$，

画出两函数图象的简图如图所示，



由图可知，当 $a=\pm2$ 时，函数有两个零点.

综上所述，当 $a=2$ 或 $a=-2$ 时，方程恰有两个实数根.

随堂小练

1. 已知 a 为函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极小值点，则 $a=$ (D)

A. -9　　B. -2

C. 4　　D. 2

【解析】因为 $f(x)=x^3-12x$，

所以 $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$，

所以当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当 $-2<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

所以当 $x=2$ 时，$f(x)$有极小值，即函数的极小值点为 2，

所以 $a=2$.

2. 若函数 $f(x)=ax-\ln x$ 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极值，则实数 a 的值为 (A)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

【解析】$f'(x)=a-\frac{1}{x}$，所以 $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$，即 $a-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=0$，解得 $a=\sqrt{2}$.

3. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$ 在 $x=1$ 处取得极大值 10，则 $\frac{a}{b}$ 的值为 (A)

A. $-\frac{2}{3}$　　B. -2

C. -2 或 $-\frac{2}{3}$　　D. 2 或 $-\frac{2}{3}$

【解析】由题可知 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，

所以 $f'(1)=0$，$f(1)=10$，

即 $\begin{cases}f'(1)=3+2a+b=0,\\ f(1)=1+a+b-a^2-7a=10,\end{cases}$

可得 $\begin{cases}a=-2,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-6,\\ b=9.\end{cases}$

当 $a=-2$，$b=1$ 时，可知 $f'(x)=(3x-1)(x-1)$.

令 $f'(x)>0$，所以 $x<\frac{1}{3}$ 或 $x>1$，

令 $f'(x)<0$，所以 $\frac{1}{3}<x<1$，

函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上单调递减.

所以可知函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取极小值，故不符合题意.

当 $a=-6$，$b=9$ 时，经检验符合题意，所以 $\frac{a}{b}=-\frac{2}{3}$，故选 A.

4. 函数 $y=3x^3-9x+5$ 的极大值为__11__.

【解析】$y'=9x^2-9$. 令 $y'=0$，得 $x=\pm1$.

当 x 变化时，y'，y 的变化情况如表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	单调递增	11	单调递减	-1	单调递增

因此，当 $x=-1$ 时，函数 y 有极大值 $f(-1)=11$.

5. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$.

(1)写出函数 $f(x)$的单调递减区间；

(2)求函数 $f(x)$的极值.

【解析】$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如表所示：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	16	单调递减	-16	单调递增

(1)由表可得函数的单调递减区间为$(-1,3)$.

(2)由表可得，当 $x=-1$ 时，函数有极大值 $f(-1)=16$；

当 $x=3$ 时，函数有极小值 $f(3)=-16$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十)

课后作业·单独成册

第3课时 函数的最大(小)值

学习目标	核心素养
会用导数求函数的极大值、极小值	数学运算

自主预习

知新预学

求函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上的最值的步骤

(1)求函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上的__极值__;

(2)将函数 $y=f(x)$的各__极值__与__端点处的函数值 $f(a),f(b)$__比较,其中最大的一个是最大值,最小的一个是最小值.

小试牛刀

1. 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)函数的最大值不一定是函数的极大值. (√)

(2)函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值一定在区间端点处取得. (×)

(3)有极值的函数一定有最值,有最值的函数不一定有极值. (×)

2. 函数 $f(x)=2x-\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上 (A)

A. 无最值　　B. 有极值

C. 有最大值　　D. 有最小值

3. 函数 $f(x)=x^2-x+1$ 在$[-3,0]$上的 (C)

A. 最大值为13,最小值为$\frac{3}{4}$

B. 最大值为4,最小值为1

C. 最大值为13,最小值为1

D. 最大值为-1,最小值为-7

4. 函数 $y=3x-4x^3$ 在区间$[0,2]$上的最大值是__1__.

【解析】设 $f(x)=3x-4x^3$,

所以 $f'(x)=-12x^2+3=3(2x+1)(1-2x)$.

因为 $x\in[0,2]$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.

因为 $f(0)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=1,f(2)=-26$,

所以函数 $y=3x-4x^3$ 在区间$[0,2]$上的最大值是1.

互动课堂

合作探究

探究1 求函数的最值

【例1】求下列函数的最值:

(1)$f(x)=2x^3-12x,x\in[-2,3]$;

(2)$f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x,x\in[0,2\pi]$.

【解析】(1)因为 $f(x)=2x^3-12x$,

所以 $f'(x)=6x^2-12$

$=6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=-\sqrt{2}$ 或 $x=\sqrt{2}$.

因为 $f(-2)=8,f(3)=18$,

$f(\sqrt{2})=-8\sqrt{2},f(-\sqrt{2})=8\sqrt{2}$;

所以当 $x=\sqrt{2}$ 时,$f(x)$取得最小值$-8\sqrt{2}$;

当 $x=3$ 时,$f(x)$取得最大值18.

(2)$f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$,令 $f'(x)=0$,

又 $x\in[0,2\pi]$,解得 $x=\frac{2\pi}{3}$ 或 $x=\frac{4\pi}{3}$.

计算得 $f(0)=0,f(2\pi)=\pi,f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以当 $x=0$ 时,$f(x)$有最小值 $f(0)=0$;

当 $x=2\pi$ 时,$f(x)$有最大值 $f(2\pi)=\pi$.

点睛 求函数最值的步骤

(1)求函数的定义域;

(2)求 $f'(x)$,解方程 $f'(x)=0$;

(3)列出关于 $x,f(x),f'(x)$的变化表;

(4)求极值、端点处的函数值,确定最值.

[注意]不要忽视将所求极值与区间端点的函数值比较.

【变式训练1】(1)求函数 $f(x)=x^3-2x^2+1$ 在区间$[-1,2]$上的最值.

【解析】$f'(x)=3x^2-4x$,令 $f'(x)=0$,

解得 $x_1=0,x_2=\frac{4}{3}$.

当 x 变化时,$f'(x),f(x)$的变化情况如表:

x	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},2\right)$	2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-2	单调递增	1	单调递减	$-\frac{5}{27}$	单调递增	1

由上表可知,函数 $f(x)$ 的最大值为 1,最小值为 -2.

(2)求函数 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$ 的最值.

【解析】函数 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$.

$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-e^x(x-1)}{(e^x)^2}=\frac{2-x}{e^x}$,

当 $f'(x)=0$ 时,$x=2$,

当 $f'(x)>0$ 时,$x<2$,

当 $f'(x)<0$ 时,$x>2$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增,在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x=2$ 时,$f(x)_{\max}=f(2)=\frac{1}{e^2}$,无最小值.

探究 2 含参数的函数最值问题

【例 2】已知函数 $f(x)=x^3-ax^2-a^2x$,求函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值.

【解析】$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$,

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=-\frac{a}{3}$,$x_2=a$.

(1)当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $[0,a)$ 上单调递减,在 $[a,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(a)=-a^3$;

(2)当 $a=0$ 时,$f'(x)=3x^2\geqslant0$,$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$;

(3)当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left[0,-\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left[-\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{a}{3}\right)=\frac{5a^3}{27}$.

综上所述,当 $a>0$ 时,$f(x)_{\min}=-a^3$;

当 $a=0$ 时,$f(x)_{\min}=0$;

当 $a<0$ 时,$f(x)_{\min}=\frac{5a^3}{27}$.

点睛 含参数的函数最值问题的两类情况

(1)能根据条件确定出参数,从而化为不含参数的函数的最值问题.

(2)对于不能求出参数值的问题,则要对参数进行讨论,其实质是讨论导函数大于 0、等于 0、小于 0 三种情况.若导函数恒不等于 0,则函数在已知区间上是单调函数,最值在端点处取得;若导函数可能等于 0,则求出极值点后求极值,再与端点值比较后确定最值.

【变式训练 2】已知函数 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+b(x\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=6x-8$,求 a,b 的值;

(2)若 $a>0,b=2$,当 $x\in[-1,1]$ 时,求 $f(x)$ 的最小值.

【解析】(1)$f'(x)=3ax^2-3x$,

由 $f'(2)=6$,得 $a=1$.

由 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=6x-8$,得 $f(2)=4$.又 $f(2)=8a-6+b=b+2$,所以 $b=2$,

所以 $a=1,b=2$.

(2)$f'(x)=3ax^2-3x=3x(ax-1)$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{a}$.

分以下两种情况讨论:

①若 $\frac{1}{a}\geqslant1$,即 $0<a\leqslant1$,当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$[-1,0)$	0	$(0,1]$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	2	单调递减

因为 $f(-1)=-a-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}-a$,

$f(1)=a-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}+a$,

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{1}{2}-a$.

②若 $0<\frac{1}{a}<1$,即 $a>1$,当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$[-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},1\right]$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	2	单调递减	$2-\frac{1}{2a^2}$	单调递增

因为 $f(-1)=\frac{1}{2}-a$,$f\left(\frac{1}{a}\right)=2-\frac{1}{2a^2}$,

而 $f\left(\frac{1}{a}\right)-f(-1)=2-\frac{1}{2a^2}-\left(\frac{1}{2}-a\right)$

$=\frac{3}{2}+a-\frac{1}{2a^2}>0$,

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{1}{2}-a$.

综合①和②可知,$f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{1}{2}-a$.

探究 3 由函数的最值求参数

【例 3】已知函数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$,$x\in[-1,2]$ 的最大值为 3,最小值为 -29,求 a,b 的值.

【解析】由题设知 $a\neq0$,否则 $f(x)=b$ 为常函数,与题设矛盾.

$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=0$,$x_2=4$(舍去).

①当 $a>0$ 且 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如表:

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-7a+b$	单调递增	b	单调递减	$-16a+b$

由表可知,当 $x=0$ 时,$f(x)$取得极大值 b,也就是函数在$[-1,2]$上的最大值,

所以 $f(0)=b=3$.

又 $f(-1)=-7a+3$,$f(2)=-16a+3<f(-1)$,

所以 $f(2)=-16a+3=-29$,解得 $a=2$.

②当 $a<0$ 时,

同理可得,当 $x=0$ 时,

$f(x)$取得极小值 b,也就是函数在$[-1,2]$上的最小值,

所以 $f(0)=b=-29$.

又 $f(-1)=-7a-29$,

$f(2)=-16a-29>f(-1)$,

所以 $f(2)=-16a-29=3$,解得 $a=-2$.

综上可得,$a=2,b=3$ 或 $a=-2,b=-29$.

点睛 已知函数最值求参数值(范围)的思路

已知函数在某区间上的最值求参数的值(范围)是求函数最值的逆向思维,一般先求导数,利用导数研究函数的单调性与极值点,用参数表示出最值后求参数的值(范围).

【变式训练 3】若函数 $f(x)=e^x-\frac{x}{e}$在区间(a^2-12,a)上有最小值,则实数 a 的取值范围是 (A)

A. $(-1,\sqrt{11})$　　B. $(-1,4)$

C. $(-1,2]$　　D. $(-1,2)$

【解析】由 $f'(x)=e^x-\frac{1}{e}=0$,得 $x=-1$. 当 x 变化时,$f'(x)$及 $f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$\frac{2}{e}$	单调递增

由此得 $a^2-12<-1<a$,解得 $-1<a<\sqrt{11}$.

随堂小练

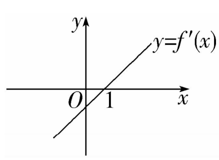
1. 若函数 $f(x)$的导函数的图象是如图所示的一条直线,则 (C)

A. 函数 $f(x)$没有最大值也没有最小值

B. 函数 $f(x)$有最大值,没有最小值

C. 函数 $f(x)$没有最大值,有最小值

D. 函数 $f(x)$有最大值,也有最小值



【解析】由导函数图象可知,函数 $f(x)$只有一个极小值点 1,即 $f(x)$在 $x=1$ 处取得最小值,没有最大值.

2. 函数 $f(x)=(1-x)e^x$ 有 (A)

A. 最大值 1　　B. 最小值 1

C. 最大值 e　　D. 最小值 e

【解析】$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$,

当 $x<0$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>0$ 时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,在$[0,+\infty)$上单调递减,

所以 $f(x)$有最大值为 $f(0)=1$.

3. 函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$,$x\in[-1,1]$的值域为 $\underline{\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]}$.

【解析】令 $f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=0$ 得 $x_1=-\frac{1}{2}$,$x_2=\frac{1}{2}$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$,$f(-1)=-\frac{1}{4}$,$f(1)=\frac{1}{4}$.

故值域为$\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$.

4. 求函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x$ 的最值.

【解析】$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}-1$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时,$\frac{1}{x^2}-1>0$,$-\frac{\ln x}{x^2}>0$,故 $f'(x)>0$;

当 $x>1$ 时,同理得 $f'(x)<0$. 所以 $f(x)$在 $x=1$ 时,取到极大值,也就是最大值 $f(1)=-1$,无最小值.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十一、二十二)

课后作业·单独成册

第 4 课时　导数与不等式

学习目标	核心素养
会用导数及函数的最值等知识证明相关不等式	逻辑推理、数学运算
会用导数及函数的最值等知识求解与不等式或恒成立有关的参数取值范围问题	逻辑推理、数学运算

互动课堂

合作探究

探究 1　利用导数证明不等式

【例 1】已知函数 $f(x)=e^x-3x+3a$（e 为自然对数的底数，$a\in\mathbf{R}$）.

(1)求 $f(x)$的单调区间与极值；

(2)求证：当 $a>\ln\frac{3}{e}$ 且 $x>0$ 时，$\frac{e^x}{x}>\frac{3}{2}x+\frac{1}{x}-3a$.

【解析】(1)由 $f(x)=e^x-3x+3a$，$x\in\mathbf{R}$，

知 $f'(x)=e^x-3$，$x\in\mathbf{R}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 3$，

于是当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如表：

x	$(-\infty,\ln 3)$	$\ln 3$	$(\ln 3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$3(1-\ln 3+a)$	单调递增

故 $f(x)$的单调递减区间是$(-\infty,\ln 3]$，单调递增区间是$(\ln 3,+\infty)$，

故 $f(x)$在 $x=\ln 3$ 处取得极小值，极小值为 $f(\ln 3)=e^{\ln 3}-3\ln 3+3a=3(1-\ln 3+a)$，无极大值.

(2)证明：待证不等式等价于 $e^x>\frac{3}{2}x^2-3ax+1$，

设 $g(x)=e^x-\frac{3}{2}x^2+3ax-1$，$x>0$，

于是 $g'(x)=e^x-3x+3a$，$x>0$.

由(1)及 $a>\ln\frac{3}{e}=\ln 3-1$ 知，$g'(x)$的最小值为

$g'(\ln 3)=3(1-\ln 3+a)>0$.

于是对任意 $x>0$，都有 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

于是当 $a>\ln\frac{3}{e}=\ln 3-1$ 时，对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $g(x)>g(0)$.

而 $g(0)=0$，从而对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $g(x)>0$.

即 $e^x>\frac{3}{2}x^2-3ax+1$，

故 $\frac{e^x}{x}>\frac{3}{2}x+\frac{1}{x}-3a$.

点睛 利用导数证明不等式的技巧是构造辅助函数，把不等式的证明转化为利用导数研究函数的单调性或求最值，从而证得不等式，而如何根据不等式的结构特征构造一个可导函数是用导数证明不等式的关键.

[注意]有时需先对不等式恒等变形，再构造函数.

【变式训练 1】已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a>0$ 时，求证：$f(x)\geqslant\frac{2a-1}{a}$.

【解析】(1)$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $a>0$ 时，若 $x>a$，则 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增；

若 $0<x<a$，则 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(0,a)$上单调递减.

(2)证明：由(1)知，当 $a>0$ 时，

$f(x)_{\min}=f(a)=\ln a+1$.

要证 $f(x)\geqslant\frac{2a-1}{a}$，只需证 $\ln a+1\geqslant\frac{2a-1}{a}$，

即证 $\ln a+\frac{1}{a}-1\geqslant 0$.

令函数 $g(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}$ $(a>0)$，

当 $0<a<1$ 时，$g'(a)<0$，当 $a>1$ 时，$g'(a)>0$，

所以 $g(a)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(a)_{\min}=g(1)=0$.

所以 $\ln a+\frac{1}{a}-1\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $f(x)\geqslant\frac{2a-1}{a}$.

探究 2 利用分离参数法解决不等式的恒成立问题

【例 2】已知 $f(x)=x\ln x, g(x)=x^3+ax^2-x+2$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若对任意 $x\in(0,+\infty)$，$2f(x)\leqslant g'(x)+2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)因为函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=\ln x+1$.

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\frac{1}{e}$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>\frac{1}{e}$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

综上，$f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$，单调递增区间是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

(2)因为 $g'(x)=3x^2+2ax-1$，由题意得 $2x\ln x\leqslant 3x^2+2ax+1$ 恒成立.

因为 $x>0$，所以 $a\geqslant\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

设 $h(x)=\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2x^2}=-\frac{(x-1)(3x+1)}{2x^2}$.

令 $h'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{3}$(舍去).

当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	单调递增	-2	单调递减

所以当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得极大值，也是最大值，且 $h(x)_{max}=h(1)=-2$，

因为 $a\geqslant h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $a\geqslant h(x)_{max}=-2$，即 $a\geqslant-2$，

故实数 a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$.

点睛 利用分离参数法来确定不等式 $f(x,\lambda)\geqslant0(x\in D$，$\lambda$ 为实参数)恒成立问题中参数取值范围的基本步骤

(1)将参数与变量分离，化为 $f_1(\lambda)\geqslant f_2(x)$ 或 $f_1(\lambda)\leqslant f_2(x)$ 的形式；

(2)求 $f_2(x)$ 在 $x\in D$ 上的最大值或最小值；

(3)解不等式 $f_1(\lambda)\geqslant f_2(x)_{max}$ 或 $f_1(\lambda)\leqslant f_2(x)_{min}$，得到 λ 的取值范围.

【变式训练 2】已知函数 $f(x)=e^x\left(x+\frac{3}{x}-3\right)-\frac{a}{x}$，若不等式 $f(x)\leqslant0$ 有正实数解，则实数 a 的最小值为__e__.

【解析】原问题等价于存在 $x\in(0,+\infty)$，使 $a\geqslant e^x(x^2-3x+3)$.

令 $g(x)=e^x(x^2-3x+3)$，$x\in(0,+\infty)$，则 $a\geqslant g(x)_{min}$，而 $g'(x)=e^x(x^2-x)$.

由 $g'(x)>0$ 可得 $x\in(1,+\infty)$，由 $g'(x)<0$ 可得 $x\in(0,1)$.

据此可知，函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(1)=e$.

综上可得，实数 a 的最小值为 e.

探究 3 利用分类讨论法解决不等式的恒成立问题

【例 3】已知函数 $f(x)=\ln x-ax, a\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若不等式 $f(x)+a<0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

则 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调递减区间.

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$；

由 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$；

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递减区间是 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

(2)$f(x)+a<0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

即 $\ln x-a(x-1)<0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立.

设 $g(x)=\ln x-a(x-1)$，$x>1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a$，

①当 $a\geqslant1$ 时，$g'(x)<0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

则 $g(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $a\geqslant1$ 时满足题意.

②当 $0<a<1$ 时，令 $g'(x)>0$，得 $1<x<\frac{1}{a}$；

令 $g'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$.

则 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，

所以当 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 时，$g(x)>g(1)=0$，

所以当 $0<a<1$ 时不满足题意(舍去).

③当 $a\leqslant0$ 时，$g'(x)=\frac{1}{x}-a>0$，

则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>g(1)=0$，

即 $a\leqslant0$ 时不满足题意(舍去).

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

点睛 对于不适合分离参数的不等式，常常将参数看作常数直接构造函数，常用分类讨论法，利用导数研究单调性、最值，从而得出参数范围.

【变式训练 3】已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1)当 $a=e$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2)若 $f(x)\geqslant 1$,求 a 的取值范围.

【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$.

(1)当 $a=e$ 时,$f(x)=e^x-\ln x+1$,$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$,

$f'(1)=e-1$,$f(1)=e+1$,

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$,即 $y=(e-1)x+2$.

直线 $y=(e-1)x+2$ 在 x 轴,y 轴上的截距分别为 $\frac{-2}{e-1}$,2.

因此所求三角形的面积为 $\frac{2}{e-1}$.

(2)当 $0<a<1$ 时,$f(1)=a+\ln a<1$.

当 $a=1$ 时,$f(x)=e^{x-1}-\ln x$,$f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.

所以当 $x=1$ 时,$f(x)$ 取得最小值,最小值为 $f(1)=1$,从而 $f(x)\geqslant 1$.

当 $a>1$ 时,$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant e^{x-1}-\ln x\geqslant 1$.

综上,a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

随堂小练

1. 若 $0<x_1<x_2<1$,则 (C)

A. $e^{x_2}-e^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$

B. $e^{x_2}-e^{x_1}<\ln x_2-\ln x_1$

C. $x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$

D. $x_2e^{x_1}<x_1e^{x_2}$

【解析】设 $f(x)=\frac{e^x}{x}$,

则 $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. 因为 $0<x_1<x_2<1$,

所以 $f(x_2)<f(x_1)$,即 $\frac{e^{x_2}}{x_2}<\frac{e^{x_1}}{x_1}$,

所以 $x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$.

2. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2(a>0)$,若对任意两个不相等的正实数 x_1,x_2,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$ 恒成立,则 a 的取值范围是 (D)

A. $(0,1]$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(0,1)$　　D. $[1,+\infty)$

【解析】根据 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$ 可知

$\frac{[f(x_1)-2x_1]-[f(x_2)-2x_2]}{x_1-x_2}>0$,

令 $g(x)=f(x)-2x=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x(a>0)$ 为增函数,

所以 $g'(x)=\frac{a}{x}+x-2\geqslant 0(x>0,a>0)$ 恒成立,

分离参数得 $a\geqslant x(2-x)$,而当 $x>0$ 时,$x(2-x)$ 最大值为 1,故 $a\geqslant 1$.

3. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1(x\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $f(x)-2a+1\geqslant 0$ 对 $\forall x\in[-2,4]$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)令 $f'(x)=3x^2-6x-9>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>3$,

令 $f'(x)=3x^2-6x-9<0$,解得 $-1<x<3$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$,$(3,+\infty)$,单调递减区间为 $(-1,3)$.

(2)由(1)知 $f(x)$ 在 $[-2,-1)$ 上单调递增,在 $[-1,3)$ 上单调递减,在 $[3,4]$ 上单调递增. 又 $f(-2)=-1$,$f(3)=-26$,$f(3)<f(-2)$,

所以 $f(x)_{\min}=-26$,

因为 $f(x)-2a+1\geqslant 0$ 对 $\forall x\in[-2,4]$ 恒成立,

所以 $f(x)_{\min}\geqslant 2a-1$,即 $2a-1\leqslant -26$,

所以 $a\leqslant -\frac{25}{2}$.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十三)

课后作业 · 单独成册

第 5 课时　导数与函数的零点问题

学习目标	核心素养
会利用导数并借助函数图象研究函数零点个数问题	数学运算、逻辑推理、直观想象
会根据函数零点个数,利用导数求参数的取值范围	数学运算、逻辑推理、直观想象

互动课堂

合作探究

探究 1　判断函数的零点个数

【例 1】已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{m}{x}$,$m\in\mathbf{R}$,讨论函数 $g(x)=f'(x)-\dfrac{x}{3}$ 的零点个数.

【解析】由题设 $g(x)=f'(x)-\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}-\dfrac{x}{3}(x>0)$,

令 $g(x)=0$,得 $m=-\dfrac{1}{3}x^3+x(x>0)$.

设 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x(x>0)$,

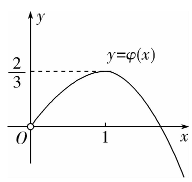
则 $\varphi'(x)=-x^2+1=-(x-1)(x+1)$,

当 $x\in(0,1)$时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增;

当 $x\in(1,+\infty)$时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.

所以 $x=1$ 是 $\varphi(x)$的唯一极值点且是极大值点.

因此 $x=1$ 也是 $\varphi(x)$的最大值点.



所以 $\varphi(x)$的最大值为 $\varphi(1)=\dfrac{2}{3}$.

又 $\varphi(0)=0$,结合 $y=\varphi(x)$的图象(如图),

可知①当 $m>\dfrac{2}{3}$ 时,函数 $g(x)$无零点;

②当 $m=\dfrac{2}{3}$ 时,函数 $g(x)$有且只有一个零点;

③当 $0<m<\dfrac{2}{3}$ 时,函数 $g(x)$有两个零点;

④当 $m\leqslant 0$ 时,函数 $g(x)$有且只有一个零点.

综上所述,当 $m>\dfrac{2}{3}$ 时,函数 $g(x)$无零点;

当 $m=\dfrac{2}{3}$ 或 $m\leqslant 0$ 时,函数 $g(x)$有且只有一个零点;

当 $0<m<\dfrac{2}{3}$ 时,函数 $g(x)$有两个零点.

点睛 函数的零点个数也就是函数图象与 x 轴交点的个数,所以可以借助函数图象的特征迅速求解函数的零点个数问题.

对于含参函数的零点个数,一般可以从两个方面讨论:(1)利用导数研究函数的单调性和极值,作出函数的大致图象,根据极大值和极小值的符号确定函数的零点个数;(2)分离参数,将问题转化为求 $y=a$ 和 $y=f(x)$的图象的交点个数问题求解.

【变式训练 1】探讨函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{2}{ex}$是否存在零点.若存在,求出函数 $f(x)$的零点;若不存在,请说明理由.

【解析】令 $f(x)=0$,得 $\ln x-\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{2}{ex}=0$,

即 $x\ln x=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2}{e}(x>0)$.

易求 $g(x)=x\ln x(x>0)$的最小值为 $g\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$,

设 $\varphi(x)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2}{e}(x>0)$,则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$,

当 $x\in(0,1)$时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$单调递增;

当 $x\in(1,+\infty)$时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$单调递减.

所以 $\varphi(x)$的最大值为 $\varphi(1)=-\dfrac{1}{e}$,

所以对 $x\in(0,+\infty)$,有 $x\ln x>\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2}{e}$恒成立,

即 $f(x)>0$ 恒成立,所以函数 $f(x)$无零点.

探究 2　由函数的零点个数求参数

【例 2】已知函数 $f(x)=2\ln x-x^2+ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=2$ 时,求 $f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线方程;

(2)若函数 $g(x)=f(x)-ax+m$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$上有两个零点,求实数 m 的取值范围.

【解析】(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=2\ln x-x^2+2x$,

则 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x+2$,切点坐标为$(1,1)$,切线的斜率 $k=f'(1)=2$,则函数 $f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $y=2x-1$.

(2)$g(x)=f(x)-ax+m=2\ln x-x^2+m$,

则 $g'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

因为 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，所以令 $g'(x)=0$，得 $x=1$.

当 $\frac{1}{e}\leqslant x<1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，

当 $1<x\leqslant e$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减，

故当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值 $g(1)=m-1$.

又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=m-2-\frac{1}{e^2}$，$g(e)=m+2-e^2$，

所以 $g(x)=f(x)-ax+m$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有两个零点需满足条件

$$\begin{cases}g(1)=m-1>0,\\ g\left(\frac{1}{e}\right)=m-2-\frac{1}{e^2}\leqslant 0,\text{解得 } 1<m\leqslant 2+\frac{1}{e^2}.\\ g(e)=m+2-e^2\leqslant 0,\end{cases}$$

故实数 m 的取值范围是 $\left(1,2+\frac{1}{e^2}\right]$.

点睛 根据函数的零点个数确定参数取值范围的核心思想是“数形结合”，即通过函数图象与 x 轴的交点个数，或者两个相关函数图象的交点个数确定参数满足的条件，进而求得参数的取值范围，解决问题的步骤是“先形后数”.

【变式训练 2】 已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-2$，则 $f'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)$f'(x)=e^x-a$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，故 $f(x)$ 至多存在 1 个零点，不合题意.

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 可得 $x=\ln a$.

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 单调递增.

故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$.

①若 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 至多存在 1 个零点，不合题意.

②若 $a>\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)<0$.

由于 $f(-2)=e^{-2}>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 存在唯一零点.

由于当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

故 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 存在唯一零点.

从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有两个零点.

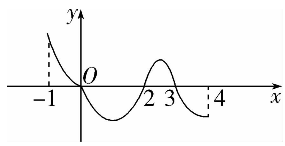
综上，a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

随堂小练

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,4]$，部分对应值如表.

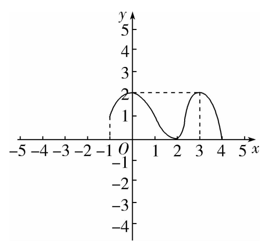
x	-1	0	2	3	4
$f(x)$	1	2	0	2	0

$f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示. 当 $1<a<2$ 时，函数 $y=f(x)-a$ 的零点的个数为　　　　(D)



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】 根据导函数图象知，函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示.



由于 $f(0)=f(3)=2$，$1<a<2$，所以 $f(x)-a$ 的零点个数为 4.

2. 已知函数 $f(x)=\frac{3}{x}+4\ln x-x-a$ 在区间 $(0,2)$ 上至少有一个零点，则实数 a 的取值范围是　　　　(D)

A. $(0,2)$　　B. $[2,4\ln 3-2)$

C. $\left(2,4\ln 2-\frac{1}{2}\right)$　　D. $[2,+\infty)$

【解析】 由函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上至少有一个零点，可得 $a=4\ln x+\frac{3}{x}-x$ 在 $x\in(0,2)$ 时有解.

设 $g(x)=4\ln x+\frac{3}{x}-x$，则 $g'(x)=\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}-1=-\frac{(x-1)(x-3)}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

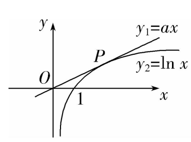
当 $1<x<2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. 因此可得 $g(1)=2$ 为极小值且为最小值，当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$，所以 $a\geqslant 2$.

3. 若函数 $f(x)=ax-\ln x$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是　　　　(C)

A. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　B. $(-\infty,e)$

C. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　D. $(0,e)$

【解析】 方法一：函数 $f(x)=ax-\ln x$，其中 $x>0$. 令 $f(x)=0$ 得 $ax=\ln x$. 当直线 $y_1=ax$ 和 $y_2=\ln x$ 的图象相切时，作图如图所示.



设切点为 $P(x_0,y_0)$，则由 $y_2'=\frac{1}{x}$ 得曲线 $y_2=\ln x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

又因为该直线过原点(0,0)，所以 $y_0=1$，所以 $\ln x_0=1$，解得 $x_0=\mathrm{e}$，所以切线斜率为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，

即当 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，直线 $y_1=ax$ 与曲线 $y_2=\ln x$ 相切.

由图可知，实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

方法二：由 $f(x)=ax-\ln x=0$ 得 $a=\frac{\ln x}{x}$.

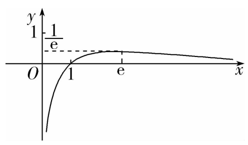
设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $g'(x)>0$ 得 $0<x<\mathrm{e}$，此时函数 $g(x)$ 单调递增；

令 $g'(x)<0$ 得 $x>\mathrm{e}$，此时函数 $g(x)$ 单调递减.

即当 $x=\mathrm{e}$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值 $g(\mathrm{e})=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x>1$ 时，$0<g(x)\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$g(x)\leqslant 0$，则函数 $g(x)$ 的大致图象如图所示.



由图象可知，当 $a\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$ax-\ln x=0$ 有两个不同的解，即函数 $f(x)$ 有两个不同的零点.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{ax-a}{\mathrm{e}^x}(a<0)$.

(1)当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

(2)若函数 $F(x)=f(x)+1$ 没有零点，求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x)=\frac{-a\mathrm{e}^x(x-2)}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{-a(x-2)}{\mathrm{e}^x}$.

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\frac{x-2}{\mathrm{e}^x}$.

$f(x)$，$f'(x)$ 随 x 的变化情况如表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$-\mathrm{e}^{-2}$	单调递增

所以当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值为 $f(2)=-\mathrm{e}^{-2}$，函数 $f(x)$ 没有极大值.

(2) $F'(x)=f'(x)=\frac{-a(x-2)}{\mathrm{e}^x}$.

当 $a<0$ 时，$F(x)$，$F'(x)$ 随 x 的变化情况如表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	单调递减	$\frac{a}{\mathrm{e}^2}+1$	单调递增

若函数 $F(x)$ 没有零点，则 $F(2)=\frac{a}{\mathrm{e}^2}+1>0$，解得 $a>-\mathrm{e}^2$，此时 $-\mathrm{e}^2<a<0$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\mathrm{e}^2,0)$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十四)

课后作业·单独成册

第6课时　导数在实际问题中的应用

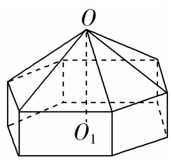
学习目标	核心素养
会利用导数解决简单的实际生活中的优化问题	数学建模、数学运算

互动课堂

合作探究

探究1　面积、容积的最值问题

【例1】请设计一个帐篷，它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱，上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥(如图所示). 试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时，帐篷的体积最大?



【解析】设 OO_1 为 x m，则 $1<x<4$. 由题设可得正六棱锥底面边长为 $\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$.

于是底面正六边形的面积为

$$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2).$$

帐篷的体积为

$$V(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\frac{1}{3}(x-1)+1\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3).$$

求导数，得 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$.

令 $V'(x)=0$，解得 $x=-2$(舍去)或 $x=2$.

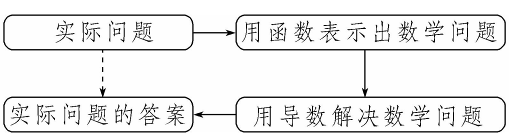
当 $1<x<2$ 时，$V'(x)>0$，$V(x)$ 为增函数；

当 $2<x<4$ 时，$V'(x)<0$，$V(x)$ 为减函数.

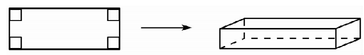
所以当 $x=2$ 时，$V(x)$ 最大.

点睛 (1)实际问题往往涉及变量之间的变化，因而就产生了函数关系，这时就可以利用导数解决实际问题.

(2)导数是解决实际问题的基本方法之一. 利用导数解决生活中的实际问题的基本思路是：



【变式训练1】用长为 90 cm、宽为 48 cm 的长方形铁皮做一个无盖的容器，先在四个角处分别截去一个小正方形，然后把四边翻转 90°，再焊接而成(如图)，问该容器的高为多少时，容器的容积最大? 最大容积是多少?



【解析】设容器的高为 x cm，容器的容积为 V cm³，

则 $V=(90-2x)(48-2x)x(0<x<24)$，

即 $V=4x^3-276x^2+4\ 320x$.

因为 $V'=12x^2-552x+4\ 320$，

令 $V'=12x^2-552x+4\ 320=0$，

得 $x_1=10$，$x_2=36$.

因为 $0<x<10$ 时，$V'>0$，$10<x<24$ 时，$V'<0$，

所以当 $x=10$ 时，V 有极大值，也是最大值.

所以当 $x=10$ 时，V 有最大值 $V(10)=19\ 600$.

故当容器的高为 10 cm 时，容器的容积最大，最大容积是 19 600 cm³.

探究2　用料(费用)最省问题

【例2】现有一批货物由海上从 A 地运往 B 地，已知轮船的最大航行速度为 35 n mile/h，A 地至 B 地之间的航行距离约为 500 n mile，每小时的运输成本由燃料费和其余费用组成，轮船每小时的燃料费与轮船速度的平方成正比(比例系数为 0.6)，其余费用为每小时 960 元.

(1)把全程运输成本 y(单位：元)表示为速度 x(单位：n mile/h)的函数；

(2)为了使全程运输成本最小，轮船应以多大速度行驶?

【解析】(1)依题意得 $y=\frac{500}{x}(960+0.6x^2)$

$=\frac{480\ 000}{x}+300x$，

且由题意知，函数的定义域为$(0,35]$，

即 $y=\frac{480\ 000}{x}+300x(0<x\leqslant 35)$.

(2)由(1)知，$y'=\frac{-480\ 000}{x^2}+300$，

令 $y'=0$，解得 $x=40$ 或 $x=-40$(舍去).

因为函数的定义域为$(0,35]$，所以函数在定义域内没有极值点.

又当 $0<x\leqslant 35$ 时，$y'<0$，

所以 $y=\frac{480\ 000}{x}+300x$ 在$(0,35]$上单调递减，

故当 $x=35$ 时，函数 $y=\frac{480\ 000}{x}+300x$ 取得最小值.

故为了使全程运输成本最小，轮船应以 35 n mile/h 的速度行驶.

点睛 利用导数解决实际问题的一般步骤

(1)抽象出实际问题的数学模型,列出函数$f(x)$的解析式;

(2)求函数$f(x)$的导数$f'(x)$,并解方程$f'(x)=0$,即求函数可能的极值点;

(3)比较函数$f(x)$在区间端点的函数值和极值点的函数值的大小,得出函数$f(x)$的最大值或最小值;

(4)根据实际问题的意义给出答案.

【变式训练 2】一艘轮船在航行中每小时的燃料费和它的速度的立方成正比.已知速度为每小时 10 n mile 时,燃料费是每小时 30 元,而其他与速度无关的费用是每小时 480 元.试问轮船的速度是多少时,航行 1 n mile 所需的费用总和最小?

【解析】设速度为每小时 v n mile 时的燃料费是每小时 p 元,那么由题设的比例关系得 $p=k\cdot v^3$,其中 k 为比例系数,它可以由 $v=10$,$p=30$ 求得,即 $k=\frac{30}{10^3}=0.03$,则 $p=0.03v^3$.又设当轮船的速度为每小时 v n mile 时,航行 1 n mile 所需的总费用为 q 元,那么每小时所需的总费用是$(0.03v^3+480)$元,而航行 1 n mile 所需时间为$\frac{1}{v}$ h,所以航行 1 n mile 的总费用为 $q=\frac{1}{v}(0.03v^3+480)=0.03v^2+\frac{480}{v}$(元).

$q'=0.06v-\frac{480}{v^2}=\frac{0.06}{v^2}(v^3-8\ 000)$.

令 $q'=0$,解得 $v=20$.

因为当 $v<20$ 时,$q'<0$;当 $v>20$ 时,$q'>0$,

所以当 $v=20$ 时 q 取得最小值,

即轮船的速度为 20 n mile/h 时,航行 1 n mile 所需费用总和最小.

探究 3 利润最大问题

【例 3】某食品厂进行蘑菇的深加工,每千克蘑菇的成本为 20 元,并且每千克蘑菇的加工费为 t 元(t 为常数,且 $2\leqslant t\leqslant 5$),设该食品厂每千克蘑菇的出厂价为 x 元($25\leqslant x\leqslant 40$),根据市场调查,日销售量 q 与 e^x 成反比,当每千克蘑菇的出厂价为 30 元时,日销售量为 100 千克.

(1)求该工厂的每日利润 y(单位:元)与每千克蘑菇的出厂价 x 之间的函数关系式;

(2)若 $t=5$,当每千克蘑菇的出厂价为多少元时,该工厂的每日利润最大?并求最大利润.

【解析】(1)设日销量 $q=\frac{k}{e^x}$,则$\frac{k}{e^{30}}=100$,

所以 $k=100e^{30}$,

所以日销量 $q=\frac{100e^{30}}{e^x}$,所以 $y=\frac{100e^{30}(x-20-t)}{e^x}$ $(25\leqslant x\leqslant 40)$.

(2)当 $t=5$ 时,$y=\frac{100e^{30}(x-25)}{e^x}$,

所以 $y'=\frac{100e^{30}(26-x)}{e^x}$.

令 $y'>0$,得 $x<26$,令 $y'<0$,得 $x>26$,

所以 y 在$[25,26)$上单调递增,在$[26,40]$上单调递减,

所以当 $x=26$ 时,$y_{\max}=100e^4$.

故当每千克蘑菇的出厂价为 26 元时,该工厂的每日利润最大,最大利润为 $100e^4$ 元.

点睛 (1)经济生活中实际问题的解法

经济生活中要分析生产的成本与利润及利润增减的快慢,以产量或单价为自变量很容易建立函数关系,从而可以利用导数来分析、研究、指导生产活动.

(2)关于利润问题常用的两个等量关系

①利润=收入-成本;

②利润=每件产品的利润×销售件数.

【变式训练 3】某市旅游部门开发一种旅游纪念品,每件产品的成本是 15 元,销售价是 20 元,月平均销售 a 件,通过改进工艺,产品的成本不变,质量和技术含金量提高,市场分析的结果表明,如果产品的销售价格提高的百分率为 $x(0<x<1)$,那么月平均销售量减少的百分率为 x^2.记改进工艺后,旅游部门销售该纪念品的月平均利润是 y 元.

(1)写出 y 关于 x 的函数关系式;

(2)改进工艺后,确定该纪念品的售价,使旅游部门销售该纪念品的月平均利润最大.

【解析】(1)改进工艺后,每件产品的销售价为 $20(1+x)$ 元,月平均销售量为 $a(1-x^2)$件,则月平均利润 $y=a(1-x^2)[20(1+x)-15]$(元),

所以 y 关于 x 的函数关系式为

$y=5a(1+4x-x^2-4x^3)(0<x<1)$.

(2)由 $y'=5a(4-2x-12x^2)=0$,

得 $x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=-\frac{2}{3}$(舍去).

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,$y'>0$;

当$\frac{1}{2}<x<1$ 时,$y'<0$,

所以函数 $y=5a(1+4x-x^2-4x^3)(0<x<1)$在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极大值,即最大值.

故改进工艺后,产品的销售价为 $20\left(1+\frac{1}{2}\right)=30$ 元时,旅游部门销售该纪念品的月平均利润最大.

随堂小练

1. 某城市在发展过程中,交通状况逐渐受到大家更多的关注,据有关的统计数据显示,从上午 6 时到 9 时,车辆通过该市某一路段的用时 y(单位:min)与车辆进入该路段的时刻 t 之间的关系可近似地用如下函数给出:$y=-\frac{1}{8}t^3-\frac{3}{4}t^2+36t-\frac{629}{4}$,则在这段时间内,通过该路段用时最多的时刻是 (C)

A. 6 时　　B. 7 时

C. 8 时　　D. 9 时

【解析】$y'=-\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{2}t+36$

$=-\frac{3}{8}(t+12)(t-8)$.

令 $y'=0$,得 $t=8$ 或 $t=-12$(舍去),

则当 $6\leqslant t<8$ 时,$y'>0$,当 $8<t\leqslant 9$ 时,$y'<0$,

所以当 $t=8$ 时,通过该路段所用的时间最多.

2. 用长为 24 m 的钢筋做成一个长方体框架,若这个长方体框架的底面为正方形,则这个长方体体积的最大值为__8__m^3.

【解析】设长方体的底面边长为 x m,则高为 $(6-2x)$m,所以 $x\in(0,3)$,则 $V=x^2(6-2x)=6x^2-2x^3$,$V'=12x-6x^2$.

令 $V'=0$ 得 $x=2$ 或 $x=0$(舍去),

所以当 $x\in(0,2)$ 时,$V'>0$,V 是增函数;

当 $x\in(2,3)$ 时,$V'<0$,V 是减函数,

所以当 $x=2$ 时,$V_{max}=2^2\times 2=8(m^3)$.

3. 已知某厂生产某种产品 x 件的总成本为 $C(x)=1\ 200+\frac{2}{75}x^3$,产品单价的平方与产品件数 x 成反比,生产 100 件这样的产品的单价为 50 元,产量定为__25__件时,总利润最大.

【解析】设产品单价为 a 元,又产品单价的平方与产品件数 x 成反比,即 $a^2x=k$,由题知 $a=\frac{500}{\sqrt{x}}$.

总利润 $y=500\sqrt{x}-\frac{2}{75}x^3-1\ 200(x>0)$,

$y'=\frac{250}{\sqrt{x}}-\frac{2}{25}x^2$,令 $y'=0$,得 $x=25$.

当 $x\in(0,25)$ 时,$y'>0$;当 $x\in(25,+\infty)$ 时,$y'<0$.

所以 $x=25$ 时,y 取最大值.

4. 某工厂生产某种产品,已知该产品的月生产量 x(单位:t)与产品的价格 p(单位:元/t)之间的函数关系式为 $p=24\ 200-\frac{1}{5}x^2$,且生产 x t 产品的成本为 $R=50\ 000+200x$(元).则该厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大?最大利润是多少?

【解析】依题意,知每月生产 x t 产品时的利润为 $f(x)=\left(24\ 200-\frac{1}{5}x^2\right)x-(50\ 000+200x)=-\frac{1}{5}x^3+24\ 000x-50\ 000(x>0)$,

故 $f'(x)=-\frac{3}{5}x^2+24\ 000$.

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=200$,$x_2=-200$(舍去).

因为在 $(0,+\infty)$ 内只有 $x=200$ 使 $f'(x)=0$ 且 $x=200$ 是极大值点,所以 200 就是最大值点,最大值为 $f(200)=-\frac{1}{5}\times 200^3+24\ 000\times 200-50\ 000=3\ 150\ 000$(元).

所以该厂每月生产 200 t 产品时,利润达到最大,最大利润为 315 万元.

温馨提示:请自主完成课后作业(二十五)

课后作业 · 单独成册

三、知能拓展

一元函数的导数及其应用复习

核心梳理

1. 应用导数的几何意义解决解析几何中的问题

由于函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，其切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. 因此利用导数的几何意义可以求出过曲线上任意一点的切线的斜率，解决解析几何中有关求切线方程、切点坐标、三角形的面积等问题.

2. 导数与函数的综合应用

导数作为数学工具，可以研究函数的单调性、最值等性质，还可以求函数的解析式、极值以及研究函数恒成立的问题.

3. 数形结合思想在导数中的应用

根据导函数与原函数的关系，导数为正，即原函数为增函数，曲线呈上升趋势；同理，导数为负，曲线呈下降趋势. 因此根据原函数的单调性可以大致画出 $f(x)$ 的图象，同样根据导函数的图象可以知道原函数曲线的变化趋势.

重难突破

要点1 导数的概念与几何意义

【例 1】(1)设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点(0,0)处的切线方程为 (D)

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$

C. $y=2x$　　D. $y=x$

【解析】方法一：因为函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $(-x)^3+(a-1)(-x)^2+a(-x)=-[x^3+(a-1)x^2+ax]$，所以 $2(a-1)x^2=0$. 因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $a=1$，所以 $f(x)=x^3+x$，所以 $f'(x)=3x^2+1$，所以 $f'(0)=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点(0,0)处的切线方程为 $y=x$.

方法二：因为函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$ 为奇函数，所以 $f(-1)+f(1)=0$. 所以 $-1+a-1-a+(1+a-1+a)=0$，解得 $a=1$，所以 $f(x)=x^3+x$，所以 $f'(x)=3x^2+1$，所以 $f'(0)=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点(0,0)处的切线方程为 $y=x$.

(2)已知直线 $y=kx$ 是曲线 $y=e^x$ 的切线，则实数 $k=$ (D)

A. $\frac{1}{e}$　　B. $-\frac{1}{e}$　　C. $-e$　　D. e

【解析】设切点坐标为 (x_0,y_0)，因为 $y'=(e^x)'=e^x$，所以 $y'|_{x=x_0}=e^{x_0}$，所以切线方程为 $y-y_0=e^{x_0}(x-x_0)$，即 $y=e^{x_0}x+y_0-e^{x_0}x_0$.

故知 $\begin{cases}e^{x_0}=k,\\ y_0-e^{x_0}x_0=0,\\ y_0=e^{x_0},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=1,\\ k=e.\end{cases}$

点睛 利用导数的几何意义解决切线问题的两种情况

(1)若已知点是切点，则在该点处的切线斜率就是该点处的导数.

(2)若已知点不是切点，则应先设出切点，再借助两点连线的斜率公式进行求解.

[注意]曲线与直线相切并不一定只有一个公共点，例如，$y=x^3$ 在(1,1)处的切线 l 与 $y=x^3$ 的图象还有一个交点 $(-2,-8)$.

【变式训练 1】(1)已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，且满足关系式 $f(x)=\frac{1}{x}+2xf'(1)$，则 $f'(1)-f'(-1)=$ (C)

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 2

【解析】由 $f(x)=\frac{1}{x}+2xf'(1)$，得 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+2f'(1)$，则 $f'(1)=-1+2f'(1)$，解得 $f'(1)=1$. 则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+2$. 则 $f'(-1)=-1+2=1$. 故 $f'(1)-f'(-1)=0$.

(2)已知 $a\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 l，则 l 在 y 轴上的截距为__1__.

【解析】由题意可知 $f'(x)=a-\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=a-1$.

因为 $f(1)=a$，所以切点坐标为 $(1,a)$，

所以切线 l 的方程为 $y-a=(a-1)(x-1)$，

即 $y=(a-1)x+1$.

令 $x=0$，得 $y=1$，

所以直线 l 在 y 轴上的截距为 1.

(3)已知斜率为 1 的直线和曲线 $y=\ln(x+2)$ 相切，则该切线方程为__$x-y+1=0$__.

【解析】设切点为 $P(x_0,y_0)$，由题意得

$y'=\frac{1}{x+2}$，则 $y'|_{x=x_0}=1$，即 $\frac{1}{x_0+2}=1$，所以 $x_0=-1$，$y_0=0$，故切点 P 的坐标为 $(-1,0)$，

所求切线方程为 $x-y+1=0$.

要点2 利用导数研究函数的单调性

【例 2】已知函数 $f(x)=2\ln x+1$.

(1)若 $f(x)\leqslant 2x+c$，求 c 的取值范围；

(2)设 $a>0$,讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性.

【解析】设 $h(x)=f(x)-2x-c$,则 $h(x)=2\ln x-2x+1-c$,

其定义域为 $(0,+\infty)$,$h'(x)=\dfrac{2}{x}-2$.

(1)当 $0<x<1$ 时,$h'(x)>0$;当 $x>1$ 时,$h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递增,在区间 $[1,+\infty)$ 单调递减.

从而当 $x=1$ 时,$h(x)$ 取得最大值,最大值为 $h(1)=-1-c$.

故当且仅当 $-1-c\leqslant 0$,即 $c\geqslant -1$ 时,$f(x)\leqslant 2x+c$.

所以 c 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

(2)$g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{2(\ln x-\ln a)}{x-a}$,$x\in(0,a)\cup(a,+\infty)$.

$$g'(x)=\frac{2\left(\frac{x-a}{x}+\ln a-\ln x\right)}{(x-a)^2}=\frac{2\left(1-\frac{a}{x}+\ln\frac{a}{x}\right)}{(x-a)^2}.$$

取 $c=-1$ 得 $h(x)=2\ln x-2x+2$,$h(1)=0$,则由(1)知,当 $x\neq 1$ 时,$h(x)<0$,即 $1-x+\ln x<0$.

故当 $x\in(0,a)\cup(a,+\infty)$ 时,$1-\dfrac{a}{x}+\ln\dfrac{a}{x}<0$,

从而 $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$,$(a,+\infty)$ 上单调递减.

点睛 函数的单调性与导数的关注点

(1)关注函数的定义域,单调区间应为定义域的子区间.

(2)已知函数在某个区间上的单调性时转化要等价.

(3)分类讨论求函数的单调区间实质是讨论不等式的解集.

(4)求参数的范围时常用到分离参数法.

【变式训练 2】(1)函数 $f(x)=x^2\ln x$ 的单调递减区间为 (D)

A. $(0,\sqrt{e})$ B. $\left(\dfrac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$ D. $\left(0,\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$

【解析】函数的定义域为 $(0,+\infty)$,

由题得 $f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

令 $f'(x)<0$,解得 $0<x<\dfrac{\sqrt{e}}{e}$,

所以函数的单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$.

(2)若函数 $f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是增函数,则 a 的取值范围是 (D)

A. $[-1,0]$ B. $[-1,+\infty)$

C. $[0,3]$ D. $[3,+\infty)$

【解析】$f'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x^2}$. 因为函数在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是增函数,所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上恒成立,即 $a\geqslant\dfrac{1}{x^2}-2x$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上恒成立.

设 $g(x)=\dfrac{1}{x^2}-2x$,则 $g'(x)=-\dfrac{2}{x^3}-2$.

当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时,$g'(x)<0$,

故 $g(x)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)=4-1=3$,所以 $a\geqslant 3$.

要点 3 利用导数研究函数的极值与最值

【例 3】已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,过曲线 $y=f(x)$ 上的点 $P(1,f(1))$ 的切线方程为 $y=3x+1$,$y=f(x)$ 在 $x=-2$ 时有极值.

(1)求 $f(x)$ 的表达式;

(2)求 $f(x)$ 在 $[-3,1]$ 上的单调区间和最大值.

【解析】(1)$f'(x)=3x^2+2ax+b$,过 $y=f(x)$ 上点 $P(1,f(1))$ 的切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$,即 $y-(a+b+c+1)=(3+2a+b)(x-1)$,

故 $\begin{cases}3+2a+b=3,\\ c-a-2=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a+b=0 & ①,\\ c-a=3 & ②.\end{cases}$

因为 $y=f(x)$ 在 $x=-2$ 时有极值,故 $f'(-2)=0$,

所以 $12-4a+b=0$ ③.

由①②③联立解得 $a=2$,$b=-4$,$c=5$,

则 $f(x)=x^3+2x^2-4x+5$.

(2)$f'(x)=3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如表:

x	-3	$(-3,-2)$	-2	$\left(-2,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},1\right)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	单调递增	13	单调递减	$\frac{95}{27}$	单调递增	4

所以 $f(x)$ 在 $[-3,1]$ 上的最大值为 13,

函数的单调递增区间为 $(-3,-2)$,$\left(\dfrac{2}{3},1\right)$,单调递减区间为 $\left(-2,\dfrac{2}{3}\right)$.

点睛 对于含参数的函数,在讨论其单调性以及求其极值与最值时,应对参数进行分类讨论,在做题时,应确保分类要全面,从而作出正确解答.

【变式训练 3】设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{k}{x}$,$k\in\mathbf{R}$. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线与直线 $x-2=0$ 垂直.

(1)求 k 的值;

(2)求 $f(x)$ 的单调性和极小值.

【解析】(1)由条件得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{k}{x^2}(x>0)$,

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线与直线 $x-2=0$ 垂直,所以 $f'(e)=0$,即 $\dfrac{1}{e}-\dfrac{k}{e^2}=0$,解得 $k=e$.

(2) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}(x>0)$,

令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<e$,令 $f'(x)>0$ 得 $x>e$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减,在 $(e,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x=e$ 时,$f(x)$ 取得极小值 $f(e)=\ln e+\frac{e}{e}=2$.

所以 $f(x)$ 的极小值为 2.

要点 4 利用导数研究不等式问题

【例 4】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 在 $x=2$ 处取得极小值 $-\frac{4}{3}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)若 $f(x)\leqslant m^2+m+\frac{10}{3}$ 对 $x\in[-4,3]$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

【解析】(1)由已知得 $f(2)=-\frac{4}{3}$,$f'(2)=0$.

又 $f'(x)=x^2+a$,所以 $\frac{8}{3}+2a+b=-\frac{4}{3}$,$4+a=0$,解得 $a=-4$,$b=4$,则 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$.

令 $f'(x)=x^2-4>0$,得 $x<-2$ 或 $x>2$,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$,$(2,+\infty)$.

(2) $f(-4)=-\frac{4}{3}$,$f(-2)=\frac{28}{3}$,$f(2)=-\frac{4}{3}$,$f(3)=1$,

则当 $x\in[-4,3]$ 时,$f(x)$ 的最大值为 $\frac{28}{3}$,

故要使 $f(x)\leqslant m^2+m+\frac{10}{3}$ 对 $x\in[-4,3]$ 恒成立,

只要 $\frac{28}{3}\leqslant m^2+m+\frac{10}{3}$,解得 $m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -3$.

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$.

点睛 一些求参数取值范围的问题,常转化为恒成立问题,利用“$f(x)<a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}<a$”和“$f(x)>a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}>a$”的思想解题.存在或有解问题,则根据“$f(x)<a$ 有解 $\Leftrightarrow a>f(x)_{\min}$”和“$f(x)>a$ 有解 $\Leftrightarrow a<f(x)_{\max}$”求解.

【变式训练 4】已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x$,$g(x)=\frac{2}{3}x^3$,求证:$\forall x\in[1,+\infty)$,$f(x)-g(x)<0$ 恒成立.

【证明】令 $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x-\frac{2}{3}x^3(x\geqslant 1)$,则 $h'(x)=x+\frac{1}{x}-2x^2=\frac{-2x^3+x^2+1}{x}=-\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}\leqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,

所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)\leqslant h(1)=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}<0$,

所以 $\forall x\in[1,+\infty)$,$f(x)-g(x)<0$ 恒成立.

要点 5 利用导数研究函数的零点问题

【例 5】设函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-k\ln x$,$k>0$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2)求证:若 $f(x)$ 存在零点,则 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

【解析】(1)由 $f(x)=\frac{x^2}{2}-k\ln x(k>0)$,得 $x>0$ 且 $f'(x)=x-\frac{k}{x}=\frac{x^2-k}{x}$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\sqrt{k}$ 或 $x=-\sqrt{k}$(舍去).

当 x 发生变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如表:

x	$(0,\sqrt{k})$	$\sqrt{k}$	$(\sqrt{k},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$\frac{k(1-\ln k)}{2}$	单调递增

所以,$f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\sqrt{k})$,单调递增区间是 $(\sqrt{k},+\infty)$.$f(x)$ 在 $x=\sqrt{k}$ 处取得极小值 $f(\sqrt{k})=\frac{k(1-\ln k)}{2}$.

(2)证明:由(1)知,$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(\sqrt{k})=\frac{k(1-\ln k)}{2}$.

因为 $f(x)$ 存在零点,所以 $\frac{k(1-\ln k)}{2}\leqslant 0$,从而 $k\geqslant e$.

当 $k=e$ 时,$f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递减,且 $f(\sqrt{e})=0$,

所以 $x=\sqrt{e}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上的唯一零点.

当 $k>e$ 时,$f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递减,且 $f(1)=\frac{1}{2}>0$,$f(\sqrt{e})=\frac{e-k}{2}<0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

综上可知,若 $f(x)$ 存在零点,则 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

点睛 利用导数研究函数零点的策略

利用导数可以研究函数的单调性、最大值、最小值、变化趋势、零点等,根据题目要求,画出函数图象的大体走势,标明函数零点的位置,通过数形结合的思想去分析问题,可以使问题的求解有一个清晰、直观的整体展现.

【变式训练 5】设函数 $f(x)=x^3+bx+c$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直.

(1)求 b 的值;

(2)若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点,求证:$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

【解析】(1) $f'(x)=3x^2+b$.

依题意得 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即 $\frac{3}{4}+b=0$. 故 $b=-\frac{3}{4}$.

(2) 证明：由(1)知 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	$c+\frac{1}{4}$	单调递减	$c-\frac{1}{4}$	单调递增

因为 $f(1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c+\frac{1}{4}$，所以当 $c<-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有大于 1 的零点. 因为 $f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}$，所以当 $c>\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有小于 −1 的零点.

由题设可知 $-\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant\frac{1}{4}$.

当 $c=-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有两个零点 $-\frac{1}{2}$ 和 1.

当 $c=\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有两个零点 −1 和 $\frac{1}{2}$.

当 $-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，且 $x_1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，$x_2\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$x_3\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

综上，若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，则 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

拓展提升

1. 设曲线在某点的切线斜率为负数，则此切线的倾斜角（ B ）

A. 小于 90°　　B. 大于 90°

C. 小于或等于 90°　　D. 大于或等于 90°

2. 函数 $f(x)=(2\pi x)^2$ 的导数是（ C ）

A. $f'(x)=4\pi x$　　B. $f'(x)=4\pi^2x$

C. $f'(x)=8\pi^2x$　　D. $f'(x)=16\pi x$

3. 某物体做直线运动，其位移 s 与时间 t 的函数关系式为 $s=3t-t^2$，则物体运动的初速度为（ B ）

A. 0　　B. 3

C. −2　　D. $3-2t$

4. 函数 $f(x)=e^x-x$ 的单调递增区间为（ C ）

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)$

5. 曲线 $y=\frac{\sin x}{x}$ 在点 $M(\pi,0)$ 处的切线方程为 <u>$y=-\frac{x}{\pi}+1$</u>.

6. 曲线 $y=2x^3-3x^2$ 共有 <u>2</u> 个极值.

7. 函数 $f(x)=6x-x^3\ (x\in[0,1])$ 的最大值为 <u>5</u>.

8. 已知函数 $f(x)=-x^3+12x$，

(1) 求函数的单调区间；

(2) 求函数的极值，并画出函数的草图；

(3) 当 $x\in[-3,1]$ 时，求函数的最值.

【解析】(1) ∵ $f'(x)=-3x^2+12=-3(x-2)(x+2)$，令 $f'(x)>0$，得 $x\in(-2,2)$，∴ $x\in(-2,2)$ 时，函数单调递增；同理，$x\in(-\infty,-2)$ 或 $x\in(2,+\infty)$ 时，函数单调递减.

(2) 当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表：

x	$(-\infty,-2)$	−2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	单调递减	−16	单调递增	16	单调递减

∴ $x=-2$ 时，$f(x)_{极小值}=-16$；$x=2$ 时，$f(x)_{极大值}=16$.

图象略.

(3) 由题得 $f(-3)=-9$，$f(1)=11$，

由(2)得 $f(x)_{极小值}=f(-2)=-16$，

$f(x)_{极大值}=f(2)=16$，

比较端点函数值及极值点的函数值，得

$f(x)_{min}=f(-2)=-16$，$f(x)_{max}=f(1)=11$.

温馨提示：请自主完成课后作业(二十六)

课后作业·单独成册