华语教育◎组编

高中

学业水平考试指导

数学

本册编委：杨成武　陈岗山　申均匀
肖建英

2023
湖南专版

湖南师范大学出版社·长沙

编写说明

本书根据教育部制定的《普通高中课程方案》及各学科课程标准精心打造，着重整合学科知识体系，帮助学生全面掌握学考知识点，高效完成学业水平合格性考试考前复习。本书具有以下三个方面的特色：

1. 设计科学，装帧实用 本书经多方调研，最终采用“1+1”的模式出版。“1”指学生用书，“1”指综合仿真模拟测试卷。学生用书采用总分的方式，根据课程标准的要求，逐个落实学科知识点的梳理和讲解，帮助学生构建学科知识网络。综合仿真模拟测试卷，严格按照湖南省学业水平合格性考试的命题原则和要求，着重体现学考特点，并采用活页的形式，便于师生使用。为更好地满足教学需求，本书还将为教师提供教师用书。教师用书即教师的完整教案，从学业水平合格性考试复习的实际出发，系统指导教师实施复习的全过程。

2. 紧扣课标，全真模拟 本书紧扣课程标准，广泛收集湖南省学业水平合格性考试的最新信息，突出对主干知识的考查，突出对重点、热点的考查。在学生用书中，依据每章考点，集中训练近年的相关真题和模拟题，让学生直接体验学业水平合格性考试的难度，领悟考查要求和命题方向。

3. 整合考点，体例完备 本书侧重考点的整合，使学生在训练过程中把握考点的整体结构和网络，帮助学生全面掌握考点知识。在学生用书中，每章设有四个栏目：

考试指导　准确把握湖南省学业水平合格性考试趋势，从考查内容、能力层次等角度引导学生落实考试要求。

考点梳理　以课程标准为依据，并结合湖南省现行教材教学要求编写，系统梳理和整合了教学内容，以填空方式帮助学生熟记考点。

典例剖析　依据每课时的考点，结合经典例题进行剖析，并配有即学即用的变式练习，使学生能够活学活用，掌握解题方法，体验学业水平考试的难度和方向。

模拟演练　立足学业水平考试实际，精选了近年的相关真题和模拟题，帮助学生适应学考，积累考试经验，提高学习自信。

编者

2022 年 12 月

CONTENTS

目录

必修　第一册

第一章　集合与常用逻辑用语

第1课时　集　合

考试指导

1. 了解集合的含义，能用列举法、描述法表示集合，理解元素与集合的关系，能判断元素与集合的关系.

2. 理解集合之间包含与相等的含义，知道全集与空集的含义，会用 Venn 图表达集合间的关系.

3. 理解集合的并集、交集和补集的含义及运算，能用 Venn 图表达集合的运算，会求集合的交集、并集和补集.

考点梳理

1. 集合与元素

(1)集合中元素的三个特性：确定性、互异性、无序性.

(2)元素与集合的关系是属于或不属于，用符号 $\in$ 或 $\notin$ 表示.

(3)集合的表示方法：列举法、描述法、图示法.

(4)常见数集的记法

集合	非负整数集（自然数集）	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$（或 $\mathbf{N}_+$）	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

2. 集合间的基本关系

(1)子集：若对于任意的 $x\in A$ 都有 $x\in B$，则 $A\subseteq B$.

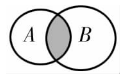
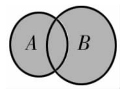
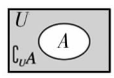
(2)真子集：若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则 $A\subsetneqq B$.

(3)相等：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

(4)空集是任何集合的子集和任何非空集合的真子集.

(5)若一个集合 A 有 n 个元素，则集合 A 有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集.

3. 集合的基本运算

运算	文字语言	集合语言	图形语言
交集	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集	$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$	
并集	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集	$A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$	
补集	由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合，称为集合 A 相对于全集 U 的补集	$\complement_U A=\{x\mid x\in U$，且 $x\notin A\}$	

注意：$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

典例剖析

1. 集合的含义与表示

【例1】已知集合 $A=\{12,a^2+4a,a-2\}$，且 $-3\in A$，则 $a=$ （ D ）

A. -1　　B. -3 或 -1

C. 3　　D. -3

【解析】因为 $-3\in A$，所以令 $a^2+4a=-3$，解得 $a=-1$ 或 $a=-3$，

当 $a=-1$ 时，$a^2+4a=a-2=-3$ 不满足集合的互异性，故舍去；

当 $a=-3$ 时，集合 $A=\{12,-3,-5\}$，满足集合的互异性，故 $a=-3$.

令 $a-2=-3$，解得 $a=-1$，由上述讨论可知，不满足题意，故舍去.

综上所述，$a=-3$. 故选 D.

【点拨】本题考查元素与集合的关系，在利用它们的关系求出未知数的值以后，一定要检验是否满足集合中元素的互异性，防止出错.

【变式训练 1】下列关系中，正确的个数为　　　　（ D ）

①$\sqrt{5}\in\mathbf{R}$；②$\frac{1}{3}\in\mathbf{Q}$；③$0=\{0\}$；④$0\notin\mathbf{N}$；⑤$\pi\in\mathbf{Q}$；⑥$-3\in\mathbf{Z}$.

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

【变式训练 2】(2019・湖南)已知集合 $A=\{1,2,3,a\}$，$4\in A$，则 $a=$　　　　（ D ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 集合间的基本关系

【例 2】已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0,a+2\}$. 若 $A\subseteq B$，则 $a=$　　　　（ B ）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

【解析】∵集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0,a+2\}$，$A\subseteq B$，

∴$a+2=1$，解得 $a=-1$.

故选 B.

【点拨】本题主要考查集合间的基本关系，运用子集的概念进行求解，根据 $A\subseteq B$ 可得出关于 a 的方程，解出 a 即可. 注意：对于含参数的集合问题一定要进行验证.

【变式训练 3】(2020・湖南)已知集合 $A=\{x\,|\,x=1\}$，$B=\{x\,|\,x^2=a\}$. 若 $A\subseteq B$，则 $a=$__1__.

【变式训练 4】集合 $A=\{1,2,3\}$ 的所有子集的个数为　　　　（ D ）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

3. 集合的基本运算

【例 3】已知集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x\}$. 若 $M\cup N=\{0,1,2,3\}$，则 $x=$　　　　（ A ）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

【解析】∵$M=\{0,1,2\}$，$N=\{x\}$，$M\cup N=\{0,1,2,3\}$，

∴$x=3$. 故选 A.

【点拨】本题根据并集的概念求解即可. 准确理解和掌握交集、并集、补集的定义与运算是解决此类问题的关键.

【变式训练 5】已知集合 $A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{-1,0,2\}$，则 $A\cap B=$　　　　（ A ）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$

C. $\{-1,1\}$　　D. $\{0\}$

【变式训练 6】(2017・湖南)已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{1,2\}$，则 $A\cup B$ 中元素的个数为　　　　（ C ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

模拟演练

1. (2022・湖南)设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2\}$，则 $\complement_U A=$　　　　（ D ）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{3,4,5\}$

2. 已知集合 $A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\,|\,x>2\}$，则 $A\cap B=$　　　　（ C ）

A. $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$　　B. $\{x\,|\,-1\leqslant x<2\}$

C. $\{x\,|\,2<x\leqslant 3\}$　　D. $\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 3\}$

3. 已知集合 $A=\{-1,0,2\}$，$B=\{x,3\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $x=$　　　　（ B ）

A. 3　　B. 2　　C. 0　　D. -1

4. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$，则　　　　（ A ）

A. $1\in M$　　B. $2\notin M$

C. $3\in M$　　D. $\{0\}\in M$

5. 已知 $a\in\{0,1,2,3\}$，且 $a\notin\{0,1,2\}$，则 $a=$　　　　（ D ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. (2021・湖南)已知集合 $P=\{x\,|\,x$ 是等腰三角形$\}$，$Q=\{x\,|\,x$ 是直角三角形$\}$，则 $P\cap Q=$　　　　（ A ）

A. $\{x\,|\,x$ 是等腰直角三角形$\}$　　B. $\{x\,|\,x$ 是三角形$\}$

C. P　　D. Q

【解析】因为集合 $P=\{x\,|\,x$ 是等腰三角形$\}$，$Q=\{x\,|\,x$ 是直角三角形$\}$，所以 $P\cap Q$ 为既是等腰三角形又是直角三角形的图形，所以是等腰直角三角形，故选 A.

7. 已知集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{a+1,5\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$　　　　（ D ）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,5\}$

C. $\{2,5\}$　　D. $\{1,2,5\}$

【解析】因为 $A\cap B=\{2\}$，所以 $2\in A$，$2\in B$，所以 $a+1=2$，所以 $a=1$，$b=2$.

即 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,5\}$，所以 $A\cup B=\{1,2,5\}$，故选 D.

8. (2018・湖南)已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{-1,x\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $x=$__2__.

9. 已知 $a\in\{4,5,6\}$，且 $a\in\{6,7\}$，则 $a=$__6__.

【解析】∵$a\in\{4,5,6\}\cap\{6,7\}=\{6\}$，∴$a=6$.

10. 已知集合 $A=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant a+2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2x-8\leqslant 0\}$.

(1)当 $a=3$ 时，求 $A\cup B$；

(2)若 $A\cap B=A$，求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)当 $a=3$ 时，$A=\{x\,|\,3\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 4\}$，

∴$A\cup B=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 5\}$.

(2)∵$A\cap B=A$，∴$A\subseteq B$，

∴$\begin{cases}a\geqslant -2,\\ a+2\leqslant 4,\end{cases}$ 即 $-2\leqslant a\leqslant 2$，

故 a 的取值范围是 $\{a\,|\,-2\leqslant x\leqslant 2\}$.

第 2 课时　常用逻辑用语

考试指导

1. 结合具体实例理解充分条件、必要条件和充要条件的意义，会求某些问题成立的充分条件、必要条件以及充要条件，并进行充要条件的证明.

2. 通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词和存在量词的意义，以及全称量词命题和存在量词命题的意义. 掌握全称量词命题和存在量词命题真假性的判断，能够正确地对含有一个量词的命题进行否定.

考点梳理

1. 充分条件与必要条件

命题真假	"若 p，则 q" 是真命题	"若 p，则 q" 是假命题
推出关系	$p\Rightarrow q$	p __$\nRightarrow$__ q
条件关系	p 是 q 的__充分__条件，q 是 p 的__必要__条件	p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件

2. 充要条件

如果既有__$p\Rightarrow q$__，又有__$q\Rightarrow p$__，就记作__$p\Leftrightarrow q$__. 此时，p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，我们就说 p 是 q 的__充分必要__条件，简称为充要条件.

3. 全称量词和存在量词

	全称量词	存在量词
量词	任意一个、所有的、每一个等	存在一个、至少有一个、有些等
符号	$\forall$	$\exists$
命题	含有全称量词的命题叫做全称量词命题	含有__存在量词__的命题叫做存在量词命题
命题形式	"对集合 M 中任意一个元素 x，$p(x)$ 成立"，可用符号简记为"$\forall x\in M,p(x)$"	"存在集合 M 中的元素 x，$p(x)$ 成立"，可用符号简记为"__$\exists x\in M,p(x)$__"

4. 全称量词命题与存在量词命题的否定

命题	命题的否定	结论
全称量词命题 $\forall x\in M,p(x)$	$\exists x\in M,\neg p(x)$	全称量词命题的否定是存在量词命题
存在量词命题 $\exists x\in M,p(x)$	__$\forall x\in M,\neg p(x)$__	存在量词命题的否定是__全称量词命题__

典例剖析

1. 充分条件与必要条件

【例 1】已知命题 $p:x<2$，$q:2x^2-3x-2<0$，则 p 是 q 的 （ C ）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】$q:2x^2-3x-2<0$，$(2x+1)(x-2)<0$，$-\frac{1}{2}<x<2$，由于 $\{x|-\frac{1}{2}<x<2\}$ 是 $\{x|x<2\}$ 的真子集，因此 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 C.

【点拨】本题考查充分条件、必要条件的判断，命题 p 对应集合 A，命题 q 对应集合 B，则

(1) p 是 q 的充分条件 $\Leftrightarrow A\subseteq B$；

(2) p 是 q 的必要条件 $\Leftrightarrow A\supseteq B$；

(3) p 是 q 的充分必要条件 $\Leftrightarrow A=B$；

(4) p 是 q 的既不充分也不必要条件 $\Leftrightarrow$ 集合 A,B 之间没有包含关系.

【变式训练 1】"$xy>1$"是"$x>1,y>1$"的 （ B ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】如 $x=3,y=\frac{1}{2}$，满足 $xy>1$，但不满足 $x>1$ 和 $y>1$，

所以由 $xy>1$ 得不出 $x>1$ 和 $y>1$.

若 $x>1,y>1$，则 $xy>1$，

所以"$xy>1$"是"$x>1,y>1$"的必要不充分条件.

故选 B.

【变式训练 2】王昌龄是唐朝著名的边塞诗人，被誉为"七绝圣手"，其《从军行》传诵至今，其中一首内容为："青海长云

暗雪山，孤城遥望玉门关. 黄沙百战穿金甲，不破楼兰终不还.”由此推断，“返回家乡”是“攻破楼兰”的 (B)

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】由诗句可知不攻破楼兰⇒不返回家乡，诗句中没有不返回家乡能推出不攻破楼兰，根据命题的等价性可知返回家乡⇒攻破楼兰，攻破楼兰$\nRightarrow$返回家乡. 故“返回家乡”是“攻破楼兰”的充分不必要条件. 故选 B.

2. 充要条件

【例 2】“$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的 (D)

A. 必要不充分条件　　B. 既不充分也不必要条件

C. 充分不必要条件　　D. 充要条件

【解析】A,B 是两个集合，则“$A\cap B=A$”可得“$A\subseteq B$”，“$A\subseteq B$”可得“$A\cap B=A$”.

所以“$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的充要条件. 故选 D.

【点拨】本题主要考查两个集合之间充要条件的判断方法，直接利用两个集合的交集判断两个集合的关系，进而判断充要条件即可.

【变式训练 3】设集合 $M=\{1,2\}$，$N=\{a^2\}$，则“$a=-1$”是“$N\subseteq M$”的 (A)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】当 $a=-1$ 时，$N=\{1\}$，满足 $N\subseteq M$，故充分性成立；

当 $N\subseteq M$ 时，$N=\{1\}$或 $N=\{2\}$，所以 a 不一定满足 $a=-1$，故必要性不成立.

故选 A.

【变式训练 4】已知直线 a,b 表示不同的直线，则 $a/\!/b$ 的充要条件是 (B)

A. 存在平面 α，使 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$

B. 存在平面 α，使 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$

C. 存在直线 c，使 $a\perp c$，$b\perp c$

D. 存在直线 c，使 a,b 与直线 c 所成的角都是 $60°$

【解析】A 选项，$a/\!/b\Rightarrow$存在平面 α，使 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$；反之，a 与 b 可以平等、相交或者异面. 故 A 错误.

B 选项，$a/\!/b\Rightarrow$存在平面 α，使 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$；反之，也成立. 故 B 正确.

C 选项，$a/\!/b\Rightarrow$存在直线 c，使 $a\perp c$，$b\perp c$；反之，a 与 b 可以平行、相交或者异面. 故 C 错误.

D 选项，$a/\!/b\Rightarrow$存在直线 c，使 a,b 与直线 c 所成的角都是 $60°$；反之，a 与 b 可以平行、相交或者异面. 故 D 错误.

故选 B.

3. 全称量词命题与存在量词命题

【例 3】已知命题 $p:a\geqslant 0$，$q:\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-ax+a>0$，则 p 是 q 的 (B)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】$q:\forall\in\mathbf{R}$，$x^2-ax+a>0$，

即 $\Delta=(-a)^2-4a<0$，解得 $0<a<4$，

设 $A=[0,+\infty)$，$B=(0,4)$，$\because B\subseteq A$，

故 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

【点拨】先根据命题 q 求出 a 的取值范围，再利用充分条件、必要条件的定义，即可判断 p 是 q 的必要不充分条件.

【变式训练 5】下列命题中为假命题的是 (B)

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\log_2 x_0=0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\cos x_0=1$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x>0$

【解析】根据对数函数的运算性质，可知 $\log_2 1=0$，可得命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\log_2 x_0=0$”为真命题；

当 $x=0$ 时，$x^2=0$，所以命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>0$”为假命题；

当 $x=0$ 时，可得 $\cos 0=1$，所以命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\cos x_0=1$”为真命题；

根据指数函数的图象与性质，可知 $2^x>0$ 恒成立，所以命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x>0$”为真命题. 故选 B.

【变式训练 6】命题“$\forall x\geqslant 0$，$x^2\geqslant 0$”的否定是 (C)

A. $\forall x\geqslant 0$，$x^2<0$　　B. $\forall x<0$，$x^2<0$

C. $\exists x\geqslant 0$，$x^2<0$　　D. $\exists x<0$，$x^2<0$

模拟演练

1. “$x>1$”是“$x>2$”的 (B)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“$a^2=1$”的 (A)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$过原点的充要条件是 (C)

A. $b=1$　　B. $b=-1$

C. $b=0$　　D. b 可取任意值

4. 下列命题是存在量词命题的是 (B)

A. 任意给定实数 x，$x^2\geqslant 0$

B. 存在有理数 x，使得 $3x-2=0$

C. 每一个有理数都能写成分数的形式

D. 所有的自然数都大于或等于零

5. 命题“$\exists x>0$，$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 3$”的否定是 (C)

A. $\exists x>0, x+\frac{1}{x}\leqslant 3$　　B. $\exists x>0, x+\frac{1}{x}<3$

C. $\forall x>0, x+\frac{1}{x}<3$　　D. $\forall x>0, x+\frac{1}{x}\leqslant 3$

6.(2022·湖南)命题“$\forall x\in\mathbf{R}, 2^x>0$”的否定是　　(B)

A. $\exists x\in\mathbf{R}, 2^x>0$

B. $\exists x\in\mathbf{R}, 2^x\leqslant 0$

C. $\forall x\in\mathbf{R}, 2^x<0$

D. $\forall x\in\mathbf{R}, 2^x\leqslant 0$

7.下列命题中是假命题的是　　(A)

A. $\forall x\in\mathbf{R}, 2x^2-3x>0$

B. $\forall x\in\{1,3,0\}, 2x+1>0$

C. $\exists x\in\mathbf{N}$,使$\sqrt{x}\leqslant x$

D. $\exists x\in\mathbf{N}^*$,使x为29的约数

8.已知命题p:$\forall x\in\mathbf{R}, ax^2+2x+3>0$是真命题,那么实数$a$的取值范围是　　(C)

A. $a<\frac{1}{3}$　　B. $0<a\leqslant\frac{1}{3}$

C. $a>\frac{1}{3}$　　D. $a\leqslant\frac{1}{3}$

【解析】若命题p:$\forall x\in\mathbf{R}, ax^2+2x+3>0$是真命题,

则$ax^2+2x+3>0$对于$x\in\mathbf{R}$恒成立.

当$a=0$时,$2x+3>0$可得:$x>-\frac{3}{2}$不满足对于$x\in\mathbf{R}$恒成立,所以$a=0$不符合题意;

当$a\neq 0$时,需满足$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a\times 3<0,\end{cases}$解得$a>\frac{1}{3}$,

所以实数a的取值范围是$a>\frac{1}{3}$,故选C.

9.“$x\geqslant 0$”是“$\sqrt{x}$有意义”的__充要__条件.

10.若命题“$\exists x\in\mathbf{R}, x^2-2x+a\leqslant 0$”是假命题,则实数$a$的取值范围是__$(1,+\infty)$__.

【解析】因为“$\exists x\in\mathbf{R}, x^2-2x+a\leqslant 0$”是假命题,

所以$\forall x\in\mathbf{R}, x^2-2x+a>0$恒成立.

所以$4-4a<0$,解得$a>1$.

即实数a的取值范围是$(1,+\infty)$.

第二章 一元二次函数、方程和不等式

第1课时 等式性质与不等式性质、基本不等式

考试指导

1. 会用不等式或不等式组解决实际问题中的不等关系，会用比较法比较两个实数的大小.

2. 掌握不等式的性质，能利用不等式的性质进行数与式的大小比较或不等式的证明. 通过类比等式与不等式的性质，探索两者之间的共性与差异.

3. 了解基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$ 的证明过程，能利用基本不等式证明简单的不等式及比较代数式的大小，能应用基本不等式解决一些简单的实际问题.

考点梳理

1. 基本事实

两个实数 a,b，其大小关系有三种可能，即 $a>b,a=b,a<b$.

2. 等式的基本性质

(1)如果 $a=b$，那么__$b=a$__.

(2)如果 $a=b,b=c$，那么__$a=c$__.

(3)如果 $a=b$，那么 $a\pm c=b\pm c$.

(4)如果 $a=b$，那么 $ac=bc$.

(5)如果 $a=b,c\neq0$，那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

3. 不等式的性质

性质	别名	性质内容	注意
1	对称性	$a>b\Leftrightarrow b<a$	可逆
2	传递性	$a>b,b>c\Rightarrow a>c$	不可逆
3	可加性	$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$	可逆
4	可乘性	$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$	c 的符号
		$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$	
5	同向可加性	$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$	同向
6	同向同正可乘性	$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$	同向同正
7	可乘方性	$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$	同正

4. 基本不等式

如果 $a>0,b>0$，则 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$，当且仅当__$a=b$__时，等号成立. 其中，$\frac{a+b}{2}$ 叫做正数 a,b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 叫做正数 a,b 的几何平均数.

5. 用基本不等式求最值

用基本不等式 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$ 求最值应注意：

(1)x,y 都是__正数__.

(2)①如果 xy 等于定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值__$2\sqrt{P}$__；

②如果 $x+y$ 等于定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值__$\frac{1}{4}S^2$__.

(3)讨论等号成立的条件是否满足.

典例剖析

1. 不等式的性质

【例1】已知 $a<0<b$，则下列不等式恒成立的是 (B)

A. $a^2<b^2$　　B. $\frac{a}{b}<1$

C. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　D. $ab>b^2$

【解析】当 $a=-2,b=1$ 时，$a^2>b^2$，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}+\frac{-2}{1}=-\frac{5}{2}<2$，则 A,C 错误；

$\because ab<0,b^2>0,\therefore ab<b^2$，则 D 错误；

$\frac{a}{b}<0<1$，则 B 正确. 故选 B.

【点拨】本题考查不等式的性质，要学会灵活运用不等式的性质对不等式进行变形. 有些题也可采用特殊值法代入进行检验来判断不等式是否成立.

【变式训练1】若 $x>y,m>n$，则下列不等式恒成立的是 (D)

A. $x-m>y-n$　　B. $xm>yn$

C. $nx>my$　　D. $m-y>n-x$

【变式训练 2】若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$a>b$，则下列不等式恒成立的是（ C ）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $a^2>b^2$

C. $a(c^2+1)>b(c^2+1)$　　D. $a|c|>b|c|$

2. 基本不等式

【例 2】求下列函数的最值：

(1)已知 $x>0$，求 $y=2-x-\frac{4}{x}$ 的最大值；

(2)已知 $x>2$，求 $y=x+\frac{1}{x-2}$ 的最小值.

【解析】(1)$\because x>0$，$\therefore x+\frac{4}{x}\geqslant4$，

$\therefore y=2-\left(x+\frac{4}{x}\right)\leqslant2-4=-2$，

$\therefore$ 当且仅当 $x=\frac{4}{x}(x>0)$，即 $x=2$ 时，$y_{\max}=-2$.

(2)$\because x>2$，$\therefore x-2>0$，而

$y=x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2\geqslant2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$，

当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}(x>2)$，即 $x=3$ 时，$y_{\min}=4$.

【点拨】利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的条件"一正二定三相等"：

(1)"一正"就是各项必须为正数.

(2)"二定"就是要求和的最小值，必须把构成和的两项之积转化成定值；要求积的最大值，必须把构成积的因式的和转化成定值.

(3)"三相等"是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号，则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方.

【变式训练 3】下列说法正确的是（ C ）

A. 对任意 $a,b\in\mathbf{R}$，$a^2+b^2\geqslant2ab$，$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$ 均成立

B. 若 $a\neq0$，则 $a+\frac{4}{a}\geqslant2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$

C. 若 $a>0$，$b>0$，则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

D. 两个不等式 $a^2+b^2\geqslant2ab$ 与 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立的条件是相同的

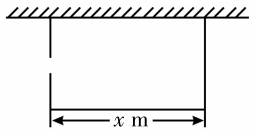
【变式训练 4】已知正实数 x,y 满足 $4x+y=8$，则 xy 的最大值为__4__.

3. 基本不等式的应用

【例 3】某校要建一个面积为 450 m^2 的矩形球场，要求球场的一面利用旧墙，其他各面用钢筋网围成，且在矩形一边的钢筋网的正中间要留一个 3 m 的进出口(如图所示). 设矩形的长为 x m，钢筋网的总长度为 y m.

(1)列出 y 与 x 的关系式，并写出 x 的范围；

(2)问矩形的长与宽各为多少米时，所用钢筋网的总长度最小?



【解析】(1)矩形的宽为 $\frac{450}{x}$ m，$y=2\cdot\frac{450}{x}-3+x=\frac{900}{x}+x-3$.

由题意可知 $x>0$，且 $\frac{450}{x}>3$，所以 $0<x<150$，

即 x 的范围为 $\{x|0<x<150\}$.

(2)$y=\frac{900}{x}+x-3\geqslant2\sqrt{\frac{900}{x}\cdot x}-3=60-3=57$，

当且仅当 $\frac{900}{x}=x(0<x<150)$，即 $x=30$ 时取等号，此时宽为 $\frac{450}{x}=15$ m. 所以长为 30 m，宽为 15 m 时，所用的钢筋网的总长度最小.

【点拨】解决实际问题时，首先要审清题意，然后将实际问题转化为数学问题，再利用数学知识(函数及不等式等)解决问题.

【变式训练 5】某公司一年购买某种货物 400 吨，每次都购买 x 吨，运费为 4 万元/次，一年的总存储费用为 $4x$ 万元，要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则 $x=$__20__.

【变式训练 6】某公司建造一间背面靠墙的房屋，地面是一个矩形，面积为 60 m^2，房屋正面每平方米的造价为 1 500 元，房屋侧面每平方米的造价为 1 000 元，屋顶的造价为 6 000 元. 如果墙高为 3 m，且不计房屋背面和地面的费用，那么把地面矩形较长的一边设计为__$4\sqrt{5}$__m 时，能使房屋的总造价最低.(结果用根式表示)

【解析】设房屋的正面边长为 x m，侧面边长为 y m，总造价为 z 元，则 $xy=60$，即 $y=\frac{60}{x}$，$z=3x\cdot1\ 500+6y\cdot1\ 000+6\ 000=4\ 500x+\frac{360\ 000}{x}+6\ 000\geqslant2\sqrt{4\ 500x\cdot\frac{360\ 000}{x}}+6\ 000=18\ 000\sqrt{5}+6\ 000$.

当且仅当 $4\ 500x=\frac{360\ 000}{x}$，即当 $x=4\sqrt{5}$ 时，z 有最小值，此时 $y=\frac{60}{x}=3\sqrt{5}$；因此把地面矩形较长的一边设计为 $4\sqrt{5}$ m 时，能使房屋的总造价最低。

模拟演练

1.（2019·湖南）已知 $a>b$，$c\in\mathbf{R}$，则下列不等式恒成立的是（ A ）

A. $a+c>b+c$　　B. $ac>bc$

C. $a-c<b-c$　　D. $a^2<b^2$

2.（2021·湖南）当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}$ 的最小值是（ C ）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

【解析】由基本不等式可得 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，所以 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值为 2.

3. 不等式 $a+1\geqslant 2\sqrt{a}$ $(a>0)$ 中等号成立的条件是（ C ）

A. $a=0$　　B. $a=\frac{1}{2}$

C. $a=1$　　D. $a=2$

4. 已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2=1$，则 xy 的最大值是（ D ）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

【解析】因为 $x^2+y^2\geqslant 2xy$，所以 $2xy\leqslant x^2+y^2=1$，得 $xy\leqslant\frac{1}{2}$. 故选 D.

5.（2020·湖南）用 12 cm 长的铁丝折成一个面积最大的矩形，则这个矩形的面积是（ C ）

A. 3 cm^2　　B. 6 cm^2

C. 9 cm^2　　D. 12 cm^2

【解析】设矩形的长、宽分别为 x cm，y cm，

则有 $2(x+y)=12$，即 $x+y=6$，

$\because$ 矩形的面积 $S=xy$，且 $x>0$，$y>0$，

$\therefore S=xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}=9$ cm^2，当且仅当 $x=y=3$ 时等号成立，故选 C.

6.（2022·湖南）已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=4$，则 $a+b$ 的最小值为（ C ）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. 5

【解析】因为 $ab=4$，$a>0$，$b>0$，由基本不等式可得 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2\sqrt{4}=4$. 故选 C.

7. 已知 $x>-1$，则 $x+\frac{4}{x+1}$ 的最小值为__3__.

【解析】因为 $x>-1$，所以 $x+1>0$，

所以 $x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-1\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=3$，

当且仅当 $x+1=\frac{4}{x+1}$，即 $x=1$ 时取等号，

所以 $x+\frac{4}{x+1}$ 的最小值为 3.

8. 要制作一个容积为 4 m^3，高为 1 m 的无盖长方体容器，已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是__160__元.

【解析】设该容器的总造价为 y 元，长方体的底面矩形的长为 x m，因为无盖长方体的容积为 4 m^3，高为 1 m，所以长方体的底面矩形的宽为 $\frac{4}{x}$ m，依题意，得

$$y=20\times4+10\left(2x+\frac{2\times4}{x}\right)$$

$$=80+20\left(x+\frac{4}{x}\right)\geqslant 80+20\times2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=160.$$

第 2 课时 二次函数与一元二次方程、不等式

考试指导

1. 掌握一元二次不等式的解法，能根据“三个二次”之间的关系解决简单问题. 掌握一元二次不等式的实际应用，解决一元二次不等式中的恒成立问题.

2. 借助二次函数的图象，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

考点梳理

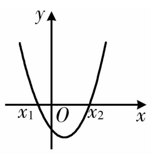
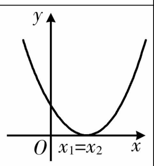
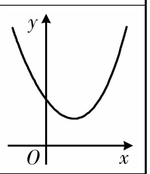
1. 一元二次不等式

定义	只含有一个__未知数__，并且未知数的最高次数是__2__的不等式，叫做一元二次不等式
一般形式	$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，其中 a,b,c 均为常数，$a\neq0$

2. 二次函数的零点

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的__零点__.

3. 二次函数与一元二次方程的根、一元二次不等式的解集的对应关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$的根	有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$，或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

典例剖析

1. 一元二次不等式及其解法

【例 1】解下列不等式：

(1)$2x^2-3x-2>0$；

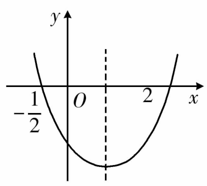
(2)$-3x^2+6x-2>0$；

(3)$4x^2-4x+1\leqslant0$；

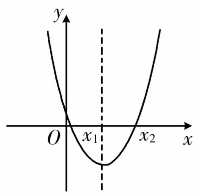
(4)$x^2-2x+2\geqslant0$.

【解析】(1)方程 $2x^2-3x-2=0$ 的解是 $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=2$.

画出二次函数 $y=2x^2-3x-2$ 的图象(图①)，结合图象得不等式 $2x^2-3x-2>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{2}\text{或 }x>2\right\}$.



图①



图②

(2)不等式可化为 $3x^2-6x+2<0$.

对应方程 $3x^2-6x+2=0$，因为 $\Delta=36-4\times3\times2=12>0$，所以它有两个实数根.

解得 $x_1=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$x_2=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

画出二次函数 $y=3x^2-6x+2$ 的图象(图②)，结合图象得不等式 $3x^2-6x+2<0$ 的解集是

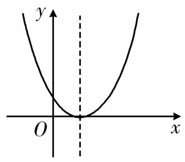
$\left\{x\,\middle|\,1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

所以不等式 $-3x^2+6x-2>0$ 的解集是

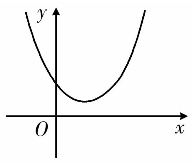
$\left\{x\,\middle|\,1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

(3)方程 $4x^2-4x+1=0$ 的解是 $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$，

画出二次函数 $y=4x^2-4x+1$ 的图象(图③)，结合图象得不等式 $4x^2-4x+1\leqslant0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{2}\right\}$.



图③



图④

(4)因为 $x^2-2x+2=0$ 的判别式 $\Delta<0$，

所以方程 $x^2-2x+2=0$ 无解.

画出二次函数 $y=x^2-2x+2$ 的图象(图④)，结合图象得不等式 $x^2-2x+2>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

【点拨】解一元二次不等式的步骤：(1)将二次项系数化为正数；(2)解相应的一元二次方程；(3)根据一元二次方程的根，结合不等号的方向画图；(4)写出不等式的解集.

容易出现的错误：(1)未将二次项系数化为正数，对应错标准形式；(2)解方程出错；(3)结果未按要求写成集合.

【变式训练 1】不等式 $(x-3)(x+5)>0$ 的解集是 （ B ）

A. $\{x\mid-5<x<3\}$ B. $\{x\mid x<-5$ 或 $x>3\}$

C. $\{x\mid-3<x<5\}$ D. $\{x\mid x<-3$ 或 $x>5\}$

【变式训练 2】求不等式 $-x^2+x+6\geqslant0$ 的解集.

【解析】由 $-x^2+x+6\geqslant0$ 变形得 $x^2-x-6\leqslant0$，

即 $(x-3)(x+2)\leqslant0$，解得 $-2\leqslant x\leqslant3$.

故不等式 $-x^2+x+6\geqslant0$ 的解集为 $\{x\mid-2\leqslant x\leqslant3\}$.

2. 一元二次不等式与二次函数、一元二次方程的关系

【例 2】设 $f(x)=ax^2+(b-8)x-a-ab$，不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $(-3,2)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)当函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域.

【解析】(1)因为不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $(-3,2)$，

所以方程 $f(x)=0$ 的解是 $-3,2$，

即 $f(-3)=0,f(2)=0$.

解得 $a=-3,b=5$，

所以 $f(x)=-3x^2-3x+18$.

(2) $f(x)=-3x^2-3x+18=-3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{75}{4}$，

因为 $x\in[0,1]$，所以当 $x=0$，$f(x)_{\max}=18$；

当 $x=1$ 时，$f(x)_{\min}=12$.

故函数 $f(x)$ 的值域为 $[12,18]$.

【点拨】一元二次不等式解集的端点是一元二次不等式对应方程的根. 给出了一元二次不等式的解集，则可知 a 的符号和 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根，由根与系数的关系可知 a,b,c 之间的关系.

【变式训练 3】若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$，则 $a+b$ 的值为 （ B ）

A. -10 B. -14

C. 10 D. 14

【解析】由题意知 $-\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{3}$ 是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个根，由韦达定理得 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{b}{a}$，$-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{a}$，

解得 $a=-12,b=-2$，所以 $a+b=-14$. 故选 B.

【变式训练 4】若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-3,2)$，则不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集为 （ C ）

A. $(-2,3)$

B. $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

D. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】∵不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-3,2)$，

∴-3 和 2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，且 $a<0$，

$$\therefore\begin{cases}-3+2=-\dfrac{b}{a},\\-3\times2=\dfrac{c}{a},\end{cases}\text{可得 } b=a,c=-6a,$$

则不等式 $cx^2+bx+a>0$ 等价于 $-6ax^2+ax+a>0$，

即 $6x^2-x-1>0$，解得 $x<-\dfrac{1}{3}$ 或 $x>\dfrac{1}{2}$，

故不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

故选 C.

模拟演练

1. (2022·湖南)不等式 $x(x-2)>0$ 的解集为 （ D ）

A. $\{x\mid x<0\}$

B. $\{x\mid x>2\}$

C. $\{x\mid0<x<2\}$

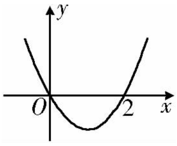
D. $\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$

2. 不等式 $(x-1)(4-x)\geqslant0$ 的解集是 （ D ）

A. $\{x\mid x>4$ 或 $x<1\}$ B. $\{x\mid1<x<4\}$

C. $\{x|x\geqslant4$ 或 $x\leqslant1\}$ D. $\{x|1\leqslant x\leqslant4\}$

3.(2016·湖南)已知函数 $y=x(x-a)$的图象如图所示,则不等式 $x(x-a)<0$ 的解集为 (B)



A. $\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$ B. $\{x|0<x<2\}$

C. $\{x|x\leqslant0$ 或 $x\geqslant2\}$ D. $\{x|x<0$ 或 $x>2\}$

4.不等式 $x^2-7x<0$ 的解集是 (D)

A. $\{x|x<-7$ 或 $x>0\}$ B. $\{x|x<0$ 或 $x>7\}$

C. $\{x|-7<x<0\}$ D. $\{x|0<x<7\}$

5.已知函数 $f(x)=x^2+4x+a$,若对于任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为 (A)

A. $(4,+\infty)$ B. $(-5,+\infty)$

C. $(-4,4)$ D. $[-4,4]$

6.(2019·湖南)若关于 x 的不等式$(x-m)(x-n)\leqslant0$ 的解集为$\{x|2\leqslant x\leqslant4\}$,则 $m+n=$__6__.

【解析】因为关于 x 的不等式$(x-m)(x-n)\leqslant0$ 的解集为$\{x|2\leqslant x\leqslant4\}$,

所以 2,4 是方程$(x-m)(x-n)=0$ 的根,故 $m+n=6$.

7.设 $x\in\mathbf{R}$,使不等式 $3x^2+x-2<0$ 成立的 x 的取值范围为__$\left(-1,\frac{2}{3}\right)$__.

【解析】不等式 $3x^2+x-2<0$,即$(x+1)(3x-2)<0$,解得 $-1<x<\frac{2}{3}$,

故 x 的取值范围是$\left(-1,\frac{2}{3}\right)$.

8.已知 $A=\{x|x^2-3x-4<0\}$,$B=\{x|x^2-4x+3>0\}$,求 $A\cap B$.

【解析】$A=\{x|x^2-3x-4<0\}=\{x|-1<x<4\}$,

$B=\{x|x^2-4x+3>0\}=\{x|x>3$ 或 $x<1\}$,

$A\cap B=\{x|-1<x<1$ 或 $3<x<4\}$.

9.若不等式 $kx^2+2kx-4<0$ 对一切实数 x 都成立,求 k 的取值范围.

【解析】当 $k=0$ 时,不等式为 $-4<0$,对一切实数 x 都成立,

当 $k\neq0$ 时,则要使一元二次不等式 $kx^2+2kx-4<0$ 对一切实数 x 都成立,

需满足$\begin{cases}k<0,\\ \Delta=(2k)^2-4k\times(-4)<0,\end{cases}$解得$-4<k<0$.

综上所述,k 的取值范围为$(-4,0]$.

第三章 函数的概念与性质

第1课时 函数的概念及其表示

考试指导

1. 了解函数的概念，了解函数的构成要素，能求简单函数的定义域和值域.

2. 掌握函数的表示法，了解简单的分段函数及应用.

考点梳理

1. 函数的概念

(1)设 A,B 是<u>非空</u>的实数集，如果对于集合 A 中的<u>任意</u>一个数 x，按照某种确定的<u>对应关系 f</u>，在集合 B 中都有<u>唯一确定</u>的数 y 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作<u>$y=f(x)$</u>，$x\in A$. 其中，x 叫做<u>自变量</u>，x 的取值范围 A 叫做函数的<u>定义域</u>；与 x 的值相对应的 y 值叫做<u>函数值</u>，函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的<u>值域</u>，值域是集合 B 的子集.

(2)一个函数的构成要素为定义域、对应关系与值域. 如果两个函数的<u>定义域</u>相同，并且<u>对应关系</u>完全一致，那么这两个函数是同一个函数.

注意：函数的定义要求数集 A 中的任何一个元素在数集 B 中有且只有一个元素与之对应，即可以“多对一”，不能“一对多”，而 B 中有可能存在与 A 中元素不对应的元素.

2. 函数的表示法

表示函数的常用方法有<u>解析法</u>、<u>列表法</u>和<u>图象法</u>.

3. 分段函数

在函数的定义域内，对于自变量 x 的不同取值区间，有着不同的对应关系，这样的函数通常叫做分段函数.

典例剖析

1. 函数的基本概念

【例 1】“函数(function)”一词，最早是由近代数学家李善兰翻译出来的，之所以这么翻译，他给出的原因是“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数”，即函数指一个量随着另一个量的变化而变化. 下列选项中，两个函数相同的一组是 (A)

A. $f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$

C. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},g(x)=x+1$

D. $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1},g(x)=\sqrt{x^2-1}$

【解析】A 选项，函数 $f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $x\in\mathbf{R}$，又 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，所以两函数是同一函数；

B 选项，函数 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，函数 $g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，定义域不同，故两函数不是同一函数；

C 选项，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，函数 $g(x)=x+1$ 的定义域是 $x\in\mathbf{R}$，定义域不同，故两函数不是同一函数；

D 选项，函数 $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，函数 $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，定义域不同，故两函数不是同一函数.

故选 A.

【点拨】常见函数定义域的基本要求

(1)分式函数中分母不等于零；

(2)偶次根式函数的被开方式大于或等于 0；

(3)一次函数、二次函数的定义域均为 $\mathbf{R}$；

(4)$y=x^0$ 的定义域是$\{x|x\neq 0\}$；

(5)$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$；

(6)$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$的定义域为$(0,+\infty)$.

【变式训练 1】函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+2}$的定义域是 (C)

A. $[3,+\infty)$ B. $(-3,+\infty)$

C. $[-3,-2)\cup(-2,+\infty)$ D. $[-3,2)\cup(2,+\infty)$

【解析】根据题意可得$\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\x+2\neq 0,\end{cases}$所以 $x\in[-3,-2)\cup(-2,+\infty)$.

故选 C.

【变式训练 2】设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+1,x\geqslant 0,\\1,x<0,\end{cases}$ 则 $f[f(-2)]=$__4__.

【解析】$\because f(-2)=1$，$\therefore f[f(-2)]=f(1)=4$.

2. 函数的表示法

【例 2】设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2,x<1,\\4-\sqrt{x-1},x\geqslant 1,\end{cases}$ 则使得 $f(x)\geqslant 1$ 的自变量 x 的取值范围为 (A)

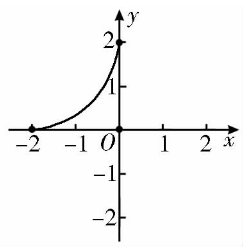
A. $(-\infty,-2]\cup[0,10]$ B. $(-\infty,-2]\cup[0,1]$

C. $(-\infty,-2]\cup[1,10]$ D. $[-2,0]\cup[1,10]$

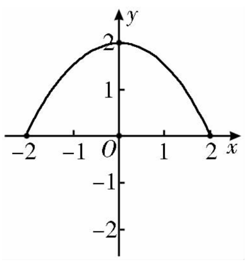
【解析】由题意得，当 $x<1$ 时，令$(x+1)^2\geqslant 1$，即 $x+1\geqslant 1$ 或 $x+1\leqslant -1$，解得 $0\leqslant x<1$ 或 $x\leqslant -2$；当 $x\geqslant 1$ 时，令 $4-\sqrt{x-1}\geqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 10$. 综上所述，使得 $f(x)\geqslant 1$ 的自变量 x 的取值范围为$(-\infty,-2]\cup[0,10]$，故选 A.

【点拨】本题主要考查分段函数的应用，其中涉及不等式的求解、集合的交集和并集运算. 根据分段函数的分段条件，列出相应的不等式，通过求解每个不等式的解集，再利用集合的运算求解即可.

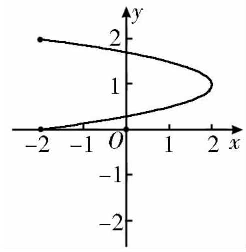
【变式训练 3】若函数 $y=f(x)$的定义域为 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，值域为 $N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，则函数 $y=f(x)$的图象可能是 (B)



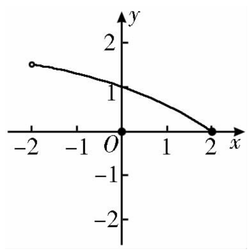
A



B



C



D

【变式训练 4】已知函数 $f(x)$对应的值如下表：

x	0	1	-1
$f(x)$	1	0	-1

则 $f(1)=$__0__.

模拟演练

1. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+3}$，则 $f(6)=$ (A)

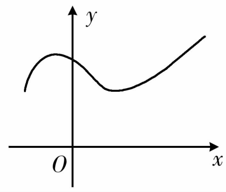
A. 3 B. 6 C. 9 D. $\sqrt{6}$

2. 函数 $y=\sqrt{1-3x}$ 的定义域为 (B)

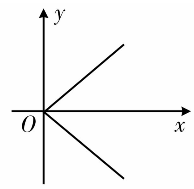
A. $\left\{x\middle|x\geqslant\dfrac{1}{3}\right\}$ B. $\left\{x\middle|x\leqslant\dfrac{1}{3}\right\}$

C. $\left\{x\middle|0<x<\dfrac{1}{3}\right\}$ D. $\left\{x\middle|x<\dfrac{1}{3}\right\}$

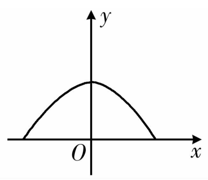
3. 下列四个图象中，不是函数图象的是 (B)



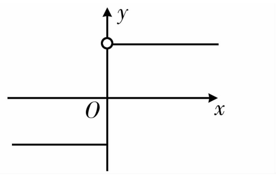
A



B



C



D

4. (2020·湖南)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant 0,\\\sqrt{x},x>0.\end{cases}$ 若 $f(0)=a$，则 $f(a)=$ (C)

A. 4 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 0

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$ (D)

A. 5 B. 3

C. $\dfrac{1}{3}$ D. $\dfrac{1}{5}$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x>0,\\ f(x+1), x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(-1)=$ （ C ）

A. 0　B. 1　C. 2　D. 4

【解析】因为 $f(x)=\begin{cases}2^x, x>0,\\ f(x+1), x\leqslant 0,\end{cases}$

所以 $f(-1)=f(0)=f(1)=2^1=2$，故选 C.

7. 已知函数 $f(x)=x^2+2x(-2\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\in\mathbf{Z})$，则 $f(x)$ 的值域是 （ B ）

A. $[0,3]$　B. $\{-1,0,3\}$

C. $\{0,1,3\}$　D. $[-1,3]$

【解析】函数 $f(x)=x^2+2x(-2\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\in\mathbf{Z})$，所以 $x=-2,-1,0,1$ 对应的函数值分别为 $0,-1,0,3$，所以函数的值域为 $\{-1,0,3\}$. 故选 B.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2,3]$，则 $f(2x-3)$ 的定义域是 （ C ）

A. $[-7,3]$　B. $[-3,7]$

C. $\left[\frac{1}{2},3\right]$　D. $\left[-\frac{1}{2},3\right]$

【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2,3]$，

要使 $f(2x-3)$ 有意义，只需 $-2\leqslant 2x-3\leqslant 3$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3$.

所以 $f(2x-3)$ 的定义域是 $\left[\frac{1}{2},3\right]$. 故选 C.

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x, x\geqslant 0,\\ x+1, x<0,\end{cases}$ 则 $f(2)=$ __2__.

10. 已知二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 满足 $f(0)=6, f(1)=5$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)当 $x\in[-2,2]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最值.

【解析】(1)联立 $\begin{cases}f(0)=b=6,\\ f(1)=1+a+b=5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-2,\\ b=6.\end{cases}$

$\therefore f(x)=x^2-2x+6$.

(2) $\because f(x)=(x-1)^2+5, x\in[-2,2]$，

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=5, f(x)_{\max}=f(-2)=14$.

第2课时　函数的基本性质

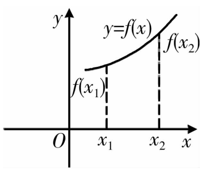
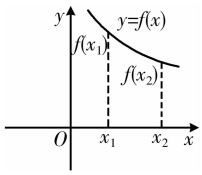
考试指导

1. 掌握函数的单调性与最大(小)值,会证明简单函数的单调性,并能利用函数的单调性求函数的最大(小)值.

2. 理解函数奇偶性的含义,会判断简单函数的奇偶性.

考点梳理

1. 增函数与减函数的定义

<table>
<tr><td rowspan="2">条件</td><td colspan="2">设函数 $f(x)$ 的定义域为 I,区间 $D\subseteq I$:如果 $\forall x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时</td></tr>
<tr><td>都有 $f(x_1)<f(x_2)$</td><td>都有 <u>$f(x_1)>f(x_2)$</u></td></tr>
<tr><td>结论</td><td>那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增. 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时,我们就称它是增函数</td><td>那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减. 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时,我们就称它是 <u>减函数</u></td></tr>
<tr><td>图示</td><td></td><td></td></tr>
</table>

注意:(1)不是所有的函数在定义域上都具有单调性.

(2)在增函数和减函数的定义中,不能把"任意 $x_1,x_2\in D$"改为"存在 $x_1,x_2\in D$".

2. 函数的单调区间

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调递增或单调递减,那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,区间 D 叫做 $y=f(x)$ 的 <u>单调区间</u> .

3. 用定义法判定函数 $f(x)$ 在区间 D 上的单调性的步骤

(1)取值:任取 $x_1,x_2\in D$,规定 $x_1<x_2$;

(2)作差:计算 $f(x_1)-f(x_2)$;

(3)定号:确定 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负;

(4)得出结论:根据同增异减得出结论.

4. 函数的最大值与最小值

<table>
<tr><td>最值</td><td>最大值</td><td>最小值</td></tr>
<tr><td rowspan="3">条件</td><td colspan="2">设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果存在实数 M 满足:对于任意的 $x\in I$,都有</td></tr>
<tr><td>$f(x)\leqslant M$</td><td>$f(x)$ <u>$\geqslant$</u> M</td></tr>
<tr><td colspan="2">存在 $x_0\in I$,使得 <u>$f(x_0)=M$</u></td></tr>
<tr><td>结论</td><td>M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值</td><td>M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值</td></tr>
<tr><td>几何意义</td><td>$f(x)$ 图象上最高点的纵坐标</td><td>$f(x)$ 图象上最低点的 <u>纵坐标</u></td></tr>
</table>

5. 函数奇偶性的几何特征

一般地,图象关于 y 轴对称的函数称为 <u>偶</u> 函数,图象关于原点对称的函数称为 <u>奇</u> 函数. 奇(偶)函数的定义域关于 <u>原点</u> 对称.

6. 函数奇偶性的定义

(1)偶函数:设函数 $f(x)$ 的定义域为 I,如果 $\forall x\in I$,都有 $-x\in I$,且 <u>$f(-x)=f(x)$</u> ,那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数. 其实质是函数 $f(x)$ 上任意一点 $(x,f(x))$ 关于 y 轴的对称点 $(-x,f(x))$ 也在 $f(x)$ 的图象上.

(2)奇函数:设函数 $f(x)$ 的定义域为 I,如果 $\forall x\in I$,都有 $-x\in I$,且 <u>$f(-x)=-f(x)$</u> ,那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数. 其实质是函数 $f(x)$ 上任意一点 $(x,f(x))$ 关于原点的对称点 $(-x,-f(x))$ 也在 $f(x)$ 的图象上.

典例剖析

1. 函数的单调性与最大(小)值

【例1】求二次函数 $f(x)=x^2-2ax+2$ 在 $[2,4]$ 上的最小值.

【解析】由题意,函数 $f(x)=(x-a)^2+2-a^2$,可得 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a]$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增,

(1)当 $a\geqslant4$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $[2,4]$ 上单调递减,所以 $f(x)_{\min}=f(4)=18-8a$;

(2)当 $a\leqslant2$ 时,$f(x)$ 在区间 $[2,4]$ 上单调递增,所以

$f(x)_{\min}=f(2)=6-4a$；

(3)当 $2<a<4$ 时，$f(x)$在区间$[2,a]$上单调递减，在区间$[a,4]$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(a)=-a^2+2$.

综上所述，$f(x)_{\min}=\begin{cases}6-4a,a\leqslant 2,\\ 2-a^2,2<a<4,\\ 18-8a,a\geqslant 4.\end{cases}$

【点拨】本题主要考查二次函数在区间上的最值问题.熟记二次函数的图象与性质，合理分类讨论求解是解答的关键.

【变式训练 1】若函数 $y=ax+1$ 在$[1,2]$上的最大值与最小值的差为 2，则实数 a 的值为 (C)

A. 2　　B. -2　　C. 2 或-2　　D. 0

【解析】①当 $a=0$ 时，$y=ax+1=1$，不符合题意；

②当 $a>0$ 时，$y=ax+1$ 在$[1,2]$上递增，则$(2a+1)-(a+1)=2$，解得 $a=2$；

③当 $a<0$ 时，$y=ax+1$ 在$[1,2]$上单调递减，则$(a+1)-(2a+1)=2$，解得 $a=-2$.

综上，得 $a=\pm 2$. 故选 C.

【变式训练 2】判断函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$在$(1,+\infty)$上的单调性，并求它在区间$[2,6]$上的最大值与最小值.

【解析】根据初等函数的性质，可得函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$在$(1,+\infty)$上单调递减，

因为 $x\in[2,6]$，所以函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$在$[2,6]$上单调递减，

当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$取得最大值 $f(2)=2$；

当 $x=6$ 时，函数 $f(x)$取得最小值 $f(6)=\dfrac{2}{5}$.

2. 函数的奇偶性

【例 2】若函数 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是偶函数，定义域为$[a-1,2a]$，则 $a=$__$\dfrac{1}{3}$__，$b=$__0__.

【解析】因为偶函数的定义域关于原点对称，所以 $a-1=-2a$，解得 $a=\dfrac{1}{3}$，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+bx+b+1$.

又∵$f(x)$为偶函数，

∴$f(-x)=\dfrac{1}{3}(-x)^2+b(-x)+b+1=f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+bx+b+1$ 对定义域内任意 x 恒成立，

即 $2bx=0$ 对任意 $x\in\left[-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right]$恒成立，∴$b=0$.

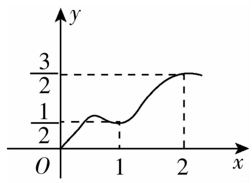
综上，$a=\dfrac{1}{3}$，$b=0$.

【点拨】利用奇偶性求参数的常见类型

(1)定义域含参数：奇函数或偶函数 $f(x)$的定义域为$[a,b]$，根据定义域关于原点对称，利用 $a+b=0$ 求参数.

(2)解析式含参数：根据 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)=f(x)$列式，比较系数，利用待定系数法求解.

【变式训练 3】如图，给出奇函数 $y=f(x)$的局部图象，则 $f(-2)+f(-1)$的值为 (A)



A. -2　　B. 2　　C. 1　　D. 0

【解析】由图知 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f(2)=\dfrac{3}{2}$，又 $f(x)$为奇函数，

所以 $f(-2)+f(-1)=-f(2)-f(1)=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=-2$. 故选 A.

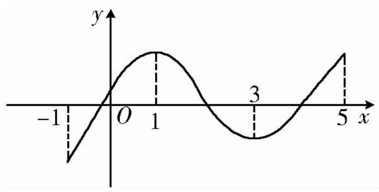
【变式训练 4】已知函数 $f(x)=ax^2+2x$ 是奇函数，则实数 $a=$__0__.

【解析】∵$f(x)$为奇函数，∴$f(-x)+f(x)=0$，

∴$2ax^2=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，∴$a=0$.

模拟演练

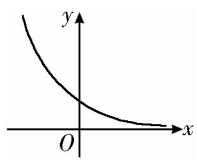
1. (2018·湖南)已知函数 $y=f(x)(x\in[-1,5])$的图象如图所示，则 $f(x)$的单调递减区间为 (B)



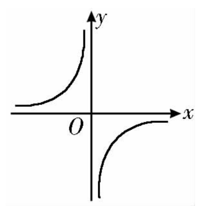
A. $[-1,1]$　　B. $[1,3]$

C. $[3,5]$　　D. $[-1,5]$

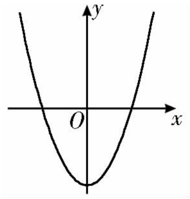
2. 下列图象表示的函数中，在 $\mathbf{R}$ 上是增函数的是 (D)



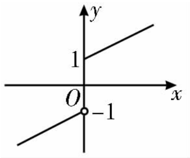
A



B



C



D

3. 下列函数中，在$(0,+\infty)$上单调递减的是　　(B)

A. $y=x-3$　　B. $y=\frac{2}{x}$

C. $y=x^2$　　D. $y=2^x$

4. 函数$f(x)=|x-2|$的单调递增区间是　　(D)

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

5. 已知函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，则满足$f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$的$x$的取值范围是　　(C)

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

6. 函数$f(x)=\frac{6}{x-2}(x\in[3,5])$的最小值是__2__.

7. 已知函数$f(x)=x^3+a$为奇函数，则$a=$__0__.

8. 已知函数$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$，若$f(a)=4$，则$f(-a)=$__4__.

9. (2018·湖南)已知函数$f(x)=x+\frac{1}{x}(x\neq0)$.

(1)求$f(1)$的值；

(2)判断函数$f(x)$的奇偶性，并说明理由.

【解析】(1)$f(1)=2$.

(2)$\because$定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，

$\therefore f(x)$为奇函数.

10. 已知函数$f(x)=(x-m)^2+2$.

(1)若函数$f(x)$的图象过点$(2,2)$，求函数$y=f(x)$的单调递增区间；

(2)若函数$f(x)$是偶函数，求m的值.

【解析】(1)由条件可得$2=(2-m)^2+2$，$\therefore m=2$，

即$f(x)=(x-2)^2+2$，其中单调递增区间为$[2,+\infty)$.

(2)$\because y=f(x)$为偶函数，

$\therefore f(-x)=f(x)$，即$(-x-m)^2+2=(x-m)^2+2$，

$\therefore m=0$.

第3课时 幂函数、函数的应用(一)

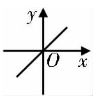
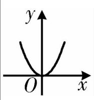
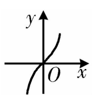
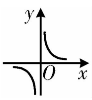
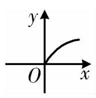
考试指导

1. 了解幂函数的概念，知道五个常见幂函数的图象和性质，能利用幂函数的单调性比较指数幂的大小.

2. 了解函数模型(如一次函数、二次函数、分段函数等)在生活中的广泛应用，能够用给定的函数模型或建立确定的函数模型来解决实际问题.

考点梳理

1. 幂函数

定义	函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数					
性质	解析式	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{-1}$	$y=x^{\frac{1}{2}}$
	图象					
	定义域	**R**	**R**	**R**	$\{x\mid x\neq 0\}$	$\{x\mid x\geqslant 0\}$
	值域	**R**	$\{y\mid y\geqslant 0\}$	**R**	$\{y\mid y\neq 0\}$	$\{y\mid y\geqslant 0\}$
	奇偶性	奇	偶	奇	奇	非奇非偶
	单调性	在**R**上单调递增	在$(-\infty,0]$上单调递减，在$[0,+\infty)$上单调递增	在**R**上单调递增	在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递减	在$[0,+\infty)$上单调递增
	定点	$(1,1)$				
图象特点	在第一象限内，从左向右看，α 越小，其图象越靠近 x 轴					

2. 函数的应用

利用函数模型解决实际问题的步骤：

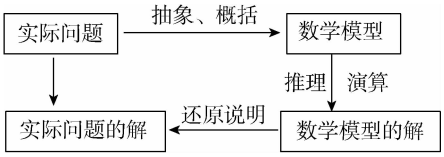
(1)审题：弄清题意，分清条件和结论，理顺数量关系，用函数刻画实际问题，初步选择模型.

(2)建模：将文字语言转化为数学语言，利用数学知识，建立相应的数学模型.

(3)求模：求解数学模型，得到数学结论.

(4)还原：将利用数学知识和方法得出的结论还原到实际问题中.

可将这些步骤用框图表示如下：



典例剖析

1. 幂函数的定义与性质

【例1】已知幂函数 $y=x^{2m^2-3m-2}$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则整数 m 的值为 (A)

A. 0　　B. 1　　C. 0 或 1　　D. 2

【解析】因为幂函数 $y=x^{2m^2-3m-2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

所以 $2m^2-3m-2<0$，解得 $-\frac{1}{2}<m<2$，

又 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=0$ 或 $m=1$，

当 $m=0$ 时，$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

且 $\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$，所以 $y=x^{-2}$ 是偶函数，满足题意；

当 $m=1$ 时，$y=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

而 $\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}$，所以 $y=x^{-3}$ 是奇函数，不满足题意，舍去.

综上，$m=0$，故选 A.

【点拨】判断函数为幂函数的方法

(1)自变量 x 前的系数为 1；

(2)底数为自变量 x；

(3)指数为常数.

【变式训练1】若函数 $f(x)=|m-1|x^{m+1}$ 是幂函数，则 $m=$ (C)

A. 0　　B. 1　　C. 0 或 2　　D. 1 或 2

【解析】若函数 $f(x)=|m-1|x^{m+1}$ 是幂函数，则 $|m-1|=1$，解得 $m=0$ 或 $m=2$，

当 $m=0$ 时,$f(x)=x$ 符合题意;

当 $m=2$ 时,$f(x)=x^3$ 符合题意.

所以 $m=0$ 或 2. 故选 C.

【变式训练 2】若幂函数 $f(x)=(m^2+m-1)x^{m+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,则实数 m 的值为 (A)

A. 1　　B. -1　　C. -2　　D. -2 或 1

【解析】∵$f(x)=(m^2+m-1)x^{m+1}$ 是幂函数,

∴$m^2+m-1=1$,即 $m^2+m-2=0$,解得 $m=-2$ 或 $m=1$,

又∵$f(x)=(m^2+m-1)x^{m+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,

故 $m+1>0$,即 $m>-1$,故 $m=1$.

故选 A.

2. 函数的应用(一)

【例 2】某商场以每件 30 元的价格购进一种商品,试销售中发现,这种商品每天的销量 y(单位:件)与每件的售价 x(单位:元)满足一次函数 $y=162-3x$. 若要每天获得最大的销售利润,则每件商品的售价应定为 (B)

A. 30 元　　B. 42 元

C. 54 元　　D. 越高越好

【解析】由题意得每天的销售利润为 $(x-30)(162-3x)=-3(x-42)^2+432$,$30\leqslant x\leqslant 54$,当 $x=42$ 时,每天的销售利润取得最大值. 故每件商品的售价定为 42 元时,每天才能获得最大的销售利润. 故选 B.

【点拨】用二次函数、分段函数模型解决实际问题的策略

(1)在建立二次函数模型解决实际问题中的最值问题时,一定要注意自变量的取值范围,需根据函数图象的对称轴与函数定义域在坐标系中对应区间之间的位置关系讨论求解;

(2)对于分段函数模型的最值问题,应该先求出每一段上的最值,然后比较大小;

(3)在利用基本不等式求解最值时,一定要检验等号成立的条件,也可以利用函数单调性求解最值.

【变式训练 3】生产一定数量商品的全部费用称为生产成本,某企业一个月生产某种商品 x(单位:万件)时的生产成本为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+20$(单位:万元),商品的售价是每件 20 元,为获取最大利润(利润=收入-成本),该企业一个月应生产该商品数量为 (B)

A. 9 万件　　B. 18 万件

C. 22 万件　　D. 36 万件

【解析】由题意可得收入是 $20x$ 万元,成本是 $\frac{1}{2}x^2+2x+20$,所以此时的利润为 $M=20x-\left(\frac{1}{2}x^2+2x+20\right)=-\frac{1}{2}x^2+18x-20=-\frac{1}{2}(x-18)^2+142\leqslant 142$,

当且仅当 $x=18$,取最大值. 故选 B.

【变式训练 4】为了保护水资源,提倡节约用水,某城市对居民生活用水实行"阶梯水价",计费方法如下表所示. 若某户居民某月交纳水费 60 元,则该月用水量为__16__ m^3.

每户每月用水量	水价
不超过 12 m^3 的部分	3 元/m^3
超过 12 m^3 但不超过 18 m^3 的部分	6 元/m^3
超过 18 m^3 的部分	9 元/m^3

【解析】设用水量为 x m^3,交纳水费为 y 元,

由题可知 $y=\begin{cases}3x, x\leqslant 12,\\ 36+6(x-12), 12<x\leqslant 18,\\ 72+9(x-18), x>18.\end{cases}$

当 $y=60$ 时,解得 $x=16$.

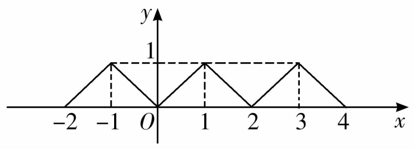
模拟演练

1. 下列函数是幂函数的是 (D)

A. $y=2x^2$　　B. $y=x^2+x$

C. $y=3^x$　　D. $y=x^3$

2. (2022·湖南)已知周期函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图象如图所示,则下列结论中错误的是 (C)



A. $f(2k)=0(k\in\mathbf{Z})$

B. $f(2k+1)=1(k\in\mathbf{Z})$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x+1)=f(x)$

D. $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x+1)=f(1-x)$

3. (2022·湖南)下列函数中,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是 (A)

A. $y=x^{-1}$　　B. $y=x^{\frac{1}{2}}$

C. $y=x^2$　　D. $y=x^3$

4. (2021·湖南)已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象如图所示. 下述四个结论:

①函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$;②函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[0,+\infty)$;③函数 $y=f(x)-x$ 仅有一个零点;④$0<\alpha<1$.

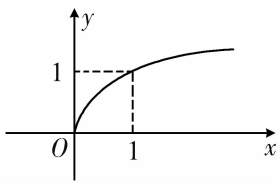
其中所有正确结论的编号是 (B)

A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④



【解析】根据幂函数的性质可

知定义域为$[0,+\infty)$，单调递增区间是$[0,+\infty)$，α的取值范围为$0<\alpha<1$，$y=f(x)-x$的零点为0和1，故①②④正确，③错误.

5.（2016·湖南）已知幂函数$y=x^{\alpha}$（α为常数）的图象经过点$A(4,2)$，则$\alpha=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

6.已知幂函数$y=f(x)$的图象过点$\left(\frac{1}{2},4\right)$，则$f(\sqrt{2})=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

【解析】设$f(x)=x^{a}$，由$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{a}=4$，得$a=-2$，

$\therefore f(x)=x^{-2}$，则$f(\sqrt{2})=\frac{1}{2}$.

7.已知幂函数$f(x)=(m^{2}-2m-2)x^{m}$在$(0,+\infty)$上单调递减，则$m=$ $\underline{-1}$.

【解析】因为$f(x)=(m^{2}-2m-2)x^{m}$为幂函数，

故$m^{2}-2m-2=1$，故$m=3$或$m=-1$，

$f(x)=x^{3}$或$f(x)=x^{-1}$，

又$\because f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，故$m=-1$.

8.某种产品每件80元，每天可售出30件，如果每件定价120元，则每天可售出20件.如果售出件数是定价的一次函数，则这个函数解析式为 $\underline{y=-\frac{1}{4}x+50,0\leqslant x\leqslant 200}$.

【解析】设每件定价为x元时，售出y件，设$y=kx+b$，$k\neq 0$.

因为$x=80$，$y=30$，所以$30=80k+b$ ①，

因为$x=120$，$y=20$，所以$20=120k+b$ ②，

解由①，②组成的方程组得$k=-\frac{1}{4}$，$b=50$，

所以$y=-\frac{1}{4}x+50$.

由$y=-\frac{1}{4}x+50$，$0\leqslant x\leqslant 200$.

故函数解析式为$y=-\frac{1}{4}x+50$，$0\leqslant x\leqslant 200$.

9.某企业开发一种产品，生产这种产品的年固定成本为3 600万元，每生产x千件，需投入成本$c(x)$万元，$c(x)=x^{2}+10x$.若该产品每千件定价a万元，为保证生产该产品不亏损，则a的最小值为 $\underline{130}$.

【解析】由题意建立利润函数关系$f(x)=ax-(x^{2}+10x+3\ 600)$，$x>0$，

整理得$f(x)=-x^{2}+(a-10)x-3\ 600$，

为保证生产该产品不亏损，则$f(x)=-x^{2}+(a-10)x-3\ 600\geqslant 0$，$x>0$，即$a\geqslant x+\frac{3\ 600}{x}+10\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{3\ 600}{x}}+10=130$，

当且仅当$x=\frac{3\ 600}{x}$，即$x=60$时，a取最小值130，此时生产该产品不亏损.

10.（2022·湖南）已知函数$f(x)=\frac{x}{|x|-1}$.

(1)写出函数$f(x)$的定义域，并判断其奇偶性；

(2)证明：函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递减；

(3)讨论关于x的方程$f(x)=kx^{2}(k>0)$的实根个数.

【解析】(1)由题可知，$|x|-1\neq 0$，$\therefore x\neq\pm 1$，

$f(-x)=\frac{-x}{|-x|-1}=\frac{-x}{|x|-1}=-f(x)$，

故$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq\pm 1\}$，$f(x)$是奇函数.

(2)设$0<x_{1}<x_{2}<1$，

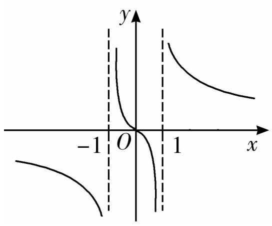
$f(x_{1})-f(x_{2})=\frac{x_{1}}{x_{1}-1}-\frac{x_{2}}{x_{2}-1}=\frac{x_{2}-x_{1}}{(x_{1}-1)(x_{2}-1)}$，

$\because x_{2}-x_{1}>0$，$x_{1}-1<0$，$x_{2}-1<0$，

$\therefore f(x_{1})-f(x_{2})>0$，$\therefore f(x_{1})>f(x_{2})$，

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上单调递减.

(3)$f(x)$的大致图象如图所示，设$g(x)=kx^{2}$，



$\because k>0$，$\therefore g(x)$的图象开口向上且过点$(0,0)$，

$\therefore$当$x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$时，$f(x)$与$g(x)$没有交点.

当$x\in(1,+\infty)$或$x=0$时，$f(x)$与$g(x)$有1个交点.

当$x\in(-1,0)$时，$f(x)=\frac{-x}{x+1}$，$\frac{-x}{x+1}=kx^{2}\Rightarrow kx^{2}+kx+1=0$，

$\Delta=k^{2}-4k$，

当$\Delta=0$，即$k=4$时，$f(x)$与$g(x)$有1个交点；

当$\Delta>0$，即$k>4$时，$f(x)$与$g(x)$有两个交点；

当$\Delta<0$，即$0<k<4$时，$f(x)$与$g(x)$没有交点.

综上所述，当$k\in(0,4)$，$f(x)=kx^{2}$有2个实根；

当$k=4$，$f(x)=kx^{2}$有3个实根；

当$k\in(4,+\infty)$，$f(x)=kx^{2}$有4个实根.

第四章　指数函数与对数函数

第1课时　指数与指数函数

考试指导

1. 理解根式、分数指数幂的意义，能进行指数幂的运算.

2. 掌握指数函数的概念、图象和性质，了解指数函数模型的简单应用.

考点梳理

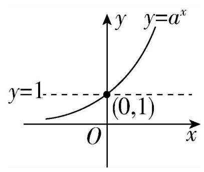
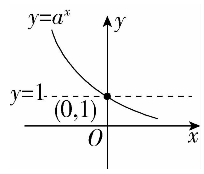
1. 指数与指数幂的运算

指数	n次方根	如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$
	根式	当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=$ $\underline{\ a\ }$； 当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=$ $\underline{\ \lvert a\rvert\ }$ $=\begin{cases}\underline{\ a\ } & (a\geqslant 0),\\ \underline{\ -a\ } & (a<0)\end{cases}$
	分数指数幂	①$a^{\frac{m}{n}}=$ $\underline{\ \sqrt[n]{a^m}\ }$ $(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$； ②$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$； ③0的正分数指数幂等于 $\underline{\ 0\ }$，0的负分数指数幂没有意义
	运算性质	设 $a>0,b>0,r,s\in\mathbf{R}$， ①乘法 $a^ra^s=$ $\underline{\ a^{r+s}\ }$；②除法 $\dfrac{a^r}{a^s}=$ $\underline{\ a^{r-s}\ }$； ③乘方 $(a^r)^s=a^{rs}$，$(ab)^r=a^rb^r$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

2. 指数函数

(1)一般地，$\underline{\ \text{函数 } y=a^x(a>0,\text{且 } a\neq 1)\ }$ 叫做指数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

(2)指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$的图象和性质如表：

底数	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$(0,+\infty)$	
过定点	过定点 $\underline{\ (0,1)\ }$，即 $x=0$ 时，$y=1$	
函数值的变化	当 $x>0$ 时，$y>1$； 当 $x<0$ 时，$0<y<1$	当 $x>0$ 时，$\underline{\ 0<y<1\ }$； 当 $x<0$ 时，$\underline{\ y>1\ }$
单调性	在 $\mathbf{R}$ 上是增函数	在 $\mathbf{R}$ 上是 $\underline{\ \text{减函数}\ }$

典例剖析

1. 指数与指数幂的运算

【例1】已知 $a=2$，则 $\dfrac{1-2a+a^2}{a-1}-\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-a}-\dfrac{1}{a}$ 化简求值的结果是　　(A)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. -1

【解析】原式 $=\dfrac{(a-1)^2}{a-1}-\dfrac{(a-1)^2}{a(a-1)}-\dfrac{1}{a}=a-1-\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{1}{a}=a-2$，把 $a=2$ 代入上式得原式 $=0$.

【点拨】本题考查指数幂的运算，先对式子进行化简再代入求值.

【变式训练1】计算 $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a})\div\sqrt[6]{a}=$ $\underline{\ a\ }$.

【解析】$(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a})\div\sqrt[6]{a}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=a$.

【变式训练2】当 $a<b$ 时，化简 $\sqrt{(a-b)^2}=$ $\underline{\ b-a\ }$.

【解析】因为 $\sqrt{(a-b)^2}=\lvert a-b\rvert$，且 $a-b<0$，

所以 $\sqrt{(a-b)^2}=\lvert a-b\rvert=b-a$.

2. 指数函数的概念

【例 2】已知函数 $y=(2a-3)^x$ 是指数函数，则 a 的取值范围是 $\underline{\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)}$．

【解析】因为 $y=(2a-3)^x$ 是指数函数，

所以 $\begin{cases}2a-3>0,\\2a-3\neq1,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{2}{3}$ 且 $a\neq2$，

即 a 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$．

【点拨】根据函数的类型求参数的值的方法

(1)幂函数需要保证 x 前面的系数为 1；

(2)指数函数不但要保证 x 前面的系数为 1，还有底数大于 0，且不等于 1.

【变式训练 3】已知 $f(x)=(m^2-m-5)\cdot m^x$ 是指数函数，则实数 m 的值是$\underline{\quad 3\quad}$．

【解析】$\because f(x)$ 是指数函数，$\therefore m^2-m-5=1$，解得 $m=3$ 或 $m=-2$，又 $\because m>0$ 且 $m\neq1$，$\therefore m=3$.

【变式训练 4】下列函数是指数函数的是$\underline{\quad ③④\quad}$．

①$y=2\cdot3^x$；②$y=3^{x+1}$；③$y=3^x$；④$y=(2a-1)^x$（a 为常数，$a>\frac{1}{2}$，$a\neq1$）；⑤$y=x^3$.

3. 指数函数的图象与性质

【例 3】若 $a=2^{0.5}$，$b=2^{0.6}$，$c=0.6^2$，则 a,b,c 的大小关系是　　　　（ D ）

A. $a<b<c$　　　　B. $c<b<a$

C. $a<c<b$　　　　D. $c<a<b$

【解析】$\because 2^{0.6}>2^{0.5}>2^0=1$，即 $b>a>1$，

又$\because c=0.6^2<1$，因此，$c<a<b$.

故选 D.

【点拨】利用指数函数的单调性比较 $a,b,1$ 三个数的大小关系，再比较 c 与 1 的大小关系，由此可得出 a,b,c 的大小关系.

【变式训练 5】函数 $f(x)=3^{x^2}$ 的单调递增区间为$\underline{\quad[0,+\infty)\quad}$．

【变式训练 6】已知函数 $f(x)=a^{x-3}-2$ 的图象恒过定点 A，则 A 的坐标为$\underline{\quad(3,-1)\quad}$．

【解析】$f(x)=a^x$ 过定点 $(0,1)$，

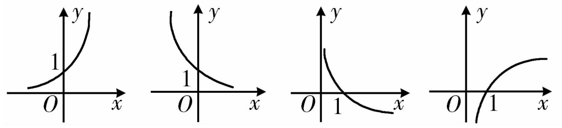
而 $f(x)=a^{x-3}-2$ 可以看成 $f(x)=a^x$ 的图象向右移 3 个单位长度，再向下移 2 个单位长度得到的，

所以函数 $f(x)=a^{x-3}-2$ 的图象恒过定点 $(3,-1)$

即 A 的坐标为 $(3,-1)$.

模拟演练

1. (2019·湖南)函数 $f(x)=2^x$ 的图象大致为　　　　（ A ）



A　　　B　　　C　　　D

2. 函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $[1,2]$ 上的最大值是　　　　（ C ）

A. 1　　　B. 3　　　C. $\frac{1}{3}$　　　D. $\frac{1}{9}$

3. 已知函数 $f(x)=2^x$，则 $f[f(1)]=$　　　　（ D ）

A. $\frac{1}{2}$　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 4

4. 使不等式 $2^{3x-1}-2>0$ 成立的 x 的取值范围是　　　　（ B ）

A. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　　B. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　　D. $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant0,\\2^x,x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x-1)>4$ 的 x 的取值范围是　　　　（ D ）

A. $(1,3)$　　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-1,1)\cup(3,+\infty)$　　　D. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

【解析】当 $x-1\leqslant0$，即 $x\leqslant1$ 时，$f(x-1)=(x-1)^2>4$，解得 $x<-1$ 或 $x>3$，$\therefore x<-1$，

当 $x-1>0$，即 $x>1$ 时，$f(x-1)=2^{x-1}>4$，解得 $x>3$，

$\therefore x>3$，

综上，x 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

故选 D.

6. 函数 $f(x)=a^{x-1}$ 的定义域和值域都是 $[1,2]$，则实数 a 的值是　　　　（ D ）

A. $\frac{1}{3}$　　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　C. 1　　　D. 2

【解析】当 $0<a<1$ 时，指数函数 $f(x)=a^{x-1}$ 在定义域 $[1,2]$ 上为减函数，则由题意得 $f(1)=a^{1-1}=2$ 无解；当 $a>1$ 时，指数函数 $f(x)=a^{x-1}$ 在定义域 $[1,2]$ 上为增函数，则由题意得 $f(1)=a^{1-1}=1$，$f(2)=a^{2-1}=2$，解得 $a=2$ 符合题意. 故选 D.

7. (2022·湖南)求值：$8^{\frac{1}{3}}=\underline{\quad 2\quad}$．

8. (2021·湖南)满足 $2^x>2$ 的 x 的取值范围是$\underline{\quad(1,+\infty)\quad}$．

【解析】将 $2^x>2$ 变成 $2^x>2^1$，由指数函数的单调性可得

$x>1$.

9. 函数 $f(x)=4+a^{x-1}(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象恒过定点 $\underline{(1,5)}$.

10. 当 $a\in(0,1)$ 时,不等式 $a^{2x^2-3x+2}>a^{2x^2+x-3}$ 的解集为 $\underline{\left\{x\mid x>\frac{5}{4}\right\}}$.

11. (2020·湖南)已知函数 $f(x)=a^{|x|}$,$g(x)=a^{-|x|}$,其中 $a>0$,且 $a\neq1$.

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性,并说明理由;

(2)若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,求 a 的取值范围;

(3)设 $f(1)=2$,直线 $y=t_1$ 与 $y=f(x)$ 的图象交于 A,B 两点,直线 $y=t_2$ 与 $y=g(x)$ 的图象交于 C,D 两点,得到四边形 $ABCD$.证明:存在实数 t_1,t_2,使四边形 $ABCD$ 为正方形.

【解析】(1)∵ $f(x)=a^{|x|}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称,

又∵ $f(-x)=a^{|-x|}=a^{|x|}=f(x)$,

∴ $f(x)$ 为偶函数.

(2)不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,

即 $a^{|x|}\geqslant a^{-|x|}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,

∵ $|x|\geqslant-|x|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,

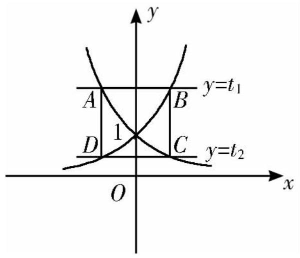
∴当 $y=a^x$ 为增函数时,$a^{|x|}\geqslant a^{-|x|}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,

∴ a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

(3)∵ $f(1)=2$,∴ $a=2$,

∴ $f(x)=2^{|x|}$,$g(x)=2^{-|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

如图所示,设 $B(x,t_1)$,$C(x,t_2)$,$x>0$,



由题意得 $t_1-t_2=2x$,且 $2^x=t_1$,$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t_2$,

∴ $2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x=2x$,即 $2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x-2x=0$,

令 $F(x)=2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x-2x$,$x>0$,

∵ $F(1)=-\frac{1}{2}<0$,$F(3)=\frac{15}{8}>0$,

∴存在 $x_0\in(1,3)$,使 $F(x_0)=0$.

∴存在实数 t_1,t_2,使四边形 $ABCD$ 为正方形.

第 2 课时 对数与对数函数

考试指导

1. 理解对数的概念及其运算性质,知道换底公式,能进行对数的运算.

2. 掌握对数函数的概念、图象和性质,了解对数函数模型的简单应用,知道对数函数与指数函数互为反函数.

考点梳理

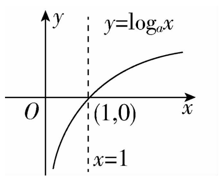
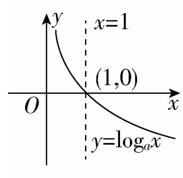
1. 对数与对数运算

对数	概念	如果 $a^x=N(a>0$,且 $a\neq1)$,那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数,记作 $x=\underline{\ \log_a N\ }$
	性质	①零和负数没有对数; ②$\log_a a=\underline{\ 1\ }(a>0,a\neq1)$; ③$\log_a 1=\underline{\ 0\ }(a>0,a\neq1)$
	运算性质	设 $a>0,a\neq1,M>0,N>0$, ①$\log_a(MN)=\underline{\ \log_a M+\log_a N\ }$; ②$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$; ③$\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$
	公式	设 $N>0,a>0,b>0,a\neq1,b\neq1,m\neq0,n\neq0$, ①常用对数:$\log_{10}N=\underline{\ \lg N\ }$; ②自然对数:$\log_e N=\underline{\ \ln N\ }$; ③对数恒等式:$a^{\log_a N}=\underline{\ N\ }$; ④换底公式:$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$. 推论:$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

2. 对数函数

(1)一般地,$\underline{\ 函数\ y=\log_a x(a>0,且\ a\neq1)\ }$叫做对数函数,其中 x 是自变量,函数的定义域是$\underline{\ (0,+\infty)\ }$.

(2)对数函数 $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq1)$的图象和性质如表:

底数	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	$\mathbf{R}$	
过定点	过定点$\underline{\ (1,0)\ }$,即 $x=1$ 时,$y=0$	
单调性	在$(0,+\infty)$上是增函数	在$(0,+\infty)$上是$\underline{减函数}$
函数值的变化	当 $x\in(0,1)$时, $y\in(-\infty,0)$; 当 $x\in[1,+\infty)$时, $y\in[0,+\infty)$	当 $x\in(0,1)$时, $y\in(0,+\infty)$; 当 $x\in[1,+\infty)$时, $y\in(-\infty,0]$
对称性	函数 $y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$ 的图象关于$\underline{\ x\ }$轴对称	

典例剖析

1. 对数与对数运算

【例 1】设 $\log_a 2=m,\log_a 3=n$,则 a^{2m+n} 的值为 (A)

A. 12　　B. 16　　C. 6　　D. 18

【解析】由题意可知 $a^m=2,a^n=3$,

则 $a^{2m}=(a^m)^2=4,a^{2m+n}=a^{2m}\cdot a^n=4\times3=12$.

故选 A.

【点拨】本题考查对数式与指数式的互化,再利用指数幂的运算性质求解.

【变式训练 1】已知 $\log_4 x=2$,则 $x=$ (C)

A. ±4　　B. 4　　C. 16　　D. 2

【变式训练 2】$\log_3\frac{1}{3}+\log_{\frac{1}{2}}2+\log_2 8$ 的值为$\underline{\ 1\ }$.

【解析】原式$=\log_3 3^{-1}+\log_{2^{-1}}2+\log_2 2^3$

$=-\log_3 3-\log_2 2+3\log_2 2$

$=-1-1+3=1$.

2. 对数函数的概念

【例 2】已知函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

【解析】(1)$\because\frac{1-x}{1+x}>0$, $\therefore -1<x<1$,

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

又令 $z=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{x+1}>0$,

$\therefore y\in\mathbf{R}$,即值域为 $\mathbf{R}$.

(2)由(1)知定义域关于原点对称,

又$\because f(-x)+f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1-x}{1+x}$

$=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{1+x}\right)=\lg 1=0$,

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

【点拨】本题主要考查对数函数的概念、性质及函数奇偶性的概念.

【变式训练 3】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ 2^x+1, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ 的值为 (B)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. 3　　D. 5

【解析】$\because\frac{1}{2}>0$, $\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$,

$\therefore f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=f(-1)$,

又$\because -1<0$, $\therefore f(-1)=2^{-1}+1=\frac{3}{2}$,

$\therefore f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$.

【变式训练 4】函数 $y=\log_2(x^2-1)$ 的单调递增区间为 <u>$(1,+\infty)$</u> .

3. 对数函数的图象与性质

【例 3】比较下列各组数的大小:

(1)$\log_2 0.4$, $\log_3 0.4$, $\log_4 0.4$;

(2)$2^{-\frac{1}{3}}$, $\log_2\frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$.

【解析】(1)$\because$ 对数函数 $y=\log_{0.4}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,

$\therefore \log_{0.4}4<\log_{0.4}3<\log_{0.4}2<\log_{0.4}1=0$.

又幂函数 $y=x^{-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数,

$\therefore\frac{1}{\log_{0.4}2}<\frac{1}{\log_{0.4}3}<\frac{1}{\log_{0.4}4}$,

即 $\log_2 0.4<\log_3 0.4<\log_4 0.4$.

(2)$\because 0<2^{-\frac{1}{3}}<2^0=1$, $\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0$,

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$, $\therefore\log_2\frac{1}{3}<2^{-\frac{1}{3}}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$.

【点拨】(1)比较两个数(式)或几个数(式)的大小,常用的方法有单调性法、图象法、中间搭桥法、作差法、作商法.

(2)当需要比较大小的两个实数均是指数幂或对数式时,可将其看成某个指数函数、对数函数或幂函数的函数值,然后利用该函数的单调性比较.

(3)比较多个数的大小时,先利用“0”和“1”作为分界点,即把它们分为“小于 0”“大于等于 0 小于等于 1”“大于 1”三部分,再在各部分内利用函数的性质比较大小.

【变式训练 5】已知 $a=2^{0.3}$, $b=0.3^{0.2}$, $c=\log_2 0.3$,则 a, b, c 的大小关系为 (A)

A. $c<b<a$　　B. $c<a<b$

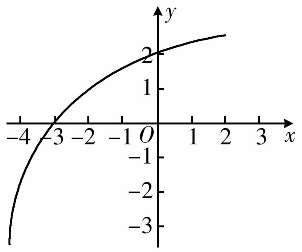
C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

【解析】$a=2^{0.3}>2^0=1$; $b=0.3^{0.2}<0.3^0=1$,

又$\because b>0$, $\therefore b\in(0,1)$;

$c=\log_2 0.3<\log_2 1=0$, $\therefore c<b<a$. 故选 A.

【变式训练 6】设 a 与 b 均为实数,$a>0$ 且 $a\neq 1$. 已知函数 $y=\log_a(x+b)$ 的图象如图所示,则 $a+2b$ 的值为 (C)



A. 6　　B. 8

C. 10　　D. 12

【解析】令 $f(x)=y=\log_a(x+b)$,

由图可知 $f(0)=\log_a b=2$, $f(-3)=\log_a(-3+b)=0$,

即 $\begin{cases}a^2=b,\\ -3+b=1,\\ a>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=4.\end{cases}$

故 $a+2b=2+4\times 2=10$. 故选 C.

模拟演练

1. 计算 $\log_2 10+\log_2 0.4=$ (C)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

2.(2017·湖南)已知 $a=\log_2\frac{1}{2}$,$b=1$,$c=\log_2 4$,则　　(A)

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

3.(2022·湖南)函数 $y=1+\log_a x(a>0$,且 $a\neq1)$的图象恒过定点　　(B)

A. (1,0)　　B. (1,1)

C. (1,2)　　D. (2,1)

4. 函数 $y=\log_2 x(x\geqslant1)$的值域是　　(C)

A. $[2,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$

C. $[0,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

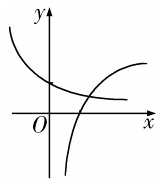
5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ 2^x, x\leqslant0,\end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{1}{8}\right)\right]=$　　(A)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 8　　D. 2

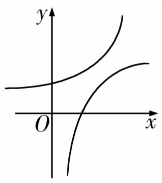
【解析】因为函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ 2^x, x\leqslant0,\end{cases}$

则 $f\left[f\left(\frac{1}{8}\right)\right]=f\left(\log_2\frac{1}{8}\right)=f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$. 故选 A.

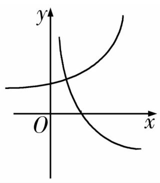
6. 当 $0<a<1$ 时,在同一坐标系中,函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的大致图象是　　(D)



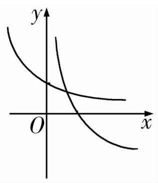
A



B



C



D

7. 设 $2^a=5^b=m$,且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$,则 $m=$　　(A)

A. $\sqrt{10}$　　B. 10　　C. 20　　D. 100

8.(2019·湖南)若 $\log_2 x=1$,则 $x=$__2__.

9. 函数 $f(x)=\log_{(a-1)}x$ 在 $(0,+\infty)$上为减函数,则 a 的取值范围为__(1,2)__.

10.(2016·湖南)已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$,且 $a\neq1)$,且 $f(3)=1$.

(1)求 a 的值,并写出函数 $f(x)$的定义域;

(2)设函数 $g(x)=f(1+x)-f(1-x)$,试判断 $g(x)$的奇偶性,并说明理由;

(3)若不等式 $f(t\cdot4^x)\geqslant f(2^x-t)$对任意 $x\in[1,2]$恒成立,求实数 t 的取值范围.

【解析】(1)由 $f(3)=1$,得 $\log_a 3=1$,$\therefore a=3$.

函数 $f(x)=\log_3 x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(2)$g(x)=\log_3(1+x)-\log_3(1-x)$,定义域为 $(-1,1)$.

$\because g(-x)=\log_3(1-x)-\log_3(1+x)=-g(x)$,

$\therefore g(x)$是奇函数.

(3)$\because f(x)=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$上是增函数,

$\therefore$不等式 $f(t\cdot4^x)\geqslant f(2^x-t)$对任意 $x\in[1,2]$恒成立,

等价于不等式组 $\begin{cases}t\cdot4^x>0 & ①,\\ 2^x-t>0 & ②,\\ t\cdot4^x\geqslant2^x-t & ③\end{cases}$ 对任意 $x\in[1,2]$恒成立.

由①得 $t>0$;由②得 $t<2^x$,依题意,得 $t<2$;由③得 $t\geqslant\frac{2^x}{4^x+1}=\frac{1}{2^x+\frac{1}{2^x}}$.

令 $u=2^x$,则 $u\in[2,4]$. 易知 $y=u+\frac{1}{u}$ 在区间 $[2,4]$上是增函数,$\therefore y=u+\frac{1}{u}$ 在区间 $[2,4]$上的最小值为 $\frac{5}{2}$,故 $\frac{1}{2^x+\frac{1}{2^x}}$ 的最大值为 $\frac{2}{5}$,依题意,得 $t\geqslant\frac{2}{5}$.

综上所述,$t\in\left[\frac{2}{5},2\right)$.

第3课时　函数的应用(二)

考试指导

1. 理解方程的根与函数的零点的概念及关系,会判断简单函数的零点所在的区间.

2. 知道用二分法求方程的近似解的步骤,能根据给出的函数值及精确度求方程的近似解.

3. 理解指数函数、对数函数和一次函数模型的变化规律,能根据不同的条件,选择适当的函数模型解决有关问题.

4. 能用常见函数模型解决一些实际问题.

考点梳理

1. 三种常见函数模型的增长差异

函数	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=kx(k>0)$
在$(0,+\infty)$上的增减性	增函数	增函数	增函数
图象的变化	随x的增大逐渐变"陡"	随x的增大逐渐趋于稳定	随x的增大匀速上升
增长速度	$y=a^x$的增长快于$y=kx$的增长,$y=kx$的增长快于$y=\log_a x$的增长		
增长结果	会存在一个x_0,当$x>x_0$时,有$a^x>kx>\log_a x$		

2. 函数的零点

(1)对于一般函数$y=f(x)$,我们把使$f(x)=0$的实数x叫做函数$y=f(x)$的零点.

(2)方程、函数、图象之间的关系

方程$f(x)=0$有实数解$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$有零点$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$的图象与x轴有公共点.

(3)函数零点存在定理

如果函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是一条连续不断的曲线,且有$f(a)f(b)<0$,那么,函数$y=f(x)$在区间(a,b)内至少有一个零点,即存在$c\in(a,b)$,使得$f(c)=0$,这个c也就是方程$f(x)=0$的解.

3. 二分法

(1)二分法的定义

对于在区间$[a,b]$上图象连续不断且$f(a)f(b)<0$的函数$y=f(x)$,通过不断地把它的零点所在区间一分为二,使所得区间的两个端点逐步逼近零点,进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

(2)用二分法求函数$y=f(x)$零点的近似值

给定精确度ε,用二分法求函数$y=f(x)$零点x_0的近似值的一般步骤如下:

①确定零点x_0的初始区间$[a,b]$,验证$f(a)f(b)<0$.

②求区间(a,b)的中点c.

③计算$f(c)$,并进一步确定零点所在的区间:

若$f(c)=0$(此时$x_0=c$),则c就是函数的零点;

若$f(a)f(c)<0$(此时$x_0\in(a,c)$),则令$b=c$;

若$f(c)f(b)<0$(此时$x_0\in(c,b)$),则令$a=c$.

④判断是否达到精确度ε:若$|a-b|<\varepsilon$,则得到零点的近似值a(或b);否则重复步骤②~④.

4. 函数模型的应用

用函数模型解应用题的四个步骤:

(1)审题——弄清题意,分清条件和结论,理顺数量关系,初步选择模型;

(2)建模——将自然语言转化为数学语言,将文字语言转化为符号语言,利用数学知识建立相应的数学模型;

(3)求模——求解数学模型,得出数学模型的解;

(4)还原——将数学结论还原到实际问题.

典例剖析

1. 函数的零点

【例1】函数$f(x)=\log_3(x+1)+x-2$的零点所在的区间是　　(B)

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

【解析】$\because f(0)=-2$,$f(1)=\log_3 2+1-2=\log_3 2-1<0$,$f(2)=\log_3 3+2-2=1>0$,$f(3)=\log_3 4+3-2=\log_3 4+1>0$,$f(4)=\log_3 5+4-2=\log_3 5+2>0$,

所以零点所在的一个区间可以是$(1,2)$.故选B.

【点拨】(1)求函数零点类问题分为两大类:

①若方程可解,直接求出零点即可;

②若方程不可解,用零点存在定理判断零点存在范围,再用二分法求近似值.

(2)判断函数零点所在的大致区间的方法:若函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的图象是连续曲线,并且在区间端点的函数值符号不同,即$f(a)f(b)<0$,则在区间$[a,b]$内,函数

$y=f(x)$至少有一个零点，即相应的方程$f(x)=0$在区间$[a,b]$内至少有一个实数解.

【变式训练 1】在下列区间中，函数$f(x)=2^x-3$的零点所在的区间为 （ B ）

A. $(0,1)$ B. $(1,2)$ C. $(2,3)$ D. $(3,4)$

【变式训练 2】若函数$f(x)=x^2+2x+3a$没有零点，则实数a的取值范围为 （ B ）

A. $a<\frac{1}{3}$ B. $a>\frac{1}{3}$ C. $a\leqslant\frac{1}{3}$ D. $a\geqslant\frac{1}{3}$

2. 函数模型的应用

【例 2】漳州市某研学基地，因地制宜划出一片区域，打造成“生态水果特色区”. 经调研发现：某水果树的单株产量W(单位：kg)与施用肥料x(单位：kg)满足如下关系：$W(x)=\begin{cases}2(x^2+17),0\leqslant x\leqslant 2,\\ 50-\frac{8}{x-1},2<x\leqslant 5,\end{cases}$且单株施用肥料及其他成本总投入为$20x+10$元. 已知这种水果的市场售价大约为10元/kg，且销路畅通供不应求. 记该水果树的单株利润为$f(x)$(单位：元).

(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)当施用肥料为多少千克时，该水果树的单株利润最大？最大利润是多少？

【解析】(1)由已知$f(x)=10W(x)-(20x+10)$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases}20(x^2+17)-(20x+10),0\leqslant x\leqslant 2,\\ 500-\frac{80}{x-1}-(20x+10),2<x\leqslant 5,\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}20x^2-20x+330,0\leqslant x\leqslant 2,\\ 490-\frac{80}{x-1}-20x,2<x\leqslant 5.\end{cases}$$

(2)由(1)得当$0\leqslant x\leqslant 2$时，$f(x)=20x^2-20x+330=20\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+325$，

$\therefore$当$0\leqslant x\leqslant 2$时，$f(x)\leqslant f(2)=370$；

当$2<x\leqslant 5$时，$f(x)=490-\frac{80}{x-1}-20x$

$=490-\left[\frac{80}{x-1}+20(x-1)+20\right]$

$=470-\left[\frac{80}{x-1}+20(x-1)\right]\leqslant 470-2\sqrt{\frac{80}{x-1}\cdot 20(x-1)}$

$=390$，

当且仅当$\frac{80}{x-1}=20(x-1)$时，即$x=3$时等号成立，

$\because 370<390$，$\therefore$当$x=3$时，$f(x)_{\max}=390$，

即当施用肥料为3千克时，该水果树的单株利润最大，最大利润是390元.

【点拨】解函数应用题的关键是耐心读题、理解题意、分析题目中所包含的数量关系(包括等量关系和不等量关系).

【变式训练 3】(2022·湖南)大西洋鲑鱼每年都要逆流而上，游回产地产卵，研究鲑鱼的科学家发现鲑鱼的游速v(单位：m/s)可以表示为$v=\frac{1}{2}\log_3\frac{O}{100}$，其中$O$表示鲑鱼的耗氧量的单位数. 若一条鲑鱼的游速是$\frac{1}{2}$ m/s，则它的耗氧量为 （ B ）

A. 100个单位 B. 300个单位

C. 600个单位 D. 900个单位

【变式训练 4】某新款电视投放市场后第一个月销售了100台，第二个月销售了200台，第三个月销售了400台，第四个月销售了790台，则下列函数模型中能较好地反映销量y与投放市场的月数$x(1\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{N}^*)$之间的关系的是 （ C ）

A. $y=100x$ B. $y=50x^2-50x+100$

C. $y=50\times 2^x$ D. $y=100^x$

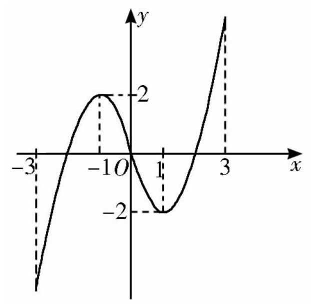
模拟演练

1. (2018·湖南)函数$f(x)=\log_2(x-1)$的零点为 （ C ）

A. 4 B. 3

C. 2 D. 1

2. (2020·湖南)已知定义在$[-3,3]$上的函数$y=f(x)$的图象如图所示，下述四个结论：



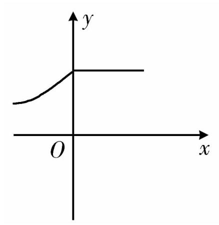
①函数$y=f(x)$的值域为$[-2,2]$；②函数$y=f(x)$的单调递减区间为$[-1,1]$；③函数$y=f(x)$仅有两个零点；④存在实数a满足$f(a)+f(-a)=0$.

其中所有正确结论的编号是 （ D ）

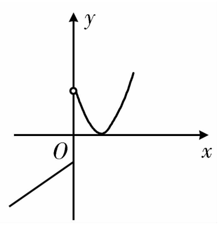
A. ①② B. ②③

C. ③④ D. ②④

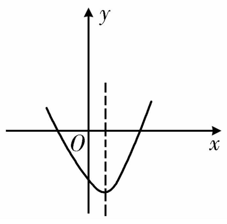
3. 下列图象表示的函数能用二分法求零点的是 （ C ）



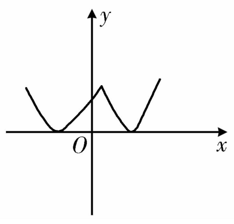
A



B



C



D

4. 在下列区间中,函数 $f(x)=\frac{1}{2}-x^3$ 有零点的区间是 (A)

A. $[0,1]$　　B. $[1,2]$

C. $[-2,-1]$　　D. $[-1,0]$

5.(2022·湖南)函数 $f(x)=\ln x+x-2$ 的零点所在的大致区间为 (B)

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

6. 当 $2<x<4$ 时,$2^x,x^2,\log_2 x$ 的大小关系是 (B)

A. $2^x>x^2>\log_2 x$　　B. $x^2>2^x>\log_2 x$

C. $2^x>\log_2 x>x^2$　　D. $x^2>\log_2 x>2^x$

7. 已知函数 $f(x)=ax^2-bx+1$ 的零点为 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$,则 $a=$ __-6__,$b=$ __1__.

8. 若一次函数 $f(x)=ax+b$ 有一个零点 2,那么函数 $g(x)=bx^2-ax$ 的零点是 __$-\frac{1}{2}$ 和 0__.

【解析】∵2 为函数 $f(x)=ax+b$ 的零点,

∴$b=-2a$ 且 $a\neq 0$.

由 $g(x)=bx^2-ax=-2ax^2-ax=0$,

解得 $x=0$ 或 $x=-\frac{1}{2}$.

9.(2021·湖南)已知函数 $f(x)=x(x-a)(x-2)(x-3)$ 的零点之和等于 4.

(1)求 a 的值;

(2)令 $g(x)=f(x+1)$,证明:$g(x)$ 是偶函数;

(3)求 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的值域.

【解析】(1)由题意可得,$f(x)$ 的零点为 $0,a,2,3$,

又因为 $f(x)$ 的零点之和为 4,

所以 $0+a+2+3=4$,解得 $a=-1$.

(2)证明:因为 $g(x)=f(x+1)=(x+1)(x+2)(x-1)\cdot(x-2)=(x^2-1)(x^2-4)$,

$g(-x)=[(-x)^2-1][(-x)^2-4]=(x^2-1)(x^2-4)=g(x)$,

所以 $g(x)$ 为偶函数.

(3)方法一:$f(x)=x(x+1)(x-2)(x-3)=(x^2-2x)\cdot(x^2-2x-3)$,

令 $t=x^2-2x$,

∵$x\in[-1,2]$,

可得 $y=t(t-3)=t^2-3t$,$t\in[-1,3]$,

∴$y\in\left[-\frac{9}{4},4\right]$,

∴$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的值域为 $\left[-\frac{9}{4},4\right]$.

方法二:由(2)知可令 $x=t+1$,即 $t=x-1$,

∴$f(x)=[(x-1)+1][(x-1)+2][(x-1)-1][(x-1)-2]=(t+1)(t+2)(t-1)(t-2)$

$=(t^2-1)(t^2-4)=(t^2)^2-5t^2+4$

当 $x\in[-1,2]$ 时,$t\in[-2,1]$,$t^2\in[0,4]$,

∴$(t^2)^2-5t^2+4\in\left[-\frac{9}{4},4\right]$,

∴$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的值域为 $\left[-\frac{9}{4},4\right]$.

10.(2019·湖南)已知二次函数 $f(x)=ax^2+2(1-a)x-1$.

(1)若 $f(x)$ 为偶函数,求 a 的值;

(2)判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内是否有零点,请说明理由;

(3)已知函数 $y=f(\sin x)\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 存在最小值 $h(a)$,求 $h(a)$ 的最大值.

【解析】(1)∵$f(x)$ 为偶函数,∴$f(-x)=f(x)$,

∴$ax^2-2(1-a)x-1=ax^2+2(1-a)x-1$,

∴$a=1$.

(2)∵$f(0)=-1$,$f(2)=4a+4-4a-1=3>0$,

∴$f(0)\cdot f(2)=-3<0$,

∴$f(x)$ 在 $(0,2)$ 内有零点.

(3)∵$f(\sin x)=a\sin^2 x+2(1-a)\sin x-1$

$=a\left[\sin^2 x+\frac{1-a}{a}\cdot 2\sin x+\left(\frac{1-a}{a}\right)^2\right]-a\cdot\left(\frac{1-a}{a}\right)^2-1$

$=a\left(\sin x+\frac{1-a}{a}\right)^2-\frac{(1-a)^2}{a}-1$,

∵$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$,∴$-1<\sin x<1$,

又∵函数 $y=f(\sin x)\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 存在最小值 $h(a)$,

∴$\begin{cases}a>0,\\ -1<\frac{a-1}{a}<1,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{2}$,

此时 $h(a)=-\frac{(1-a)^2}{a}-1=-\left(a+\frac{1}{a}\right)+1$,

∵$a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$,当且仅当 $a=1$ 时取等号

∴$h(a)\leqslant -2+1=-1$,即 $h(a)$ 的最大值为 -1.

第五章 三角函数

第 1 课时 任意角和弧度制、三角函数的概念

考试指导

1. 知道任意角的概念，了解正角、负角、零角，体会象限角和终边相同的角的概念，会判断一个角所在的象限，能判断两个角的终边是否相同.

2. 理解弧度制的意义，能进行弧度与角度的互化.

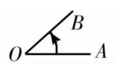
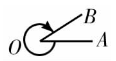
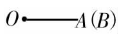
3. 理解任意角三角函数的定义，会由一个角终边上一点的坐标求这个角的三角函数值.

4. 掌握同角三角函数的基本关系式，能利用这些关系式进行三角函数的简单变换.

考点梳理

1. 任意角

(1)角的分类

名称	定义	图示
正角	一条射线绕其端点按__逆时针__方向旋转形成的角	
负角	一条射线绕其端点按__顺时针__方向旋转形成的角	
零角	一条射线__没有__做任何旋转形成的角	

(2)象限角

如果角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么，__角的终边__在第几象限，就说这个角是__第几象限角__. 如果角的终边在坐标轴上，那么就认为这个角不属于任何一个__象限__.

(3)终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

2. 角度制与弧度制

(1)半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l，则角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha|=\frac{l}{r}$.

(2)弧度制与角度制的换算公式：

$2\pi\ \text{rad}=360°$，$1°=$__$\frac{\pi}{180}$__ rad，$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.3°$.

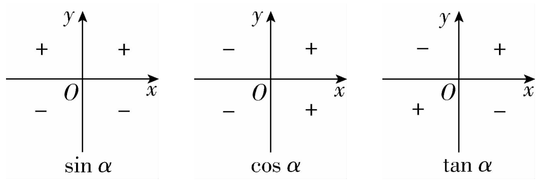
(3)若扇形的圆心角为 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$，半径为 r，弧长为 l，周长为 C，面积为 S，则 $l=r\alpha$，$C=2r+l$，$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$.

3. 任意角的三角函数

(1)定义域

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R}\}$
$\cos\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R}\}$
$\tan\alpha$	$\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha\in\mathbf{R}\text{ 且 }\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(2)正弦、余弦、正切函数值在各象限内的符号



口诀：一全正、二正弦、三正切、四余弦.

4. 同角三角函数的基本关系

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

商数关系：$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

典例剖析

1. 任意角和弧度制

【例 1】已知某扇形的弧长为 $\frac{2\pi}{3}$，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$，则该扇形的

面积为 （ A ）

A. $\frac{2\pi}{3}$　B. π　C. $\frac{4\pi}{3}$　D. $\frac{8\pi}{3}$

【解析】扇形的半径 $r=\frac{l}{|\alpha|}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}=2$，所以 $r=2$，则扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times2=\frac{2\pi}{3}$.

故选 A.

【点拨】灵活运用弧长公式、扇形面积公式列方程求解是解决此类问题的关键.

【变式训练 1】将 300°化为弧度是 （ D ）

A. $-\frac{\pi}{3}$　B. $\frac{7\pi}{6}$　C. $\frac{11\pi}{6}$　D. $\frac{5\pi}{3}$

【解析】$300°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{5\pi}{3}$，

故选 D.

【变式训练 2】下列各角中，与 $\frac{\pi}{3}$ 终边相同的角是 （ B ）

A. $-\frac{5\pi}{6}$　B. $-\frac{5\pi}{3}$　C. $\frac{4\pi}{3}$　D. $\frac{2\pi}{3}$

【解析】因为 $-\frac{5\pi}{6}=-2\pi+\frac{7\pi}{6}$，所以 $-\frac{5\pi}{6}$ 与 $\frac{7\pi}{6}$ 终边相同，故 A 不正确；

因为 $-\frac{5\pi}{3}=-2\pi+\frac{\pi}{3}$，所以 $-\frac{5\pi}{3}$ 与 $\frac{\pi}{3}$ 终边相同，故 B 正确；

$\frac{4\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ 显然与 $\frac{\pi}{3}$ 终边不同，故 C，D 不正确.

故选 B.

2. 三角函数的定义

【例 2】若角 θ 的终边经过点 $P(-1,m)(m\neq0)$，且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $m=$__1__.

【解析】由 $P(-1,m)(m\neq0)$ 知，点 P 在第二或第三象限，

又 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，所以 $m>0$，

由三角函数的定义可知 $\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $m=-1$（舍）或 $m=1$，故 $m=1$.

【点拨】利用正弦函数、余弦函数的定义，求一个角的正弦函数、余弦函数，需要确定三个量：角的终边上任意一个异于原点的点 P 的横坐标 x、纵坐标 y、点 P 到原点的距离 r. 特别注意，当点的坐标含有参数时，应分类讨论.

【变式训练 3】已知角 α 的终边经过点 $(-4,3)$，则 $\sin\alpha=$ （ C ）

A. $\frac{4}{5}$　B. $-\frac{4}{5}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $-\frac{3}{5}$

【解析】角 α 的终边经过点 $(-4,3)$，设 $P(-4,3)$，则 $|PO|=5$，由三角函数的定义可得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

故选 C.

【变式训练 4】已知角 α 的终边经过点 $P(3,4)$，则 $\tan\alpha$ 的值为 （ B ）

A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{4}{3}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{4}{5}$

【解析】已知角 α 的终边过点 $P(3,4)$，由三角函数的定义可得 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

故选 B.

3. 同角三角函数的关系

【例 3】已知 α 是第二象限角，且 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

(1)求 $\cos\alpha$ 的值；

(2)求 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值.

【解析】(1)由 $\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}\end{cases}$ 解得 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$，

∵α 是第二象限角，∴$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

(2) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{2\tan\alpha-1}=\frac{-\frac{4}{3}+1}{-\frac{8}{3}-1}=\frac{1}{11}$.

【点拨】同角三角函数的基本关系式最基本的应用是“知一求二”，要注意这个角所在的象限，由此来决定所求的是一个解还是两个解，同时应体会方程思想的应用.

【变式训练 5】已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，且 α 是第四象限角，则 $\cos\alpha=$ （ A ）

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　D. $\frac{1}{3}$

【解析】已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，且 α 是第四象限角，则 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故选 A.

【变式训练 6】已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 为第四象限角，则 $\tan\alpha=$ （ C ）

A. $\frac{4}{3}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $-\frac{4}{3}$　D. $-\frac{3}{4}$

【解析】∵$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 为第四象限角，可得 $\cos\alpha=$

$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{3}{5}$,

因此,$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.

故选 C.

模拟演练

1. 已知角 θ 的终边经过点 $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则 $\tan\theta=$ (C)

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. -1　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】角 θ 的终边经过点 $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

所以 $\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$.

故选 C.

2. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$,$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $\cos\alpha$ 的值为 (D)

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $-\dfrac{4}{5}$

3. 已知 $\tan\theta<0$,$\cos\theta<0$,则角 θ 所在的象限是 (B)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 已知扇形的中心角为 60°,半径为 2,则其面积为 (D)

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{4\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

【解析】$60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$,$\therefore$ 扇形面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times2^2=\dfrac{2\pi}{3}$.

故选 D.

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$,则 $\sin\alpha\cos\alpha=$ (C)

A. $-\dfrac{7}{9}$　　B. $-\dfrac{7}{18}$　　C. $\dfrac{7}{18}$　　D. $\dfrac{7}{9}$

【解析】$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{16}{9}$,

解得 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{7}{18}$.

故选 C.

6. (2020·湖南)已知角 α 的终边经过点(3,4),则 $\cos\alpha=$ $\underline{\dfrac{3}{5}}$.

7. (2019·湖南)已知 $\sin\alpha=-3\cos\alpha$,则 $\tan\alpha=$ $\underline{-3}$.

8. 一个面积为 2 的扇形,所对的弧长为 1,则该扇形的圆心角为 $\underline{\dfrac{1}{4}}$ 弧度.

【解析】设扇形的半径为 R,则 $\dfrac{1}{2}\times1\times R=2$,故 $R=4$,故圆心角的弧度数为 $\dfrac{l}{R}=\dfrac{1}{4}$.

9. (2021·湖南)已知 $\tan\alpha=2$,则 $\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=$ $\underline{4}$.

【解析】将 $\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 中的分子分母同时除以 $\cos\alpha$ 可得 $\dfrac{\tan\alpha+2}{\tan\alpha-1}=\dfrac{2+2}{2-1}=4$.

10. (2019·湖南)已知 α 为锐角,且 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

(1)求 $\cos\alpha$ 的值;

(2)求 $\sin2\alpha$ 的值.

【解析】(1)$\because\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$,且 α 为锐角,

$\therefore\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{3}{5}$.

(2)$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{25}$.

第2课时 诱导公式、三角函数的图象与性质

考试指导

1. 理解正弦、余弦、正切函数的诱导公式，能利用这些公式求任意角的三角函数值.

2. 掌握正弦函数、余弦函数和正切函数的图象，会用“五点法”画一些简单的三角函数的图象.

3. 掌握正弦函数、余弦函数和正切函数的性质，能分析简单函数的性质.

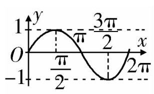
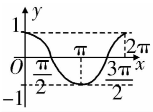
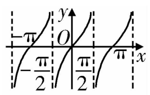
考点梳理

1. 诱导公式

奇变偶不变，符号看象限

函数名称	sin	cos	tan
$\alpha+k\cdot 2\pi$ $k\in\mathbf{Z}$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	—
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	—

2. 三角函数的图象与性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
最小正周期	2π	2π	π
单调性	在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$上是减函数($k\in\mathbf{Z}$)	在$[2k\pi-\pi,2k\pi]$上是增函数，在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$上是减函数($k\in\mathbf{Z}$)	在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数($k\in\mathbf{Z}$)
最值	当$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$时，$y_{max}=1$；当$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$时，$y_{min}=-1$($k\in\mathbf{Z}$)	当$x=$ $2k\pi$ 时，$y_{max}=1$；当$x=2k\pi+\pi$时，$y_{min}=-1$($k\in\mathbf{Z}$)	无
对称轴	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$($k\in\mathbf{Z}$)	$x=k\pi$($k\in\mathbf{Z}$)	无
对称中心	$(k\pi,0)$($k\in\mathbf{Z}$)	$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$($k\in\mathbf{Z}$)	$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$($k\in\mathbf{Z}$)

典例剖析

1. 诱导公式

【例1】设角α的终边过点$(1,-2)$，则$\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=$ (B)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. -1　　D. -3

【解析】由三角函数的定义可得$\tan\alpha=-2$，

因此，$\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{-\cos\alpha}$

$=-\tan\alpha-1=1.$

故选 B.

【点拨】利用诱导公式进行化简，主要是进行角的转化，最终达到角的统一，能求值的要求出值.

【变式训练 1】$\cos\frac{11\pi}{3}=$（ C ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $-\frac{1}{2}$

【解析】$\cos\frac{11\pi}{3}=\cos(\frac{11\pi}{3}-4\pi)=\cos(-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

故选 C.

【变式训练 2】已知角 α 的终边上有一点 P 的坐标是(3,4)，则 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 的值为（ D ）

A. $-\frac{4}{5}$　B. $-\frac{3}{5}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{4}{5}$

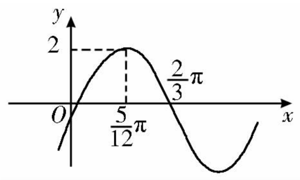
【解析】依题有 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$，

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

故选 D.

2. 正弦函数、余弦函数和正切函数的图象

【例 2】函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，则下列选项中正确的是（ C ）



A. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{3}$　B. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=-\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{3}$　D. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$

【解析】由题意 $T=4\times\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

$2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=2$，$\because -\pi<\varphi<\pi$，

所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{3}$.

故选 C.

【点拨】本题考查三角函数的图象，根据图象可由周期求得 ω，由点的坐标求得 φ（要注意 φ 的范围）.

【变式训练 3】已知点 $\left(\frac{\pi}{4},b\right)$ 在函数 $y=\sqrt{2}\sin x+1$ 的图象上，则 $b=$__2__.

【解析】将点 $\left(\frac{\pi}{4},b\right)$ 代入函数解析式得 $b=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}+1=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2$，

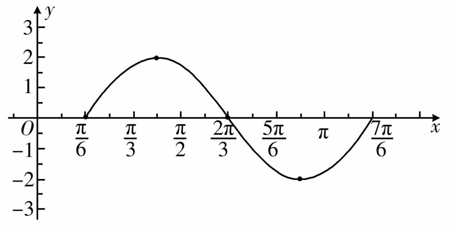
故答案为 2.

【变式训练 4】用"五点法"画出函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期上的图象.

【解析】按五个关键点列表：

$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
y	0	2	0	-2	0

描点并将它们用光滑的曲线连接起来：



3. 正弦函数、余弦函数和正切函数的性质

【例 3】已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(0<\omega<1)$ 的图象的一条对称轴为 $x=\pi$，则 $\omega=$（ C ）

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{3}{4}$

【解析】由条件可知 $\omega\cdot\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $\omega=\frac{2}{3}+k,k\in\mathbf{Z}$，

$\because 0<\omega<1$，$\therefore \omega=\frac{2}{3}$.

故选 C.

【点拨】根据图象求函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的解析式：

(1)利用最值确定 A 的值；

(2)利用图象求周期 T，根据 $\omega=\frac{2\pi}{T}$ 求 ω 的值；

(3)利用特殊点整体代入法确定 φ 的值.

【变式训练 5】函数 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域是（ A ）

A. $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq k\pi-\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x\in\mathbf{R}\middle|x\neq 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x\in\mathbf{R}\middle|x\neq 2k\pi-\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

【变式训练 6】已知函数 $f(x)=2\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期；

(2)求函数 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的单调递增区间.

【解析】(1) $f(x)=2\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)令 $z=2x-\frac{\pi}{6}$, $x\in[0,\pi]$,

则 $z\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$,

因为 $y=\sin z$, $z\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$的单调增区间是 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right]$,

由 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$ 得 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$；

由 $\frac{3\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{11\pi}{6}$ 得 $\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant\pi$.

所以 $f(x)$在$[0,\pi]$内的单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$.

模拟演练

1. (2022·湖南)已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,则 $\sin(\pi-\alpha)=$ (D)

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

2. (2019·湖南)函数 $y=\sin 2x$ 的最小正周期是 (C)

A. 4π　　B. 2π

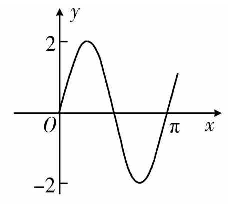
C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

3. 已知 $\cos(2\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,则 $\sin(\pi-\alpha)=$ (B)

A. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\pm\frac{2}{3}$

4. (2021·湖南)已知函数 $y=2\sin\omega x$ 的部分图象如图所示,则 $\omega=$ (C)



A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 4

5. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$是 (D)

A. 周期为 2π 的奇函数　　B. 周期为 2π 的偶函数

C. 周期为 π 的奇函数　　D. 周期为 π 的偶函数

6. (2018·湖南)比较大小：$\sin 25°$ ___>___ $\sin 23°$. (填“>”或“<”)

7. 若 $\sin(\pi+A)=\frac{1}{2}$,则 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)$的值是 ___$\frac{1}{2}$___ .

8. 在$[-\pi,\pi]$内,函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间是 ___$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$___ .

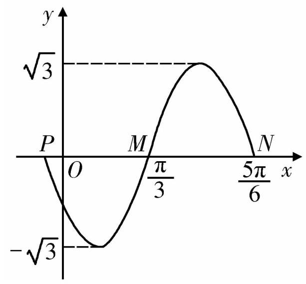
9. 化简：$\frac{\sin(\theta-5\pi)}{\tan(3\pi-\theta)}\cdot\frac{\tan(\pi+\theta)}{\cos(2\pi-\theta)}\cdot\frac{\cos(8\pi-\theta)}{\sin(-\theta-4\pi)}$.

【解析】原式 $=\frac{-\sin(\pi-\theta)}{\tan(\pi-\theta)}\cdot\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

$=\frac{-\sin\theta}{-\tan\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}$

$=-1$.

10. 如图为函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图象的一部分,试求该函数的一个解析式.



【解析】由函数图象可知 $A=\sqrt{3}$,

$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$,解得 $\omega=2$,

把点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$代入 $y=\sqrt{3}\sin(2x+\varphi)$得

$\sqrt{3}\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$,

结合图象得 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,

可得 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$,

故该函数的一个解析式为 $y=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

第3课时 三角恒等变换、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

考试指导

1. 理解两角和与差的正弦、余弦、正切公式，能利用这些公式进行三角函数的求值、化简和证明.

2. 理解二倍角的正弦、余弦、正切公式，能利用这些公式进行三角函数的求值、化简和证明.

3. 能借助图象理解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中参数 ω,φ,A 的意义，了解参数的变化对函数图象的影响.

4. 会用三角函数的图象和性质建立三角函数模型，解决一些简单的实际问题.

考点梳理

1. 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

(1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha-\beta)=$ <u>$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$</u>.

(2) $\sin(\alpha+\beta)=$ <u>$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$</u>；

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$；

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

2. 二倍角公式

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

(2) $\cos 2\alpha=$ <u>$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$</u> $=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

(4)常见变形公式：

①升幂公式：

$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$，$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$.

②降幂公式：

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，

$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin 2\alpha$.

3. 辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

(1) $y=\sin x \xrightarrow{\text{向左(右)平移}|\varphi|\text{个单位长度}} y=\sin(x+\varphi) \xrightarrow{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}} y=\sin(\omega x+\varphi) \xrightarrow{\text{纵坐标变为原来的 }A\text{ 倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)$.

(2)振幅：A；周期：$T=$ <u>$\dfrac{2\pi}{\omega}$</u>；频率：$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$；相位：$\omega x+\varphi$（初相：$\varphi$）.

5. 三角函数的应用

用函数模型解决实际问题的一般步骤：收集数据→画散点图→选择函数模型→求解函数模型→检验.

典例剖析

1. 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

【例1】已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，$\beta$ 是第三象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

【解析】∵ $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，∴ $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$.

∵ β 是第三象限角，

∴ $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\dfrac{12}{13}$，

则 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{33}{65}$.

【点拨】三角函数求值的解题策略

(1)已知某些角的三角函数值，求另外一些角的三角函数值，要注意观察已知角与所求表达式中角的关系，适当地拆角与凑角.

(2)由于和、差角与单角是相对的，因此解题过程中根据需要灵活地进行拆角或凑角的变换. 常见角的变换有：① $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$；② $\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；③ $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$；④ $2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$.

【变式训练1】已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5}{13}$，则 $\sin\alpha$ 的值为 <u>$\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$</u>.

【变式训练2】已知 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，且 α 是第四象限角，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ 的值.

【解析】∵$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，α是第四象限角，

∴$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$；

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$；

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\times\tan\alpha}=\dfrac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}}=7$.

2. 二倍角的正弦、余弦、正切公式

【例2】求下列各式的值：

(1)$2\cos^2\frac{25\pi}{12}-1$；

(2)$\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ$.

【解析】(1)原式$=\cos\frac{25\pi}{6}=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)原式$=\dfrac{2\sin20^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{2\sin20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin40^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{4\sin20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin80^\circ\cos80^\circ}{8\sin20^\circ}=\dfrac{\sin160^\circ}{8\sin20^\circ}=\dfrac{\sin20^\circ}{8\sin20^\circ}=\dfrac{1}{8}$.

【点拨】解给角求值问题的常用方法

(1)直接正用、逆用二倍角公式，结合诱导公式和同角三角函数的基本关系对已知式子进行转化，一般可以化为特殊角.

(2)若形式为几个非特殊角的三角函数式相乘，则一般逆用二倍角的正弦公式.在求解过程中，需利用互余关系配凑出应用二倍角公式的条件，使得问题出现可以连用二倍角的正弦公式的形式.

【变式训练3】下列各式中，值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的是 (B)

A. $2\sin15^\circ\cos15^\circ$　　B. $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$

C. $2\sin^2 15^\circ$　　D. $\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$

【解析】$2\sin15^\circ\cos15^\circ=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$；

$\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

$2\sin^2 15^\circ=1-\cos30^\circ=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

$\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ=1$，故选B.

【变式训练4】已知$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

【解析】∵$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2}$，∴$\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$.

∵$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)>0$，∴$\frac{3\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$.

∴$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

∴$\cos2\alpha=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$，

$\sin2\alpha=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=1-2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$=1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.

∴$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{24}{25}-\frac{7}{25}\right)=-\frac{31\sqrt{2}}{50}$.

3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

【例3】将函数$y=\sin x$的图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再把各点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，所得图象的函数解析式是 (C)

A. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)$　　B. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$

C. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10}\right)$　　D. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{20}\right)$

【解析】将$y=\sin x$的图象向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度得到$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)$的图象，再将图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍得到$y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10}\right)$的图象.

【点拨】先平移后伸缩和先伸缩后平移中，平移的量是不同的，在应用中一定要区分清楚，以免混乱而导致错误.弄清平移对象是减少错误的好方法.

【变式训练5】要得到函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，只要将函数$y=\sin2x$的图象 (C)

A. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度　B. 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

C. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度　D. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

【解析】因为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$，

所以将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，

就可得到函数 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

【变式训练 6】函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+1(A>0,\omega>0)$ 的最大值为 3，其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2$，求 α 的值.

【解析】(1)∵函数 $f(x)$ 的最大值为 3，

∴$A+1=3$，即 $A=2$.

∵函数图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

∴最小正周期 $T=\pi$，∴$\omega=2$，

∴函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

(2)由 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+1=2$，

得 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

∵$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，∴$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，

∴$\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，∴$\alpha=\frac{\pi}{3}$.

模拟演练

1.(2020·湖南)函数 $f(x)=2\sin x\cos x$ 的最小正周期是　(B)

A. $\frac{\pi}{2}$　B. π　C. 2π　D. 4π

2. $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$ 的值为　(A)

A. $-\frac{1}{2}$　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.(2021·湖南)已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin 2\alpha=$　(C)

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. 1

4.(2022·湖南)将函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍，横坐标不变，得到的图象对应的解析式为　(D)

A. $y=\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$　B. $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $y=\frac{1}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$　D. $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

5. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值是　(D)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6. 已知 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$　(D)

A. $\frac{7}{24}$　B. $-\frac{7}{24}$

C. $\frac{24}{7}$　D. $-\frac{27}{7}$

7. 函数 $y=2\cos^2 x+1(x\in\mathbf{R})$ 的最小正周期为　(B)

A. $\frac{\pi}{2}$　B. π　C. 2π　D. 4π

8.(2022·湖南)函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的最大值是　(C)

A. 1　B. $\sqrt{3}$

C. 2　D. $\sqrt{3}+1$

【解析】∵$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，

∴$f(x)\in[-2,2]$，

∴$f(x)_{\max}=2$.

9. 计算：$\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ=$ $\underline{\frac{1}{16}}$.

【解析】原式 $=\sin 6^\circ\cos 48^\circ\cos 24^\circ\cos 12^\circ$

$=\sin 6^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ$

$=\frac{16\cos 6^\circ\sin 6^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ}{16\cos 6^\circ}$

$=\frac{\sin 96^\circ}{16\cos 6^\circ}$

$=\frac{\cos 6^\circ}{16\cos 6^\circ}$

$=\frac{1}{16}$.

10.(2016·湖南)已知函数 $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值；

(2)求 $f(x)$的最小值,并写出 $f(x)$取最小值时自变量 x 的集合.

【解析】$f(x)=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$.

(1)$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\sin\frac{\pi}{2}=2$.

(2)当 $\sin 2x=-1$ 时,$f(x)$的最小值为 0,

此时 $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,即 $x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$取最小值时 x 的集合为$\left\{x\mid x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

11. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x\ (\omega>0)$的最小正周期为 π.

(1)求 ω 的值;

(2)求 $f(x)$的单调递增区间;

(3)若 $f\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{3}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$,求 $\sin 2\alpha$ 的值.

【解析】(1)由题可知 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x=\sin 2\omega x(\omega>0)$,而 $f(x)$的最小正周期为 π,则最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,解得 $\omega=1$.

(2)$\because f(x)=\sin 2x$,由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

解得$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore f(x)=\sin 2x$ 的递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)$\because f(x)=\sin 2x$,

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\alpha$,

又 $f\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{3}$,$\therefore\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$,

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$\therefore 0<2\alpha<\pi$,则 $\sin 2\alpha>0$,

$\therefore\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

必修 第二册

第六章 平面向量及其应用

第1课时 平面向量的概念与运算

考试指导

1. 了解向量、向量的模、零向量、单位向量等概念，会用适当的符号表示向量.

2. 了解共线向量与相等向量的概念，能判断两个向量是否共线或相等，能运用两个向量共线的条件解决有关问题.

3. 理解向量的加法、减法和数乘运算，能描述两个向量的和、差及数乘向量的几何意义.

4. 理解向量的数量积的物理背景及其含义，了解两个向量数量积的几何意义，会根据定义计算两个向量的数量积.

考点梳理

1. 向量的有关概念

向量	既有__大小__又有__方向__的量
零向量	长度为0的向量，记作$\mathbf{0}$
单位向量	长度等于__1__个单位长度的向量
平行向量（共线向量）	方向__相同或相反__的非零向量. 向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$平行，记作__$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$__. 规定：零向量与任意向量__平行__
相等向量	长度__相等__且方向__相同__的向量. 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相等，记作__$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$__
相反向量	与向量$\boldsymbol{a}$长度__相等__，方向__相反__的向量

2. 向量的加法

(1)三角形法则

已知非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫做$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，如图1所示.

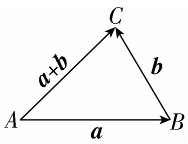


图1

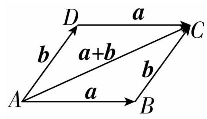


图2

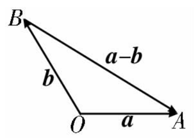
(2)平行四边形法则

已知两个不共线向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以$AB$，$AD$为邻边作▱$ABCD$，则对角线上的向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图2所示.

3. 向量的减法

(1)定义：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，即减去一个向量相当于加上这个向量的__相反向量__.

(2)作法：在平面内任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图所示.



4. 向量的数乘运算

实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积是一个__向量__，这种运算叫做向量的__数乘__，记作__$\lambda\boldsymbol{a}$__，其长度与方向规定如下：

(1)$|\lambda\boldsymbol{a}|=$__$|\lambda||\boldsymbol{a}|$__.

(2)当 $\underline{\quad\lambda>0\quad}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\underline{\quad\lambda<0\quad}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

特别地，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

5. 共线向量定理

向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是：存在唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

6. 向量的数量积

(1)已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

规定：零向量与任一向量的数量积为 $\underline{\quad 0\quad}$.

注意：数量积的运算结果是实数，线性运算的结果是向量.

(2)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，它们的夹角是 θ，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，则

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

②$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\underline{\quad 0\quad}$.

③当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\underline{\quad|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\quad}$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\underline{\quad-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\quad}$. 特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

④$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

典例剖析

1. 向量的概念

【例 1】给出下列命题：

①若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$；

②若单位向量的起点相同，则终点相同；

③起点不同，但方向相同且模相等的几个向量是相等向量；

④向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则 A,B,C,D 四点必在同一直线上.

其中正确命题的序号是 $\underline{\quad ③\quad}$.

【解析】①错误. 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则①不成立；

②错误. 起点相同的单位向量，终点未必相同；

③正确. 对于一个向量只要不改变其大小和方向，是可以任意移动的；

④错误. 共线向量即平行向量，只要求方向相同或相反即可，并不要求两个向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 必须在同一直线上.

【点拨】理解零向量和单位向量应注意的问题

(1)零向量的方向是任意的，所有的零向量都相等；

(2)单位向量不一定相等，不要忽略其方向.

【变式训练 1】有下列物理量：①质量；②温度；③角度；④弹力；⑤风速. 其中可以看成向量的有 (B)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

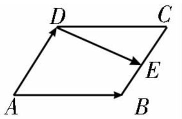
【变式训练 2】若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，则下列关系式正确的是 (A)

A. $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$　　B. $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$

2. 向量的加、减、数乘运算

【例 2】如图，在▱$ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{DE}=$ (D)



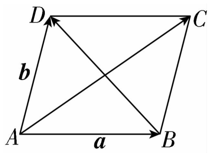
A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

【解析】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

【点拨】灵活运用三角形法则处理问题，有时还要用到平行向量的性质、闭合向量为零向量等结论.

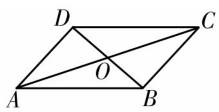
【变式训练 3】如图所示，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{BD}$ 分别是 (B)



A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　　D. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

【变式训练 4】如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$，则 $\lambda=\underline{\quad 2\quad}$.



【解析】由向量加法的平行四边形法则知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

又∵O 是 AC 的中点，∴$AC=2AO$，

∴$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$，∴$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$，∴$\lambda=2$.

3. 平面向量的数量积

【例 3】已知$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$，当(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；(3)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$时，分别求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

【解析】(1)当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=4\times5=20$；

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=4\times5\times(-1)=-20$.

(2)当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\theta=90°$，∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 30°=4\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

【点拨】求平面向量数量积的步骤

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，$\theta\in[0°,180°]$；

(2)分别求$|\boldsymbol{a}|$和$|\boldsymbol{b}|$；

(3)求数量积，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，要特别注意书写时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间用实心圆点“·”连接，而不能用“×”连接，也不能省去.

【变式训练 5】已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为 （ C ）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

【变式训练 6】已知$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影是$\frac{2}{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__2__.

模拟演练

1. 下列说法正确的是 （ C ）

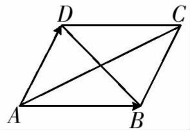
A. 若两个向量相等，则它们的起点和终点分别重合

B. 零向量没有方向

C. 共线向量又叫平行向量

D. 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

2. (2018·湖南)如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$ （ A ）



A. $\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{BD}$　　D. $\overrightarrow{DB}$

3. $\overrightarrow{AC}$ 可以写成：①$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$；②$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OC}$；③$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$；④$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$. 其中正确的是 （ D ）

A. ①②　　B. ②③

C. ③④　　D. ①④

4. (2022·湖南)已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=$ （ C ）

A. $(-2,1)$　　B. $(2,-1)$

C. $(-2,-1)$　　D. $(1,2)$

5. 若 $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{e}$，则 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=$ （ C ）

A. $5\boldsymbol{e}$　　B. $-5\boldsymbol{e}$

C. $23\boldsymbol{e}$　　D. $-23\boldsymbol{e}$

6. 在△ABC 中，M 是 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=$ （ C ）

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$　　B. $\overrightarrow{AM}$

C. $2\overrightarrow{AM}$　　D. $\overrightarrow{MA}$

7. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，夹角为 $60°$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ （ A ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1　　D. $-\frac{1}{2}$

8. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=$__$\overrightarrow{CD}$__.

9. 已知在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$ 的模等于__$2\sqrt{13}$__.

【解析】$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{13}$.

10. 已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，欲使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线，试确定 k 的值.

【解析】∵$k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线，

∴存在实数 λ，使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$，

则 $(k-\lambda)\boldsymbol{e}_1=(\lambda k-1)\boldsymbol{e}_2$，

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，只能有$\begin{cases}k-\lambda=0,\\ \lambda k-1=0,\end{cases}$

∴$k=\pm1$.

第2课时　平面向量基本定理及坐标表示

考试指导

1. 理解平面向量基本定理，能在一些简单图形中选择适当的基底表示某一个向量.

2. 了解平面向量的正交分解及坐标表示，会在给定的直角坐标系中，求一个向量的坐标.

3. 掌握平面向量的加、减及数乘的坐标运算，了解用坐标表示平面向量共线的条件.

4. 理解平面向量共线的坐标表示，能利用平面向量共线的结论判断两个向量是否共线或解决一些简单问题.

5. 掌握平面向量数量积的坐标表达式及其运算，能运用数量积表示两个向量的夹角，能用坐标表示一个向量的模，并能根据坐标判断两个平面向量的垂直关系.

考点梳理

1. 平面向量基本定理

条件	$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个__不共线向量__
结论	对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使__$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$__
基底	$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$叫做表示这一平面内所有向量的一个基底

2. 平面向量的正交分解及坐标表示

(1)正交分解：把一个向量分解为两个互相垂直的向量.

(2)坐标表示：在直角坐标平面中，$\overrightarrow{OA}$ 是以原点 O 为起点的向量. 设 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，则 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标(x,y)就是终点 A 的坐标，终点 A 的坐标(x,y)也就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标.

3. 平面向量加、减、数乘运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，

(1)加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$；

(2)减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$；

(3)数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$.

4. 平面向量共线的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是__$x_1y_2-x_2y_1=0$__.

5. 平面向量数量积的坐标表示、模及夹角

(1)平面内两个向量数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__$x_1x_2+y_1y_2$__.

(2)平面内两点间的距离公式

①设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$；

②如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的起点和终点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，那么 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(3)向量垂直的判定

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(4)两个向量夹角的余弦$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

典例剖析

1. 平面向量基本定理

【例1】设 O 是平行四边形 $ABCD$ 两条对角线的交点，给出下列向量组：①$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$；②$\overrightarrow{DA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$；③$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{DC}$；④$\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OB}$. 其中可作为这个平行四边形所在平面的一组基底的是（ B ）

A. ①②　　B. ①③

C. ①④　　D. ③④

【解析】①$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线；②$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{DA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线；③$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 不共线；④$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$，则 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 共线. 由平面向量基底的概念知，只有不共线的两个非零向量才能构成一组基底，故①③满足题意.

【点拨】两个向量是否能构成基底，主要看两个向量是否非零且不共线. 此外，平面内的一个基底一旦确定，那么平面内任意一个向量都可以由这个基底唯一线性表示出来.

【变式训练1】设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，以下各组向量中不能作为基底的是（ B ）

A. $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$　　B. $\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2\}$

C. $\{\boldsymbol{e}_1,5\boldsymbol{e}_2\}$　　D. $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\}$

【变式训练2】在△ABC 中，点 E,F 在边 AB 上，且 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FB}$，则（ C ）

A. $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$　　B. $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$　　D. $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

2. 平面向量加减运算的坐标表示

【例 2】若 $A(3,-6)$，$B(-5,2)$，$C(6,y)$三点共线，则 $y=$ $\underline{\ -9\ }$.

【解析】$\overrightarrow{AB}==(-8,8)$，$\overrightarrow{AC}=(3,y+6)$，

∵A，B，C 三点共线，即 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，

∴$-8(y+6)-8\times3=0$，解得 $y=-9$.

【点拨】向量共线的判定方法

(1)利用向量共线定理，由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$推出 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

(2)利用向量共线的坐标表达式 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 判定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

【变式训练 3】已知向量 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2)$，则 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$　　(D)

A. $(-2,-2)$　　B. $(2,2)$

C. $(1,1)$　　D. $(-1,-1)$

【解析】$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(-2,-2)=(-1,-1)$. 故选 D.

【变式训练 4】已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$. 若 $\boldsymbol{c}/\!/(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\lambda=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$.

【解析】由题可得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$，

∵$\boldsymbol{c}/\!/(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$，

∴$4\lambda-2=0$，即 $\lambda=\frac{1}{2}$.

3. 平面向量数量积的坐标表示

【例 3】已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$. 求：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的值；

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值.

【解析】(1)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=(1,0)-(0,1)=(1,-1)$，

$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=4(1,0)+3(0,1)=(4,3)$，

∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times1+3\times(-1)=1$，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(4+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$.

(2)设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，

得 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times5}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

【点拨】应用向量的夹角公式求夹角时，应先分别求出两个向量的模，再求出它们的数量积，最后代入公式求出夹角的余弦值，进而求出夹角.

【变式训练 5】若向量 $\boldsymbol{a}=(x,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，则 $x=$　　(A)

A. 3　　B. -3

C. $\frac{5}{3}$　　D. $-\frac{5}{3}$

【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-x+6=3$，$x=3$，故选 A.

【变式训练 6】已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\underline{\ 1\ }$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ $\underline{\ 2\sqrt{5}\ }$.

模拟演练

1. (2021 · 湖南)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,m)$. 若 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$，则 $m=$　　(D)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. (2020 · 湖南)已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$. 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x,2)$，则 $x=$　　(B)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. (2019 · 湖南)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　　(C)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. (2017 · 湖南)已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,2)$，$\boldsymbol{c}=(6,3)$. 若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则 $x=$　　(D)

A. -10　　B. 10　　C. -2　　D. 2

5. (2016 · 湖南)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$　　(A)

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,6)$，则$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$　　(D)

A. 3　　B. 6　　C. 10　　D. 5

【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,6)$，所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,4)$，

所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

故选 D.

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $m=$ $\underline{\ -\frac{1}{2}\ }$.

【解析】向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，

所以 $2m=-1$，解得 $m=-\frac{1}{2}$.

8. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ $\underline{\ \sqrt{3}\ }$.

【解析】因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$，

所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

所以 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，

所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{3}$.

9. (2018 · 湖南)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,\cos x)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(1)若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，求 $\tan x$ 的值；

(2)设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2$，求 $f(x)$的值域.

【解析】(1)已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则 $\sin x=\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=1$.

(2)$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+2$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$.

因为 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]$,所以 $f(x)$的值域为$[1,3]$.

10. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

(1)当 m 为何值时,$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 垂直?

(2)当 m 为何值时,$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线?

【解析】(1)令 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$,则$(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=0$,

即 $3m|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2+(5m-9)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

得 $27m-60+3(5m-9)=0$,

解得 $m=\frac{29}{14}$.

故当 $m=\frac{29}{14}$时,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

(2)令 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{d}$,则 $3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\lambda(m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$,

即$(3-\lambda m)\boldsymbol{a}+(5+3\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,

$\because\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,

$\therefore\begin{cases}3-\lambda m=0,\\5+3\lambda=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-\frac{5}{3},\\m=-\frac{9}{5}.\end{cases}$

故当 $m=-\frac{9}{5}$ 时,$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线.

第3课时　平面向量的应用

考试指导

1. 理解平面向量数量积的物理背景及其含义，了解两个向量数量积的几何意义，会根据定义计算两个向量的数量积.

2. 理解正弦定理和余弦定理，能利用正弦定理和余弦定理解三角形. 掌握利用正弦定理和余弦定理解决有关距离、高度、角度等几何量的测量问题.

3. 能应用平面向量解决一些简单的平面几何问题.

4. 能应用平面向量解决一些简单的物理问题.

考点梳理

1. 用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”

(1)建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为__向量问题__；

(2)通过__向量运算__，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等问题；

(3)把运算结果“翻译”成几何关系.

2. 向量在物理中的应用

(1)物理问题中常见的向量有__力、速度、位移等__.

(2)向量的加减法运算体现在一些物理量的合成与分解中.

(3)动量 mv 是向量的__数乘__运算.

(4)功是__力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$__的数量积.

3. 正弦定理和余弦定理

(1)正弦定理

①$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

②应用$\begin{cases}\text{已知两角和任一边求其他边和角；}\\ \text{已知两边及其中一边的对角，求其他边和角.}\end{cases}$

(2)余弦定理

①$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;\\ b^2=\underline{\ a^2+c^2-2ac\cos B\ };\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{cases}$

②应用$\begin{cases}\text{已知三边求三角；}\\ \text{已知两边和它们的夹角，求第三边和其他角.}\end{cases}$

典例剖析

1. 平面向量的应用

【例1】(1)已知平面内四边形 $ABCD$ 和点 O，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$，则四边形 $ABCD$ 为　　(D)

A. 菱形　　B. 梯形

C. 矩形　　D. 平行四边形

(2)已知作用在坐标原点的三个力 $\boldsymbol{F}_1=(3,4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$，则作用在原点的合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$ 的坐标为　　(A)

A. $(8,0)$　　B. $(8,8)$

C. $(-2,0)$　　D. $(-2,8)$

【解析】(1)由条件知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

(2)由题意，作用在坐标原点的三个力 $\boldsymbol{F}_1=(3,4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$，

则 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(3+2+3,4-5+1)=(8,0)$，即 $\boldsymbol{F}$ 的坐标为 $(8,0)$. 故选 A.

【点拨】用向量法解决平面几何和物理问题的两种方法

(1)几何法：选取适当的基底(基底中的向量尽量已知)，将题中涉及的向量用基底表示，利用向量的运算法则、运算律或性质计算.

(2)坐标法：建立平面直角坐标系，实现向量的坐标化，将问题中的长度、垂直、平行等问题转化为代数运算.

【变式训练1】若 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内任一点，且满足 $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，则 $\triangle ABC$ 的形状为　　(A)

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

【解析】∵$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，

∴$\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，∴$\overrightarrow{CB}\perp(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

∴$\triangle ABC$ 的中线和底边垂直，∴$\triangle ABC$ 是等腰三角形. 故选 A.

【变式训练 2】已知一个物体在大小为 6 N 的力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生的位移 $\boldsymbol{s}$ 的大小为 100 m，且 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 60°，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=$__300__ J.

【解析】$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=6\times100\times\cos 60°\ \mathrm{J}=300\ \mathrm{J}$.

2. 余弦定理

【例 2】在△ABC 中，已知 $a=2\sqrt{6}$，$b=6+2\sqrt{3}$，$c=4\sqrt{3}$，求角 A，B，C.

【解析】根据余弦定理，可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{(6+2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times(6+2\sqrt{3})\times4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$，

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{(2\sqrt{6})^2+(6+2\sqrt{3})^2-(4\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{6}\times(6+2\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{4}$.

$\therefore B=\pi-A-C=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$，$B=\dfrac{7\pi}{12}$，$C=\dfrac{\pi}{4}$.

【点拨】已知三边求角的基本思路是：利用余弦定理的推论求出相应角的余弦值，值为正，角为锐角；值为零，角为直角；值为负，角为钝角. 其思路清晰，结果唯一.

【变式训练 3】在△ABC 中，已知 $a=9$，$b=2\sqrt{3}$，$C=150°$，则 $c=$ （ D ）

A. $\sqrt{39}$　　B. $8\sqrt{3}$

C. $10\sqrt{2}$　　D. $7\sqrt{3}$

【解析】由余弦定理得

$c=\sqrt{9^2+(2\sqrt{3})^2-2\times9\times2\sqrt{3}\times\cos 150°}=\sqrt{147}=7\sqrt{3}$.

【变式训练 4】在△ABC 中，已知 $a=7$，$b=4\sqrt{3}$，$c=\sqrt{13}$，则△ABC 的最小角为 （ B ）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$

C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{12}$

【解析】由三角形边角关系可知，角 C 为△ABC 的最小角，则 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{7^2+(4\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times7\times4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{6}$，故选 B.

3. 正弦定理

【例 3】在△ABC 中，已知 $a=\sqrt{6}$，$b=2$，$B=45°$，求 C.

【解析】由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得

$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $A\in(0°,180°)$，

$\therefore A=60°$ 或 $120°$.

$\therefore C=75°$ 或 $15°$，即 $C=\dfrac{5\pi}{12}$ 或 $\dfrac{\pi}{12}$.

【点拨】已知两边和其中一边的对角，三角形形状一般不确定，用正弦定理求解时，要根据条件判断这个三角形是否有解，有解时是一解还是两解. 判断的依据是：同一个三角形中，大边(角)对大角(边).

【变式训练 5】在△ABC 中，下列式子与 $\dfrac{\sin A}{a}$ 的值相等的是 （ C ）

A. $\dfrac{b}{c}$　　B. $\dfrac{\sin B}{\sin A}$

C. $\dfrac{\sin C}{c}$　　D. $\dfrac{c}{\sin C}$

【变式训练 6】在△ABC 中，三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，$B=60°$，那么 $A=$ （ C ）

A. 135°　　B. 90°

C. 45°　　D. 30°

【解析】由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得 $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore A=45°$ 或 $135°$.

又 $\because a<b$，$\therefore A<B$，$\therefore A=45°$.

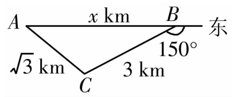
4. 余弦定理、正弦定理的应用

【例 4】某人先向正东方向走了 x km，然后他向右转 150°，向新的方向走了 3 km，结果他离出发点恰好为 $\sqrt{3}$ km，那么 x 的值为 （ C ）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$　　D. 3

【解析】如图，

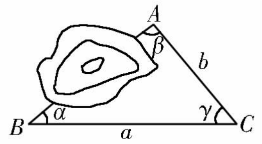


在$\triangle ABC$中由余弦定理得$3=9+x^2-6x\cos 30°$，

即$x^2-3\sqrt{3}x+6=0$，解得$x=2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

【点拨】解决与距离有关的问题的关键是转化为求三角形中的边，分析所解三角形中已知哪些元素，还需要求出哪些元素，灵活运用正弦定理、余弦定理来解决.

【变式训练7】如图，为了测量隧道口AB的长度，给定下列四组数据，测量时应选用的数据为　（ C ）



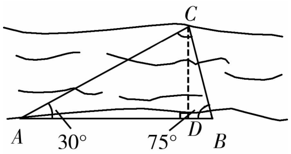
A. α, a, b　　B. α, β, a

C. a, b, γ　　D. α, β, b

【解析】选择a, b, γ可直接利用余弦定理$AB=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$求解.

【变式训练8】为了测量河的宽度，在一岸边选定两点A，B，望对岸标记物C，测得$\angle CAB=30°$，$\angle CBA=75°$，$AB=120$ m，则河的宽度为__60__m.

【解析】由题意知，$\angle ACB=180°-30°-75°=75°$，$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形，$AC=AB=120$ m. 河宽即AB边上的高，过C作$CD\perp AB$于D，$\therefore$河宽$CD=120\sin 30°=60$ m.



模拟演练

1.（2019·湖南）设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a，b，c. 若$a=b=2$，$C=120°$，则$c=$　（ D ）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{3}$

2.（2018·湖南）在$\triangle ABC$中，已知$A=30°$，$B=45°$，$AC=\sqrt{2}$，则$BC=$　（ D ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

3. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 已知$a=\sqrt{5}$，$c=2$，$\cos A=\frac{2}{3}$，则$b=$　（ D ）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

【解析】因为$a=\sqrt{5}$，$c=2$，$\cos A=\frac{2}{3}$，所以由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，整理得$3b^2-8b-3=0$，解得$b=3$或$b=-\frac{1}{3}$（舍去）.

故选D.

4. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 若$a=\sqrt{2}b=2c$，则$\cos A=$　（ B ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{5\sqrt{2}}{8}$　　D. $-\frac{5\sqrt{2}}{8}$

【解析】由余弦定理可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2c^2+c^2-4c^2}{2\times\sqrt{2}c\cdot c}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，故选B.

5.（2022·湖南）在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则$\triangle ABC$是　（ A ）

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等边三角形

【解析】$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，

$\therefore \angle BAC=90°$，$\triangle ABC$为直角三角形.

故选A.

6. 一质点在力$\boldsymbol{F}_1=(-3,5)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-3)$的共同作用下，由点$A(10,-5)$移动到$B(-4,0)$，则$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$的合力$\boldsymbol{F}$对该质点所做的功为　（ A ）

A. 24　　B. -24　　C. 110　　D. -110

【解析】由题意可知，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$的合力$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(-3,5)+(2,-3)=(-1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-4-10,0+5)=(-14,5)$，则由共点力平衡得合力$\boldsymbol{F}$对该质点所做的功为$\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(-1,2)\cdot(-14,5)=24$.

故选A.

7.（2017·湖南）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a，b，c. 已知$a=4$，$b=3$，$\sin C=1$，则$\triangle ABC$的面积为__6__.

8. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$a=2,b=3,\cos C=-\frac{1}{4}$，则$c=$__4__.

9.（2022·湖南）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a=\sqrt{3},b=\sqrt{2},A=60^\circ$，则$B=$__$45^\circ$__.

【解析】$\because a=\sqrt{3},b=\sqrt{2},A=60^\circ$，

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又$a>b$，$\therefore A>B$，$\therefore B=45^\circ$.

10.（2021·湖南）$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知$A=60^\circ,B=45^\circ,a=2\sqrt{6}$.

（1）求b；

（2）求$\triangle ABC$的面积.

【解析】（1）在$\triangle ABC$中，由正弦定理得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}\times\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4.$$

（2）$\because A=60^\circ,B=45^\circ$，$\therefore C=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$，

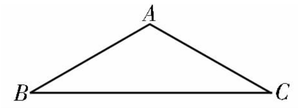
$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 4\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=6+2\sqrt{3}$.

11.（2020·湖南）如图所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=2,BC=2\sqrt{3}$.

（1）求内角B的大小；

（2）设函数$f(x)=2\sin(x+B)$，求$f(x)$的最大值，并指出此时x的值.



【解析】（1）在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{2^2+(2\sqrt{3})^2-2^2}{2\times 2\times 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$.

（2）由（1）得$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore f(x)$的最大值为2，此时$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

即$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

第七章 复 数

考试指导

1. 理解复数的概念、表示方法及相关概念. 掌握复数的分类及复数相等的充要条件.

2. 理解用复平面内的点以及以原点为起点的向量来表示复数. 它们之间是一一对应的关系,掌握实轴、虚轴、共轭复数等概念,掌握用向量的模来表示复数的模的方法.

3. 掌握复数代数形式的加减乘除运算法则,了解复数代数形式加减运算的几何意义.

考点梳理

1. 复数的概念

形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数叫做复数,其中 i 叫做虚数单位, a 叫做复数的实部, b 叫做复数的虚部.

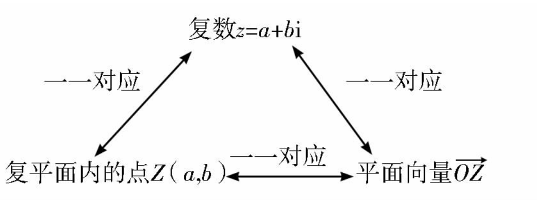
2. 复数相等的充要条件

设 a,b,c,d 都是实数,则 $a+bi=c+di\Leftrightarrow$ $a=c$ 且 $b=d$.

3. 复数的分类

$$复数(z=a+bi,a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}实数(b=0),\\ 虚数(b\neq0)\begin{cases}纯虚数(a=0),\\ 非纯虚数(a\neq0).\end{cases}\end{cases}$$

4. 复数的几何意义



5. 复数的模

复数 $z=a+bi$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫做复数 $z=a+bi$ 的模或绝对值,记作 $|z|$ 或 $|a+bi|$,即 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. 如果 $b=0$,那么 $z=a+bi$ 是一个实数 a,它的模等于 $|a|$(a 的绝对值).

6. 共轭复数

当两个复数的实部 相等 ,虚部 互为相反数 时,这两个复数叫做互为共轭复数. 虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做共轭虚数. 复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示,即如果 $z=a+bi$,那么 $\bar{z}=$ $a-bi$.

7. 复数的四则运算

若两个复数 $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i(a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbf{R})$,则

(1)加法: $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$;

(2)减法: $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$;

(3)乘法: $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$;

(4)除法: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i(z_2\neq0)$.

典例剖析

1. 复数的基本概念

【例 1】给出下列说法:①复数 $2+3i$ 的虚部是 $3i$;②形如 $a+bi(b\in\mathbf{R})$ 的数一定是虚数;③若 $a\in\mathbf{R}$, $a\neq0$,则 $(a+3)i$ 是纯虚数;④若两个复数能够比较大小,则它们都是实数. 其中说法错误的个数是 (C)

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解析】复数 $2+3i$ 的虚部是 3,①错;形如 $a+bi(b\in\mathbf{R})$ 的数不一定是虚数,②错;只有当 $a\in\mathbf{R}$, $a+3\neq0$ 时,$(a+3)i$ 是纯虚数,③错;若两个复数能够比较大小,则它们都是实数,故④正确,所以有 3 个错误.

【点拨】判断有关复数概念的命题真假的注意点

(1)正确理解复数、虚数、纯虚数、实部、虚部、复数相等的概念,注意它们之间的区别与联系;

(2)注意复数集与实数集中有关概念与性质的不同;

(3)注意通过列举反例来说明一些命题的真假.

【变式训练 1】复数 $i-2$ 的虚部是 (C)

A. i B. -2 C. 1 D. 2

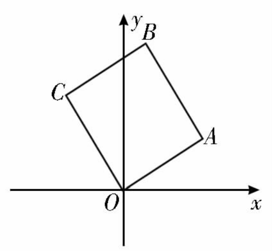
【变式训练 2】若 $(x+y)i=x-1$,则实数 x,y 的值分别为 (A)

A. $1,-1$ B. $0,-1$

C. $1,0$ D. $0,0$

2. 复数的几何意义

【例 2】如图所示，平行四边形 $OABC$ 的顶点 O,A,C 对应的复数分别为 $0,3+2i,-2+4i$，试求：



(1)$\overrightarrow{AO}$ 所表示的复数，$\overrightarrow{BC}$ 所表示的复数；

(2)对角线 $\overrightarrow{CA}$ 所表示的复数；

(3)对角线 $\overrightarrow{OB}$ 所表示的复数及 $\overrightarrow{OB}$ 的长度.

【解析】(1)$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$，∴$\overrightarrow{AO}$ 所表示的复数为 $-3-2i$.

∵$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$，∴$\overrightarrow{BC}$ 所表示的复数为 $-3-2i$.

(2)∵$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，

∴$\overrightarrow{CA}$ 所表示的复数为 $(3+2i)-(-2+4i)=5-2i$.

(3)对角线 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，∴$\overrightarrow{OB}$ 所表示的复数为 $(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

【点拨】利用复数的几何意义解题的技巧

(1)形转化为数：利用几何意义可以把几何图形的变换转化成复数运算去处理.

(2)数转化为形：对于一些复数运算也可以给予几何解释，使复数作为工具运用于几何之中.

【变式训练 3】已知复数 $z=-i$，复平面内对应点 Z 的坐标为 (A)

A. $(0,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,0)$　　D. $(-1,-1)$

【变式训练 4】复数 $z=-2+3i$ 的共轭复数对应的点在复平面内位于 (C)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 复数的四则运算

【例 3】计算：(1)$(1+i)(1-i)-(1-i)$；

(2)$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

【解析】(1)$(1+i)(1-i)-(1-i)=1+1-1+i=1+i$.

(2)$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i+\frac{3}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

【点拨】复数的运算包括加、减、乘、除，复数的四则运算一般用代数形式，加、减、乘运算按多项式运算法则计算，除法运算需把分母实数化.复数的代数运算与实数有密切联系，但又有区别，在运算中要特别注意实数范围内的运算法则在复数范围内是否适用.

【变式训练 5】复数 $(1-i)-(2+i)+3i=$ (A)

A. $-1+i$　　B. $1-i$

C. i　　D. $-i$

【变式训练 6】设复数 z 满足 $(1+i)\cdot z=4i$，则 $z=$ (C)

A. $1+i$　　B. $2+i$

C. $2+2i$　　D. $4i$

模拟演练

1. (2022·湖南)若 $m\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，复数 $z=m+2+(m-1)i$ 是实数，则 $m=$ (B)

A. -1　　B. 1

C. -2　　D. 2

2. 在复平面内，复数 $i(2+i)$ 对应的点的坐标为 (C)

A. $(1,2)$　　B. $(2,1)$

C. $(-1,2)$　　D. $(2,-1)$

3. 已知复数 $z=-3+4i$，则复数 z 在复平面内对应的点在 (B)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 复数 $z=-3+4i$ 的模是 (C)

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 25

5. 已知 $|a-i|=\sqrt{5}$，$a\in\mathbf{R}$，则 $a=$ (C)

A. 1　　B. -2

C. ±2　　D. ±1

6. 已知复数 $a^2-1+(a-1)i$ 是纯虚数，则 $a=$ (C)

A. ±1　　B. 1

C. -1　　D. 0

7. 已知复数 $z=\frac{1-i}{i}$，则复数 z 的虚部是 (B)

A. 1　　B. -1

C. i　　D. $-i$

8. 已知向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数是 $5-4i$，向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 $-5+4i$，则 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 (C)

A. $-10+8i$　　B. $10-8i$

C. 0　　D. $10+8i$

9. 已知复数 $z=1+i$，则其共轭复数 $\bar{z}$ 对应的点的坐标为 $\underline{\quad(1,-1)\quad}$.

10. 已知复数 $z_1=a+i$，$z_2=2-i$，且 $|z_1|=|z_2|$，则实数 $a=\underline{\quad\pm2\quad}$.

第八章 立体几何初步

第1课时 立体图形的直观图、表面积与体积

考试指导

1. 识记柱、锥、台、球的结构特征.

2. 识记简单组合体的结构特征,能识别一个几何体是由哪些简单几何体组合而成的.

3. 了解斜二测画法,会用斜二测画法画空间几何体的直观图.

4. 识记柱体、锥体、台体和球的表面积和体积公式,并能运用公式求简单几何体的表面积和体积.

考点梳理

1. 柱、锥、台、球的结构特征、表面积和体积

(1)棱柱

概念:有两个平面互相平行,其余各面都是__四边形__,并且相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面围成的多面体叫做棱柱.

结构特征:底面、侧面、侧棱、顶点.

表面积:S=各面多边形面积之和$=S_{侧}+2S_{底}$.

体积:$V=S_{底}h$.

(2)圆柱

概念:以矩形的一边所在的直线为__旋转轴__,其余三边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆柱.

结构特征:轴、底面、侧面、母线.

侧面积:$S=$__$2\pi rl$__.

表面积:$S=2\pi r(r+l)$.

体积:$V=S_{底}h=$__πr^2h__.

(3)棱锥

概念:有一个面为多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,由这些面围成的多面体叫做棱锥.

结构特征:底面、侧面、侧棱、顶点.

表面积:S=各面多边形面积之和$=S_{侧}+S_{底}$.

体积:$V=$__$\frac{1}{3}S_{底}h$__.

(4)圆锥

概念:以直角三角形的一条直角边所在的直线为旋转轴,其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆锥.

结构特征:轴、底面、侧面、母线.

侧面积:$S=\pi rl$.

表面积:$S=\pi r(r+l)$.

体积:$V=\frac{1}{3}S_{底}h=$__$\frac{1}{3}\pi r^2h$__.

(5)棱台

概念:用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面与截面之间的部分叫做棱台.

结构特征:上底面、下底面、侧面、侧棱、顶点.

表面积:S=各面多边形面积之和$=S_{侧}+S_{上底}+S_{下底}$.

体积:$V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$.

(6)圆台

概念:用平行于圆锥底面的平面去截圆锥,底面与截面之间的部分叫做圆台.

结构特征:轴、底面、侧面、母线.

体积:$V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h=\frac{1}{3}\pi(r^2+rR+R^2)h$.

(7)球体

概念:以半圆的直径所在的直线为旋转轴,半圆面旋转一周所形成的旋转体叫做球体.

结构特征:球心、半径、直径.

表面积:$S=$__$4\pi R^2$__.

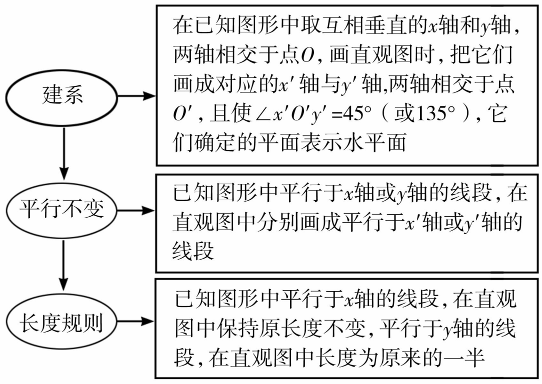
体积:$V=$__$\frac{4}{3}\pi R^3$__.

2. 立体图形的直观图

(1)斜二测画法

我们常用斜二测画法画立体图形及水平放置的平面图形的直观图.

(2)平面图形直观图的画法及要求



典例剖析

1. 棱柱、棱锥、棱台的结构特征

【例 1】下列命题中正确的是　　（ D ）

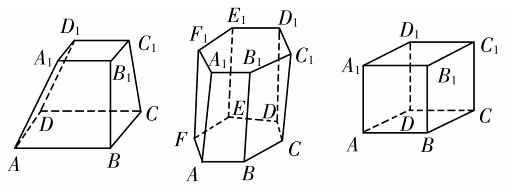
A. 有两个面互相平行，其余各面都是四边形的几何体叫做棱柱

B. 棱柱中互相平行的两个面叫做棱柱的底面

C. 棱柱的侧面是平行四边形，但底面不是平行四边形

D. 棱柱的侧棱都相等，侧面是平行四边形

【解析】由棱柱的定义可知，只有 D 正确，分别构造图形如下：



①　　　　②　　　　③

图①中平面 $ABCD$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 平行，但四边形 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 不全等，故 A 错；图②中正六棱柱的相对侧面 ABB_1A_1 与 EDD_1E_1 平行，但它们不是底面，B 错；图③中直四棱柱底面 $ABCD$ 是平行四边形，C 错，故选 D.

【点拨】本题考查棱柱的结构特征，能够理解柱、锥、台、球的结构特征是解决此类题的基础.

【变式训练 1】下列关于棱锥、棱台的说法：

①棱台的侧面一定不会是平行四边形；

②棱锥的侧面只能是三角形；

③由四个面围成的封闭图形只能是三棱锥；

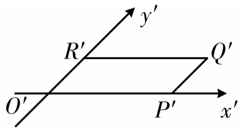
④棱锥被平面截成的两部分不可能都是棱锥.

其中正确说法的序号是__①②③__.

【变式训练 2】一个棱柱至少有__5__个面，顶点最少的一个棱台有__3__条侧棱.

2. 立体图形的直观图

【例 2】如图，平行四边形 $O'P'Q'R'$ 是四边形 $OPQR$ 的直观图. 若 $O'P'=3$，$O'R'=1$，则原四边形 $OPQR$ 的周长为__10__.



【解析】由直观图可知，原图形是矩形 $OPQR$，且 $OP=3$，$OR=2$. 所以 $OPQR$ 的周长为 10.

【点拨】本题考查斜二测画法，要求掌握平面图形和直观图之间转化时边、角关系的变化.

【变式训练 3】梯形的直观图是　　（ A ）

A. 梯形　　B. 矩形

C. 三角形　　D. 任意四边形

【变式训练 4】在用斜二测画法画水平放置的△ABC 时，若∠A 的两边分别平行于 x 轴、y 轴，则在直观图中，∠A'=__45°或 135°__.

3. 棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

【例 3】长方体同一顶点上的三条棱长分别为 1，2，3，则长方体的体积与表面积分别为　　（ A ）

A. 6，22　　B. 3，22　　C. 6，11　　D. 3，11

【解析】长方体的体积 $V=1\times2\times3=6$，

表面积 $S=2\times(1\times2+2\times3+1\times3)=22$.

【点拨】求几何体的表面积问题，通常将所给几何体分成基本几何体，再通过这些基本几何体的表面积进行求和或作差，从而获得几何体的表面积. 另外有时也会用到将几何体展开求其展开图的面积进而得到表面积.

【变式训练 5】棱长为 3 的正方体的表面积为　　（ C ）

A. 27　　B. 64　　C. 54　　D. 36

【变式训练 6】侧面都是等腰直角三角形的正三棱锥，底面边长为 a 时，该三棱锥的表面积是　　（ A ）

A. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$　　B. $\dfrac{3}{4}a^2$

C. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$　　D. $\dfrac{6+\sqrt{3}}{4}a^2$

【解析】∵侧面都是等腰直角三角形，故侧棱长等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$$\therefore S_{表}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2.$$

4. 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

【例 4】圆柱的侧面展开图是长 12 cm，宽 8 cm 的矩形，则这个圆柱的体积为　　（ C ）

A. $\frac{288}{\pi}$ cm^3　　B. $\frac{192}{\pi}$ cm^3

C. $\frac{288}{\pi}$ cm^3 或 $\frac{192}{\pi}$ cm^3　　D. 192π cm^3

【解析】圆柱的高为 8 cm 时，$V=\pi\times\left(\frac{12}{2\pi}\right)^2\times8=\frac{288}{\pi}$ cm^3，当圆柱的高为 12 cm 时，$V=\pi\times\left(\frac{8}{2\pi}\right)^2\times12=\frac{192}{\pi}$ cm^3.

【点拨】本题考查圆柱的体积，把圆柱的侧面展开图还原成圆柱时，要注意底面的不同.

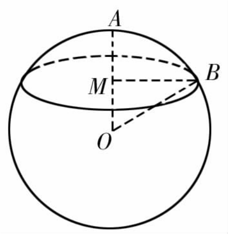
【变式训练 7】一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的表面积与侧面积的比是　（ A ）

A. $\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　B. $\frac{1+4\pi}{4\pi}$

C. $\frac{1+2\pi}{\pi}$　　D. $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

【解析】设圆柱底面半径为 r，则高为 $2\pi r$，表面积：侧面积$=[(2\pi r)^2+2\pi r^2]:(2\pi r)^2=\frac{1+2\pi}{2\pi}$.

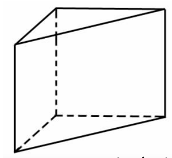
【变式训练 8】已知 OA 为球 O 的半径，过 OA 的中点 M 且垂直于 OA 的平面截球面得到圆 M. 若圆 M 的面积为 3π，则球 O 的表面积为__16π__.



【解析】如图，圆 M 面积为 3π，则圆 M 半径 MB 为$\sqrt{3}$，所以 $OA=2$，则球 O 的表面积等于 $4\pi\times2^2=16\pi$.

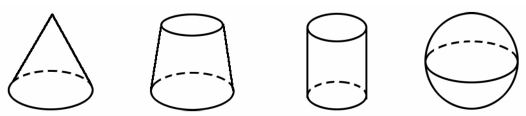
模拟演练

1. (2020·湖南)如图所示的几何体是　（ D ）



A. 圆锥
B. 棱锥
C. 圆台
D. 棱柱

2. (2019·湖南)下列几何体中为圆锥的是　（ A ）



3. 底面半径为 2，高为 4 的圆柱的侧面积为　（ B ）

A. 8π　B. 16π　C. 20π　D. 24π

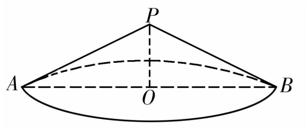
4. 一个正方体的表面积是 96，则该正方体的体积是　（ B ）

A. $48\sqrt{6}$　B. 64　C. 16　D. 96

5. 若圆锥的轴截面是顶角为 120°的等腰三角形，且圆锥的母线长为 2，则该圆锥的侧面积为　（ C ）

A. $\sqrt{3}\pi$　B. 2π　C. $2\sqrt{3}\pi$　D. $4\sqrt{3}\pi$

【解析】如图圆锥的轴截面是顶角为 120°，即$\angle APO=60°$，$AP=2$，$\angle POA=90°$，



所以 $AO=\sqrt{3}$，所以圆锥的侧面积为 $\pi\times AO\times PA=2\sqrt{3}\pi$.
故选 C.

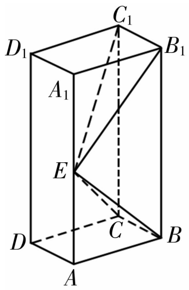
6. (2022·湖南)已知球的半径为$\sqrt{2}$，则该球的表面积为__8π__.

7. (2021·湖南)底面半径为 1，高为 3 的圆柱的体积等于__3π__.

8. 若圆锥的侧面展开图是一个半径为 6，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形，则此圆锥的高为__$4\sqrt{2}$__.

【解析】设圆锥底面半径为 r，则 $2\pi r=\frac{2\pi}{3}\times6$，$r=2$，又圆锥母线长为 $l=6$，∴高为 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

9. 如图，长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE\perp EB_1$. 若 $AE=A_1E$，$AB=3$，求四棱锥 E-BB_1C_1C 的体积.



【解析】∵$BE\perp EB_1$，∴$\angle BEB_1=90°$.
又∵$AE=A_1E$，$EB_1=EB$，
∴$\triangle BEB_1$ 是等腰直角三角形.
设 $AE=A_1E=x$，则 $EB^2=EB_1^2=x^2+9$，
∴$BB_1^2=4x^2=2x^2+18$，
∴$x=3$，即 $BB_1=6$.
∵在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，
AA_1//平面 BB_1C_1C，$E\in AA_1$，$AB\perp$平面 BB_1C_1C，
∴点 E 到平面 BB_1C_1C 的距离即点 A 到平面 BB_1C_1C 的距离，且 $AB=BC=3$，
∴四棱锥 E-BB_1C_1C 的体积 $V=\frac{1}{3}\times3\times6\times3=18$.

第 2 课时 空间点、直线、平面之间的位置关系

考试指导

1. 了解平面的概念和特性,能直接运用三个基本事实解决一些简单的空间点、直线、平面之间位置关系的问题.

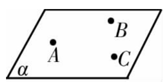
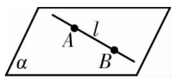
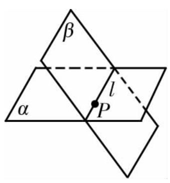
2. 理解空间中直线与直线之间的三种位置关系,会判定两条直线平行、垂直和异面,会求简单空间图形中两条异面直线所成的角.

3. 理解空间中直线与平面之间的三种位置关系.

4. 理解平面与平面之间的两种位置关系.

考点梳理

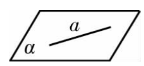
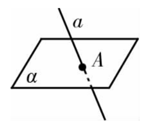
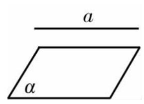
1. 平面的基本性质

基本事实	文字语言	图形语言	符号语言
基本事实 1	过不在一条直线上的三个点,有且只有一个平面		A,B,C 三点不共线⇒存在唯一的平面 α,使 $A,B,C\in\alpha$
基本事实 2	如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线在这个平面内		$A\in l,B\in l$,且 $A\in\alpha$,$B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$
基本事实 3	如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条过该点的公共直线		$P\in\alpha$,且 $P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$,且 $P\in l$

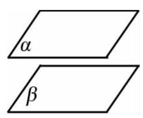
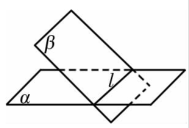
2. 空间两条直线的位置关系

位置关系	共面情况	有无公共点
相交	在同一平面内	有且只有一个 公共点
平行	在同一平面内	没有 公共点
异面	不同在任何一个平面内	没有 公共点

3. 直线与平面的位置关系

位置关系	图形表示	符号表示	公共点
直线在平面内		$a\subset\alpha$	有 无数 个公共点
直线与平面相交		$a\cap\alpha=A$	有且只有 一个 公共点
直线与平面平行		$a//\alpha$	没有 公共点

4. 平面与平面的位置关系

位置关系	图形表示	符号表示	公共点
两平面平行		$\alpha//\beta$	没有 公共点
两平面相交		$\alpha\cap\beta=l$	有无数个公共点,这些点 在一条公共直线上

典例剖析

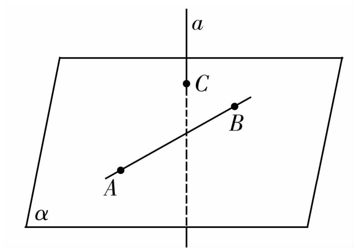
1. 平面

【例 1】用符号表示"点 A,B 在平面 α 内,直线 a 与平面 α

交于点C,点C不在直线AB上",并画出图形.

【解析】用符号表示为$A\in\alpha,B\in\alpha,a\cap\alpha=C,C\notin AB$.

图形如图所示.



【点拨】根据符号语言或文字语言画相应的图形时,要注意实线和虚线的区别.

【变式训练1】如果$a\subset\alpha,b\subset\alpha,l\cap a=A,l\cap b=B$,那么下列关系成立的是 (A)

A. $l\subset\alpha$　　B. $l/\!/\alpha$

C. $l\cap\alpha=A$　　D. $l\cap\alpha=B$

【变式训练2】点A在直线a上,直线a在平面α内,点B在平面α内,可以表示为 (B)

A. $A\subset a,a\subset\alpha,B\in\alpha$　　B. $A\in a,a\subset\alpha,B\in\alpha$

C. $A\subset a,a\in\alpha,B\subset\alpha$　　D. $A\in a,a\in\alpha,B\in\alpha$

2. 空间点、直线、平面之间的位置关系

【例2】在空间四边形$ABCD$中,E,F分别为对角线AC,BD的中点,则BE与CF (B)

A. 平行　　B. 异面

C. 相交　　D. 以上均有可能

【解析】假设BE与CF是共面直线,设此平面为α,则E,$F,B,C\in\alpha$,所以$BF,CE\subset\alpha$,而$A\in CE,D\in BF$,所以$A,D\in\alpha$,即有$A,B,C,D\in\alpha$,与$ABCD$为空间四边形矛盾,所以BE与CF是异面直线.

【点拨】判定两条直线异面的常用方法

(1)定义法:由定义判断两条直线不可能在同一平面内.

(2)排除法(反证法):排除两条直线共面(平行或相交)的情况.

【变式训练3】(2022·湖南)设a,b是空间中两条不同的直线,则"a,b是异面直线"是"a与b没有公共点"的 (A)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【变式训练4】直线a在平面γ外,则下列说法正确的是 (D)

A. $a/\!/\gamma$　　B. a与γ至少有一个公共点

C. $a\cap\gamma=A$　　D. a与γ至多有一个公共点

模拟演练

1. 已知两条相交直线$a,b,a/\!/$平面α,则b与α的位置关系是 (D)

A. $b\subset\alpha$　　B. $b\perp\alpha$

C. $b/\!/\alpha$　　D. b与α相交或$b/\!/\alpha$

2. 下面四个说法中,正确的个数为 (A)

①如果两个平面有三个公共点,那么这两个平面重合;

②两条直线可以确定一个平面;

③若$M\in\alpha,M\in\beta,\alpha\cap\beta=l$,则$M\in l$;

④空间中,相交于同一点的三条直线在同一平面内.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 若直线l不平行于平面α,且$l\not\subset\alpha$,则下列结论成立的是 (B)

A. α内的所有直线与l异面

B. α内不存在与l平行的直线

C. α内存在唯一的直线与l平行

D. α内的直线与l都相交

第 3 课时　空间直线、平面的平行

考试指导

1. 能根据基本事实 4 判定两条直线平行.

2. 能运用直线与平面平行的判定定理与性质定理，证明一些简单空间图形中的线面平行问题.

3. 能运用平面与平面平行的判定定理与性质定理，证明一些简单空间图形中的面面平行问题.

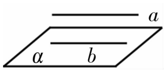
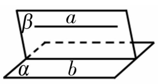
考点梳理

1. 直线与直线平行

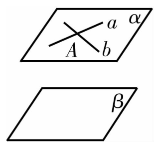
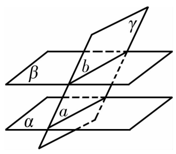
基本事实 4：平行于同一条直线的两条直线　平行　.

定理：如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角　相等或互补　.

2. 直线与平面平行的判定及性质

定理	文字语言	图形语言	符号语言
直线与平面平行的判定定理	如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行		$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $a\parallel b\Rightarrow a\parallel\alpha$
直线与平面平行的性质定理	一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线平行		$a\parallel\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a\parallel b$

3. 平面与平面平行的判定及性质

定理	文字语言	图形语言	符号语言
平面与平面平行的判定定理	如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，那么这两个平面平行		$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\ a\cap b=A\\ a\parallel\beta\\ b\parallel\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$
平面与平面平行的性质定理	两个平面平行，如果另一个平面与这两个平面相交，那么两条交线平行		$\alpha\parallel\beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a\parallel b$

注意：三种语言的转换方法：

(1)用文字语言、符号语言表示一个图形时，首先仔细观察图形有几个平面、几条直线且相互之间的位置关系如何，试着用文字语言表示，再用符号语言表示.

(2)要注意符号语言的意义，如：点与直线的位置关系只能用“$\in$”或“$\notin$”，直线与平面的位置关系只能用“$\subset$”或“$\not\subset$”.

(3)由符号语言或文字语言画相应的图形时，要注意实线和虚线的区别.

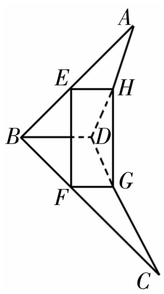
典例剖析

1. 直线与直线平行、直线与平面平行

【例 1】如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点. 求证：

(1)$EH\parallel$平面 BCD；

(2)$BD\parallel$平面 $EFGH$.



【证明】(1)∵空间四边形 $ABCD$ 中，E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点，

∴$EH/\!/BD$，$FG/\!/BD$，∴$EH/\!/FG$，

又∵$EH\not\subset$平面 BCD，$FG\subset$平面 BCD，

∴$EH/\!/$平面 BCD.

(2)由(1)得 $BD/\!/EH$，

又∵$BD\not\subset$平面 $EFGH$，$EH\subset$平面 $EFGH$

∴$BD/\!/$平面 $EFGH$

【点拨】利用直线与平面平行的判定定理证明线面平行，关键是寻找平面内与已知直线平行的直线.

【变式训练 1】已知 $AB/\!/PQ$，$BC/\!/QR$，若$\angle ABC=30°$，则$\angle PQR=$　　　　(B)

A. $30°$　　　　B. $30°$或 $150°$

C. $150°$　　　　D. 以上结论都不对

【解析】因为 $AB/\!/PQ$，$BC/\!/QR$，

所以$\angle PQR$ 与$\angle ABC$ 相等或互补.

因为$\angle ABC=30°$，所以$\angle PQR=30°$或 $150°$.

【变式训练 2】过正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1 作一个平面交平面 CDD_1C_1 于 EE_1. 求证：$BB_1/\!/EE_1$.

【证明】∵$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，

∴面 $AA_1B_1B/\!/$面 DD_1C_1C，

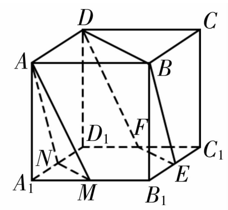
∵面 $AA_1B_1B\cap$面 $BB_1E_1E=BB_1$，面 $DD_1C_1C\cap$面 $BB_1E_1E=EE_1$，∴$BB_1/\!/EE_1$.

2. 平面与平面平行

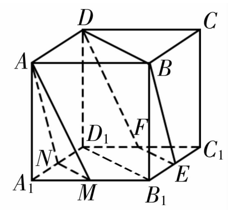
【例 2】如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M,E,F,N 分别是 A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1 的中点. 求证：

(1)E,F,B,D 四点共面；

(2)平面 $MAN/\!/$平面 $EFDB$.



【证明】(1)连接 B_1D_1，∵E,F 分别是 B_1C_1，C_1D_1 的中点，∴$EF/\!/B_1D_1$，



又∵$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，

∴$BD/\!/B_1D_1$，

∴$EF/\!/BD$，∴E,F,B,D 四点共面.

(2)∵M,N 分别是 A_1B_1，A_1D_1 的中点，∴$MN/\!/B_1D_1$，

∵$EF/\!/B_1D_1$，∴$MN/\!/EF$，∴$MN/\!/$平面 $EFDB$，

∵$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，F,M 分别是 D_1C_1，A_1B_1 的中点，

∴$AM/\!/DF$，∴$AM/\!/$平面 $EFDB$，

又∵$AM\cap MN=M$，∴平面 $MAN/\!/$平面 $EFDB$.

【点拨】平面与平面平行的判定方法

(1)定义法：两个平面没有公共点.

(2)判定定理：一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面.

(3)转化为线线平行：平面 α 内的两条相交直线与平面 β 内的两条相交直线分别平行，则 $\alpha/\!/\beta$.

(4)利用平行平面的传递性：若 $\alpha/\!/\beta$，$\beta/\!/\gamma$，则 $\alpha/\!/\gamma$.

【变式训练 3】平面 α 与圆台的上、下底面分别相交于直线 m,n，则 m,n 的位置关系是　　　　(A)

A. 平行　　　　B. 相交

C. 异面　　　　D. 平行或异面

【变式训练 4】已知平面 $\alpha/\!/$平面 β，直线 $l/\!/\alpha$，则 l 与 β 的位置关系是　　　　(C)

A. $l/\!/\beta$　　　　B. $l\subset\beta$

C. $l/\!/\beta$ 或 $l\subset\beta$　　　　D. l 与 β 相交

模拟演练

1. 已知直线 m,n 和平面 α，则下列命题正确的是　　　　(D)

A. 若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m\perp n$

B. 若 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$

C. 若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$

D. 若 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m\perp n$

2. 在空间中，设 α,β 表示平面，m,n 表示直线. 则下列命题正确的是　　　　(A)

A. 若 $m/\!/n$，$n\perp\alpha$，则 $m\perp\alpha$

B. 若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m\perp\beta$

C. 若 m 上有无数个点不在 α 内，则 $m/\!/\alpha$

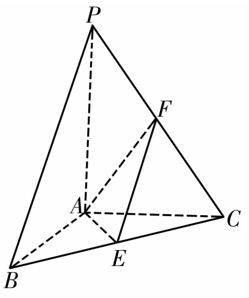
D. 若 $m/\!/\alpha$，则 m 与 α 内的任何直线平行

3. 空间中有两个角 α,β，且角 α,β 的两边分别对应平行. 若 $\alpha=60°$，则 $\beta=$__60°或 120°__.

4. (2020・湖南)如图所示，三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AB\perp AC$，且 E,F 分别为 BC,PC 的中点.

(1)求证：$EF/\!/$平面 PAB；

(2)已知 $AB=AC=4$，$PA=6$，求三棱锥 $F\text{-}AEC$ 的体积.

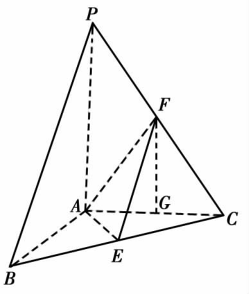


【解析】(1)在$\triangle PBC$中，$\because E,F$分别为BC,PC的中点，

$\therefore EF/\!/PB$.

$\because EF\not\subset$平面PAB，$PB\subset$平面PAB，$\therefore EF/\!/$平面PAB.

(2)取AC中点G，连接FG.



又$\because F$为PC中点，$\therefore FG/\!/PA$，

且$FG=\frac{1}{2}PA=\frac{1}{2}\times 6=3$.

$\because PA\perp$平面ABC，

$\therefore FG\perp$平面ABC，

在$\triangle ABC$中，$\because AB\perp AC$，$AB=AC=4$，E为BC中点，

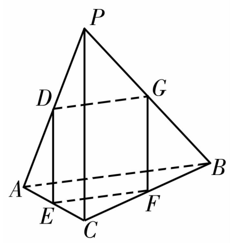
$\therefore S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{4}\times 4\times 4=4$，

$\therefore V_{F\text{-}AEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEC}\cdot FG=\frac{1}{3}\times 4\times 3=4$.

5.如图所示，在四面体$PABC$中，$PC\perp AB$，点D,E,F,G分别是棱AP,AC,BC,PB的中点，求证：

(1)$DE/\!/$平面BCP；

(2)四边形$DEFG$为矩形.



【解析】证明：(1)因为D,E分别为AP,AC的中点，所以$DE/\!/PC$.

又因为$DE\not\subset$平面BCP，$PC\subset$平面BCP，所以$DE/\!/$平面BCP.

(2)因为D,E,F,G分别为AP,AC,BC,PB的中点，

所以$DE/\!/PC/\!/FG$，$DG/\!/AB/\!/EF$.

所以四边形$DEFG$为平行四边形.

又因为$PC\perp AB$，所以$DE\perp DG$.

所以四边形$DEFG$为矩形.

第 4 课时 空间直线、平面的垂直

考试指导

1. 能运用直线与平面垂直的判定定理与性质定理，证明一些简单空间图形中的线面垂直问题，会求简单空间图形中直线与平面所成的角.

2. 能运用平面与平面垂直的判定定理与性质定理，证明一些简单空间图形中的面面垂直问题，会求简单空间图形中二面角的大小.

考点梳理

1. 几个关于角的概念

(1)异面直线所成的角：已知两条异面直线 a，b，经过空间任一点 O 作直线 $a'//a$，$b'//b$，我们把 a' 与 b' 所成的角叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角). 范围：$(0°,90°]$.

(2)直线与平面所成的角：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的角，叫做这条直线和这个平面所成的角. 范围：$[0°,90°]$.

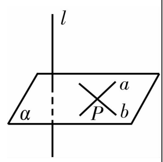
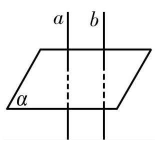
规定：一条直线垂直于平面，它们所成的角是<u>90°</u>；一条直线和平面平行或在平面内，它们所成的角是<u>0°</u>.

(3)二面角

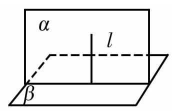
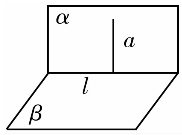
二面角：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角. 这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面. 棱为 AB，面分别为 α，β 的二面角记作二面角 $\alpha-AB-\beta$.

二面角的平面角：在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上任取一点 O，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角. 范围：$[0°,180°]$.

2. 直线与平面垂直的判定及性质

定理	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	如果一条直线与一个平面内的<u>两条相交直线</u>垂直，那么该直线与此平面垂直		$\left.\begin{array}{l}l\perp a\\ l\perp b\\ a\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a\cap b=P\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$
性质定理	垂直于同一个平面的两条直线平行		$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a//b$

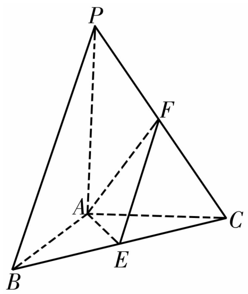
3. 平面与平面垂直的判定及性质

定理	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	如果一个平面过另一个平面的<u>垂线</u>，那么这两个平面垂直		$\left.\begin{array}{l}l\perp\beta\\ l\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$
性质定理	两个平面垂直，如果一个平面内有一条直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直		$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=l\\ a\subset\alpha\\ a\perp l\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\beta$

典例剖析

1. 求角的大小

【例 1】如图所示，在三棱锥 P-ABC 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$\angle BAC=90°$，则二面角 B-PA-C 的大小为<u>90°</u>.



【解析】$\because PA\perp$ 平面 ABC，$\therefore PA\perp AB$，$PA\perp AC$，

$\therefore\angle BAC$ 为二面角 B-PA-C 的平面角，又 $\angle BAC=90°$.

所以所求二面角的大小为 $90°$.

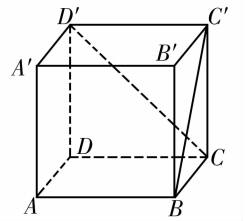
【点拨】求二面角大小的步骤

(1)找出这个平面角；

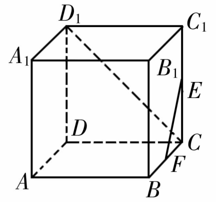
(2)证明这个角是二面角的平面角；

(3)作出这个角所在的三角形，解这个三角形，求出角的大小.

【变式训练 1】如图，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，BC' 与 CD' 所成的角的大小为<u>60°</u>，AD 与 BC' 所成的角的大小为<u>45°</u>.



【变式训练 2】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是棱 C_1C 与 BC 的中点，则直线 EF 与直线 D_1C 所成的角的大小是__60°__.

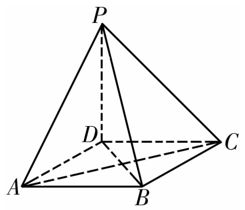


2. 直线与平面垂直

【例 2】(2016·湖南)如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 2 的菱形，$PD\perp$底面 $ABCD$.

(1)求证：$AC\perp$平面 PBD；

(2)若 $PD=2$，直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



【解析】(1)∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴$AC\perp BD$.

又∵$PD\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，∴$PD\perp AC$.

故 $AC\perp$平面 PBD.

(2)∵$PD\perp$平面 $ABCD$，

∴$\angle PBD$ 是直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角.

∴$\angle PBD=45°$，∴$BD=PD=2$.

又∵$AB=AD=2$，

∴菱形 $ABCD$ 的面积为 $S=AB\cdot AD\cdot\sin 60°=2\sqrt{3}$.

故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S\cdot PD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【点拨】利用直线与平面垂直的判定定理证明线面垂直的关键是在这个平面内找到两条相交直线，证明它们都和这条直线垂直.

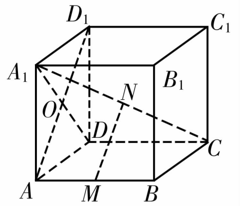
【变式训练 3】若三条直线 OA，OB，OC 两两垂直，则直线 OA 垂直于 (C)

A. 平面 OAB　　B. 平面 OAC

C. 平面 OBC　　D. 平面 ABC

【变式训练 4】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 AB，A_1C 上一点，$MN\perp$平面 A_1DC.

求证：$MN /\!/ AD_1$.



【证明】因为四边形 ADD_1A_1 为正方形，所以 $AD_1\perp A_1D$.

又因为 $CD\perp$平面 ADD_1A_1，所以 $CD\perp AD_1$.

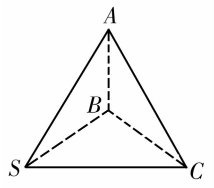
因为 $A_1D\cap CD=D$，所以 $AD_1\perp$平面 A_1DC.

又因为 $MN\perp$平面 A_1DC，所以 $MN /\!/ AD_1$.

3. 平面与平面垂直

【例 3】如图所示，在四面体 $ABCS$ 中，已知 $\angle BSC=90°$，$\angle BSA=\angle CSA=60°$，又 $SA=SB=SC$.

求证：平面 $ABC\perp$平面 SBC.



【证明】方法一：(利用定义证明)

因为 $\angle BSA=\angle CSA=60°$，$SA=SB=SC$，

所以 $\triangle ASB$ 和 $\triangle ASC$ 是等边三角形，

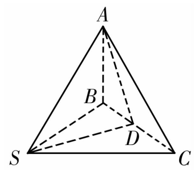
则有 $SA=SB=SC=AB=AC$，令 $SA=a$，

所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle SBC$ 为共底边 BC 的等腰三角形.

取 BC 的中点 D，如图所示，

连接 AD，SD，则 $AD\perp BC$，$SD\perp BC$，

所以 $\angle ADS$ 为二面角 $A-BC-S$ 的平面角.



在 Rt$\triangle BSC$ 中，因为 $SB=SC=a$，

所以 $SD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

在 $\triangle ADS$ 中，因为 $SD^2+AD^2=SA^2$，

所以 $\angle ADS=90°$，即二面角 $A-BC-S$ 为直二面角，故平面 $ABC\perp$平面 SBC.

方法二：(利用判定定理证明)

因为 $SA=SB=SC$，且 $\angle BSA=\angle CSA=60°$，

所以 $SA=AB=AC$，

所以点 A 在平面 SBC 上的射影为 $\triangle SBC$ 的外心.

因为 $\triangle SBC$ 为直角三角形，

所以点 A 在 $\triangle SBC$ 上的射影 D 为斜边 BC 的中点，

所以 $AD\perp$平面 SBC.

又因为 $AD\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 SBC.

【点拨】证明面面垂直常用的方法

(1)定义法:说明两个半平面所成的二面角是直二面角.

(2)判定定理法:在其中一个平面内寻找一条直线与另一个平面垂直,即把问题转化为线面垂直.

(3)性质法:两个平行平面中的一个平面垂直于第三个平面,则另一个平面也垂直于此平面.

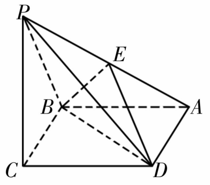
【变式训练 5】对于直线 m,n 和平面 α,β,能得出 $\alpha\perp\beta$ 的一个条件是 (C)

A. $m\perp n,m/\!/\alpha,n/\!/\beta$　　B. $m\perp n,\alpha\cap\beta=m,n\subset\alpha$

C. $m/\!/n,n\perp\beta,m\subset\alpha$　　D. $m/\!/n,m\perp\alpha,n\perp\beta$

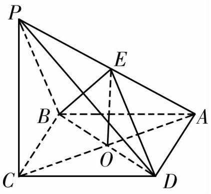
【变式训练 6】如图所示,四边形 $ABCD$ 是边长为 a 的菱形,$PC\perp$平面 $ABCD$,E 是 PA 的中点.

求证:平面 $BDE\perp$平面 $ABCD$.



【证明】连接 AC,设 $AC\cap BD=O$,连接 OE.

因为 O 为 AC 中点,E 为 PA 的中点,



所以 EO 是$\triangle PAC$ 的中位线,所以 $EO/\!/PC$.

因为 $PC\perp$平面 $ABCD$,所以 $EO\perp$平面 $ABCD$.

又因为 $EO\subset$平面 BDE,所以平面 $BDE\perp$平面 $ABCD$.

模拟演练

1. 若空间两条直线 a 和 b 没有公共点,则 a 与 b 的位置关系是 (D)

A. 共面　　B. 平行

C. 异面　　D. 平行或异面

2. 已知直线 $a\perp$直线 b,$b\perp$平面 β,则 a 与 β 的关系是 (D)

A. $a\perp\beta$　　B. $a/\!/\beta$

C. $a\subset\beta$　　D. $a\subset\beta$ 或 $a/\!/\beta$

3. (2021·湖南)直线 $l\perp$平面 α 的条件可以是 (D)

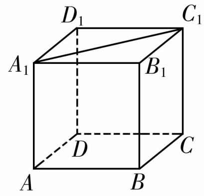
A. l 垂直于 α 内一条直线

B. l 在垂直于 α 的平面内

C. l 垂直于 α 内两平行直线

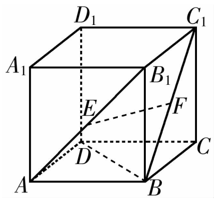
D. l 垂直于 α 内两相交直线

4. (2021·湖南)如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,异面直线 A_1C_1 与 BC 所成的角是 (B)



A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

5. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 AB_1,BC_1 的中点,则 EF 与 BD 所成的角为 (D)



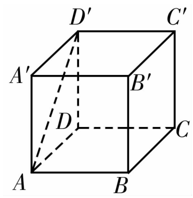
A. 30°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 90°

6. 已知 α,β 是两个不同的平面,m,n 是两条不同的直线,则下列命题正确的是 (B)

A. 若 $\alpha\perp\beta,m\perp\beta$,则 $m/\!/\alpha$　　B. 若 $m/\!/n,m\perp\alpha$,则 $n\perp\alpha$

C. 若 $m\subset\alpha,n/\!/\beta$,则 $m/\!/n$　　D. 若 $m/\!/\alpha,m/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$

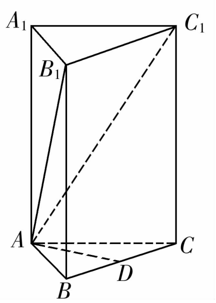
7. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中,异面直线 $A'B'$与 BC 所成的角的大小为__90°__,异面直线 AD'与 BC 所成的角的大小为__45°__.



8. (2022·湖南)如图,在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AB=AC$,D 为 BC 的中点.

(1)证明:$AD\perp$平面 BCC_1B_1;

(2)若 $AB=BC=2$,$AA_1=3$,求四棱锥 $A\text{-}BCC_1B_1$ 的体积.



【解析】(1)证明:$\because ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

$\therefore AD\perp BB_1$,

又$\because AB=AC$,D 为 BC 的中点,$\therefore AD\perp BC$,

$\therefore BB_1\cap BC=B$，$\therefore AD\perp$平面BCC_1B_1.

(2)$\because AB=BC=2$，

$\therefore\triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore AD=\sqrt{3}$，$\because AA_1=3$，$\therefore BB_1=3$，

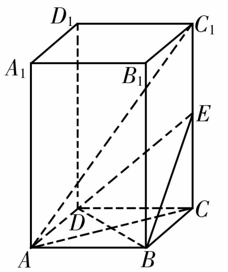
$\therefore V_{A\text{-}BCC_1B_1}=\dfrac{1}{3}\times3\times2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

9.如图，在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是正方形，$AA_1=\sqrt{2}AB$，E为CC_1的中点.

(1)求证：$AC_1//$平面BDE；

(2)求证：平面$BDE\perp$平面ACC_1；

(3)求二面角$E\text{-}BD\text{-}C$的大小.



【解析】(1)证明：设$BD\cap AC=O$，连接OE，

$\because$底面$ABCD$是正方形，$\therefore O$是AC中点，又E是CC_1中点，

$\therefore AC_1//OE$，又$OE\subset$平面BDE，$AC_1\not\subset$平面BDE，

$\therefore AC_1//$平面BDE.

(2)$CC_1\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，

$\therefore CC_1\perp BD$，又正方形中$BD\perp CA$，

$AC\cap CC_1=C$，AC，$CC_1\subset$平面ACC_1，

$\therefore BD\perp$平面ACC_1，又$\because BD\subset$平面BDE，

$\therefore$平面$BDE\perp$平面ACC_1；

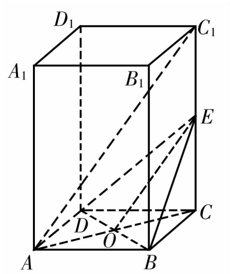
(3)$\because BD\perp$平面ACC_1，$OE\subset$平面ACC_1，$\therefore BD\perp OE$，

$\therefore\angle EOC$是二面角$E\text{-}BD\text{-}C$的平面角，

由已知$CC_1=AA_1=\sqrt{2}AB$，而$AC=\sqrt{2}AB$，E，O分别是CC_1，AC中点，

$\therefore OC=CE$，$\therefore\angle EOC=\dfrac{\pi}{4}$.

即二面角$E\text{-}BD\text{-}C$的大小为$\dfrac{\pi}{4}$.



第九章 统 计

第1课时 随机抽样

考试指导

1. 了解总体、样本、样本量等概念.

2. 了解随机抽样的必要性和重要性,理解简单随机抽样,能用抽签法和随机数法确定样本.

3. 理解分层随机抽样,能用分层随机抽样解决有关的抽样问题.

考点梳理

1. 简单随机抽样和分层随机抽样

简单随机抽样和分层随机抽样的区别与联系见下表:

类别	共同点	各自特点	相互联系	适用范围
简单随机抽样	抽样过程中各个个体被抽到的机会相等,且都是不放回抽取	从总体中逐个抽取	最基本的抽样方法	总体容量较小
分层随机抽样		将总体分成几部分,每一部分按比例抽取	每层抽样时采用简单随机抽样	总体由差异明显的若干部分组成

2. 总体均值和样本均值

(1)一般地,总体中有 N 个个体,它们的变量值分别为 Y_1,Y_2,…,Y_N,则称 $\overline{Y}=\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i$ 为<u>总体均值</u>,又称<u>总体平均数</u>.

(2)如果从总体中抽取一个容量为 n 的样本,它们的变量值分别为 y_1,y_2,…,y_n,则称 $\overline{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ 为<u>样本均值</u>,又称<u>样本平均数</u>.在简单随机抽样中,我们常用样本平均数 $\overline{y}$ 去估计总体平均数 $\overline{Y}$.

3. 获取数据的基本途径

(1)通过调查获取数据;

(2)通过试验获取数据;

(3)通过观察获取数据;

(4)通过查询获得数据.

典例剖析

1. 简单随机抽样

【例 1】下列抽样方法是简单随机抽样的是 (D)

A. 从平面直角坐标系中抽取 5 个点作为样本

B. 可口可乐公司从仓库中的 1 000 箱可乐中一次性抽取 20 箱进行质量检查

C. 某连队从 200 名战士中,挑选出 50 名最优秀的战士去参加抢险救灾活动

D. 从 10 个手机中逐个不放回地随机抽取 2 个进行质量检验(假设 10 个手机已编号)

【解析】A 中平面直角坐标系中有无数个点,这与要求总体中的个体数有限不相符,故错误;B 中一次性抽取不符合简单随机抽样逐个抽取的特点,故错误;C 中 50 名战士是最优秀的,不符合简单随机抽样的等可能性,故错误.故选 D.

【点拨】简单随机抽样必须具备的特点

(1)被抽取样本的总体中的个体数 N 是有限的;

(2)抽取的样本是从总体中逐个抽取的;

(3)简单随机抽样是一种等可能的抽样.

如果三个特征有一个不满足,就不是简单随机抽样.

【变式训练 1】为了了解某市高三毕业生升学考试中数学成绩的情况,从参加考试的学生中随机地抽查了 1 000 名学生的数学成绩进行统计分析.在这个问题中,下列说法正确的是 (D)

A. 总体是该市参加升学考试的全体学生

B. 个体是 1 000 名学生中的每一名学生

C. 样本容量是 1 000 名学生

D. 样本是 1 000 名学生的升学考试数学成绩

【变式训练 2】用抽签法抽取一个容量为 5 的样本,它们的变量值分别为 2,4,5,7,9,则该样本的平均数为 (C)

A. 4.5　　B. 4.8　　C. 5.4　　D. 6

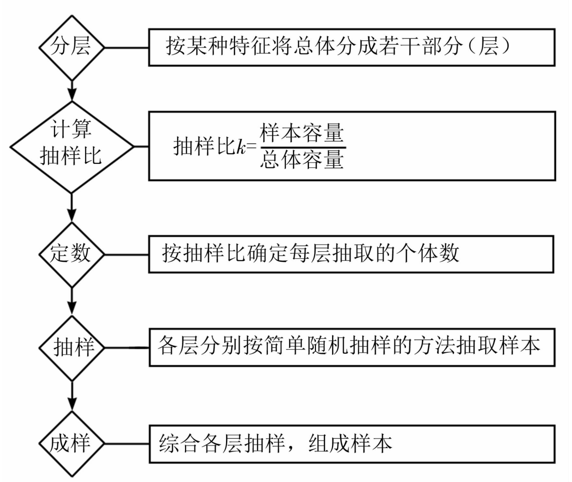
2. 分层随机抽样

【例 2】某林场有树苗 30 000 棵,其中松树苗 4 000 棵.为了调查树苗的生长情况,采用分层随机抽样的方法抽取一个容量为 150 的样本,则样本中松树苗的数量为 (C)

A. 30　　B. 25　　C. 20　　D. 15

【解析】样本中松树苗为 $4\ 000\times\frac{150}{30\ 000}=4\ 000\times\frac{1}{200}=20$(棵). 故选 C.

【点拨】分层随机抽样的步骤



【变式训练 3】某校高三年级有男生 500 人，女生 400 人. 为了了解该年级学生的健康状况，从男生中任意抽取 25 人，从女生中任意抽取 20 人进行调查. 这种抽样方法是　(D)

A. 简单随机抽样　　B. 抽签法

C. 随机数法　　D. 分层随机抽样

【变式训练 4】某学院 A,B,C 三个专业共有 1 200 名学生. 为了调查这些学生勤工俭学的情况，拟采用分层随机抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本. 已知该学院的 A 专业有 380 名学生，B 专业有 420 名学生，则在该学院的 C 专业应抽取的学生人数为　(B)

A. 30　　B. 40　　C. 50　　D. 60

3. 获取数据的途径

【例 3】下列要研究的问题可以用普查的方式进行调查的是　(C)

A. 检验一批钢材的抗拉强度

B. 检验海水中微生物的含量

C. 调查某小组 10 名成员的业余爱好

D. 检验一批汽车的使用寿命

【解析】A 不能用普查的方式调查，因为这种试验具有破坏性；B 用普查的方式无法完成；C 可以用普查的方式进行调查；D 该试验具有破坏性，且需要耗费大量的时间，在实际生产中无法实现.

【点拨】选择获取数据的途径的依据

选择获取数据的途径主要依据所要研究问题的类型，以及获取数据的难易程度. 有的数据可以有多种获取途径，有的数据只能通过一种途径获取，选择合适的方法和途径能够更好地提高数据的可靠性.

【变式训练 5】下列要研究的数据一般通过试验获取的是　(D)

A. 某品牌电视机的市场占有率

B. 某电视连续剧在全国的收视率

C. 某校七年级一班的男女同学的比例

D. 某型号炮弹的射程

【变式训练 6】小明从网上查询得到某贫困地区 10 户居民家庭年收入(单位:万元)如下表所示:

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年收入	1.2	1.3	1.8	2.0	4.6	1.7	0.9	2.1	1.0	1.6

根据以上数据，我们认为有一个数据是不准确的，需要剔除，这个数据是__4.6__.

模拟演练

1. 在“世界读书日”前夕，为了了解某地 5 000 名居民某天的阅读时间，从中抽取了 200 名居民，对其该天的阅读时间进行统计分析. 在这个问题中，5 000 名居民的阅读时间是(A)

A. 总体　　B. 个体

C. 样本的容量　　D. 从总体中抽取的一个样本

2. (2019 · 湖南)某班有男生 30 人，女生 20 人，现用分层随机抽样的方法从中抽取 10 人参加一项活动，则抽取的男生人数为　(B)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

3. 某校选修乒乓球课程的学生中，高一年级有 30 名，高二年级有 20 名. 现用分层随机抽样的方法从这 50 名学生中抽取一个样本. 已知在高一年级的学生中抽取了 6 名，则在高二年级的学生中应抽取的人数为　(C)

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

4. 近几年来移动支付越来越普遍，不同年龄段的人对移动支付的熟知程度不同. 某学校兴趣小组为了了解移动支付在大众中的熟知度，要对 15～75 岁的人群进行随机抽样调查，则最合适的抽样方法是__分层随机抽样__.

5. (2020 · 湖南)某班视力近视的学生有 15 人，视力正常的学生有 30 人. 为了了解该班学生近视形成的原因，拟采用分层随机抽样的方法抽取部分学生，调查相关信息，则抽取的学生中视力近视与视力正常的人数之比为__1∶2__.

6. (2018 · 湖南)某工厂甲、乙两个车间生产了同一种产品，数量分别为 60 件、40 件，现用分层随机抽样方法抽取一个容量为 n 的样本进行质量检测，已知从甲车间抽取了 6 件产品，则 $n=$__10__.

7. (2022 · 湖南)一支游泳队有男运动员 20 人，女运动员 12 人，按性别进行分层，用分层随机抽样的方法从全体运动员中抽出一个容量为 8 的样本，如果样本按比例分配，那么抽取的女运动员人数为__3__.

第 2 课时　用样本估计总体

考试指导

1. 掌握频率分布表和频率分布直方图，能利用数据合理画出频率分布直方图，能读懂频率直方图，掌握数据分析能力.

2. 理解和掌握百分位数的意义，能够从一组数据准确取出第 p 百分位数，理解四分位数等概念.

3. 会利用平均数、中位数、众数等对总体的集中趋势进行分析.

4. 会利用方差、标准差等对总体的离散程度进行分析.

考点梳理

1. 画频率分布直方图的步骤

(1)求极差. 极差为一组数据中最大值与最小值的差.

(2)决定组距与组数. 组距与组数的确定没有固定的标准，一般数据的个数越多，所分组数越多. 当样本容量不超过 100 时，常分成 5～12 组. 为方便起见，一般取等长组距，并且组距应力求“取整”.

(3)将数据分组.

(4)列频率分布表. 计算各小组的频率，第 i 组的频率 $=\dfrac{\text{第 } i \text{ 组频数}}{\text{样本量}}$.

(5)画频率分布直方图. 横轴表示分组，纵轴表示$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$. 这里，$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$实际上就是频率分布直方图中各小长方形的高度，它反映了各组样本观测数据的疏密程度.

2. 总体百分位数的估计

(1)第 p 百分位数的定义

一般地，一组数据的第 p 百分位数是这样一个值，它使得这组数据中至少有 $p\%$的数据小于或等于这个值，且至少有 $(100-p)\%$的数据大于或等于这个值.

(2)计算第 p 百分位数的步骤

第 1 步，按从小到大排列原始数据.

第 2 步，计算 $i=n\times p\%$.

第 3 步，若 i 不是整数，而大于 i 的比邻整数为 j，则第 p 百分位数为第 j 项数据；若 i 是整数，则第 p 百分位数为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的平均数.

3. 用样本估计总体中的特征量

数字特征	定义
众数	一组数据中出现次数最多的数据
中位数	将一组数据按大小依次排列，处在中间位置的一个数据(或中间两个数据的平均数)
平均数	有 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$
标准差	$s=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$
方差	标准差的平方 s^2

平均数、众数和中位数刻画了数据的集中趋势，标准差刻画了数据的<u>　离散程度　</u>或<u>　波动程度　</u>，标准差越大，数据的离散程度越<u>　大　</u>；标准差越小，数据的离散程度越<u>　小　</u>.

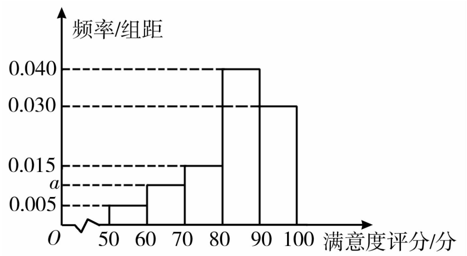
典例剖析

1. 总体取值规律的估计

【例 1】(2018·湖南)某学校为了解学生对食堂用餐的满意度，从全校在食堂用餐的 3 000 名学生中，随机抽取 100 名学生对食堂用餐的满意度进行评分. 根据学生对食堂用餐满意度的评分，得到如图所示的频率分布直方图.

(1)求频率分布直方图中 a 的值；

(2)规定：学生对食堂用餐满意度的评分不低于 80 分为“满意”，试估计该校在食堂用餐的 3 000 名学生中“满意”的人数.



【解析】(1)由频率分布直方图的矩形面积和为 1 可知 $(0.040+0.030+0.015+a+0.005)\times10=1$，

所以 $a=0.010$.

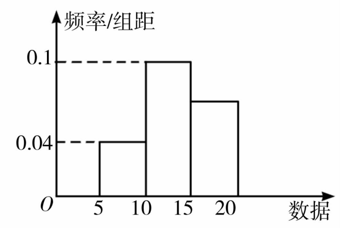
(2)样本中不低于80分的频率为$(0.040+0.030)\times 10=0.7$，由样本估计总体可得3 000名学生中不低于80分的频率约为0.7，所以满意的人数为$0.7\times 3\ 000=2\ 100$.故该校在校食堂用餐的3 000名学生中“满意”的人数约为2 100人.

【点拨】频率分布直方图的性质

(1)因为小矩形的面积$=$组距$\times\dfrac{频率}{组距}=$频率，所以各小矩形的面积表示相应各组的频率.这样，频率分布直方图就以面积的形式反映了数据落在各个小组内的频率大小.

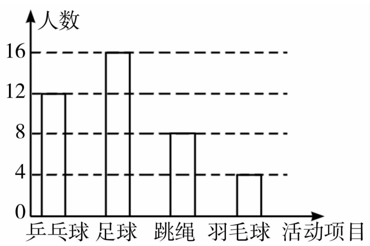
(2)在频率分布直方图中，各小矩形的面积之和等于1.

【变式训练1】如图所示是一个容量为100的样本的频率分布直方图，则由图中的数据可知，样本落在[15,20]内的频数为　　　　(B)



A. 20　　　B. 30　　　C. 40　　　D. 50

【变式训练2】某班计划开展一些课外活动，全班有40名学生报名参加，他们对乒乓球、足球、跳绳、羽毛球4项活动的参加人数进行了统计，绘制了条形统计图(如图所示)，那么参加羽毛球活动的人数的频率是__0.1__.



2. 总体百分位数的估计

【例2】下列关于一组数据的第50百分位数的说法正确的是　　　　(A)

A. 第50百分位数就是中位数

B. 总体数据中的任意一个数小于它的可能性一定是50%

C. 它一定是这组数据中的一个数据

D. 它适用于总体是离散型的数据

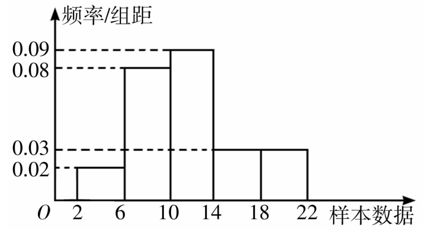
【解析】由百分位数的意义可知选项A正确，B,C,D错误.

【点拨】求一组数据的百分位数时，一定要先将该组数据按照从小到大的顺序排列.另外要注意百分位数不一定是这组数据中的数.

【变式训练3】数据7.0,8.4,8.4,8.4,8.6,8.7,9.0,9.1的第30百分位数是__8.4__.

【解析】因为$8\times 30\%=2.4$，故第30百分位数是第三项数据8.4.

【变式训练4】一组样本数据的频率分布直方图如图所示，估计此样本数据的第50百分位数为__$\dfrac{100}{9}$__.



【解析】样本数据低于10的比例为$0.08+0.32=0.40$，样本数据低于14的比例为$0.40+0.36=0.76$，所以此样本数据的第50百分位数在[10,14]内，估计此样本数据的第50百分位数为$10+\dfrac{0.1}{0.36}\times 4=\dfrac{100}{9}$.

3. 总体集中趋势的估计

【例3】某快餐店所有工作人员一个月的收入(单位：元)如下表：

老板	大厨	二厨	采购员	杂工	服务生	会计
30 000	4 500	3 500	4 000	3 200	3 200	4 100

(1)计算所有人员的月平均收入；

(2)这个平均收入能反映打工人员的月收入的一般水平吗？为什么？

(3)去掉老板的收入后，再计算平均收入，这能代表打工人员的月收入的水平吗？

【解析】(1)月平均收入$\overline{x}_1=\dfrac{1}{7}(30\ 000+4\ 500+3\ 500+4\ 000+3\ 200+3\ 200+4\ 100)=7\ 500$元.

(2)这个平均收入不能反映打工人员的月收入的一般水平，可以看出打工人员的收入都低于平均收入，因为老板收入特别高，这是一个异常值，对打工人员的平均收入产生了较大的影响，并且他不是打工人员.

(3)去掉老板的收入后的月平均收入$\overline{x}_2=\dfrac{1}{6}(4\ 500+3\ 500+4\ 000+3\ 200+3\ 200+4\ 100)=3\ 750$(元).这能代表打工人员的月收入的水平.

【点拨】利用样本数字特征进行决策时的两个关注点

(1)平均数与每一个数据都有关，可以反映更多的总体信息，但受极端值的影响大；中位数是样本数据所占频率的等分

线，不受几个极端值的影响；众数只能体现数据的最大集中点，无法客观反映总体特征.

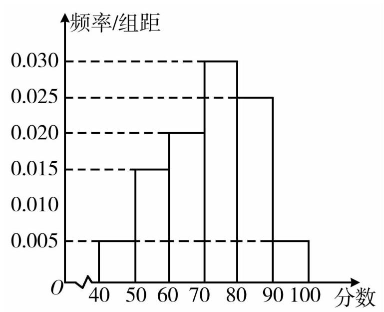
(2)当平均数大于中位数时，说明数据中存在许多较大的极端值.

【变式训练 5】一组样本数据为 19,23,12,14,14,17,10,12,18,14,27，则这组数据的众数和中位数分别为　　(A)

A. 14,14　　B. 12,14

C. 14,15.5　　D. 12,15.5

【变式训练 6】某校从高一年级参加期末考试的学生中抽出 60 名，其成绩(均为整数)的频率分布直方图如图所示，由此估计此次考试成绩的中位数、众数分别是　　(A)



A. 73.3,75　　B. 73.3,80

C. 70,70　　D. 70,75

4. 总体离散程度的估计

【例 4】甲、乙两女子曲棍球队在某年的国际联赛中，甲队平均每场进球数为 3.2，全年比赛进球个数的标准差为 3；乙队平均每场进球数为 1.8，全年比赛进球个数的标准差为 0.3，则下列说法错误的是　　(B)

A. 甲队的技术比乙队好

B. 甲队的发挥比乙队稳定

C. 乙队几乎每场都进球

D. 甲队的表现时好时坏

【解析】因为甲队平均每场进球数为 3.2，乙队平均每场进球数为 1.8，所以甲队技术比乙队好，A 正确；因为甲队全年比赛进球数的标准差为 3，乙队全年比赛进球数的标准差为 0.3，所以乙队的发挥比甲队稳定，B 错误；因为乙队的标准差为 0.3，说明每场进球数接近平均值，乙队几乎每场都进球，C 正确；甲队的标准差为 3，说明甲队表现时好时坏，D 正确. 故选 B.

【点拨】标准差、方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小. 标准差、方差越大，数据的离散程度越大；标准差、方差越小，数据的离散程度越小，标准差的大小不会超过极差. 标准差、方差的取值范围是$[0,+\infty)$. 标准差、方差为 0 时，样本各数据相等，说明数据没有波动幅度，数据没有离散性.

【变式训练 7】已知一个样本中的数据为 1,2,3,4,5，则该样本的标准差为　　(B)

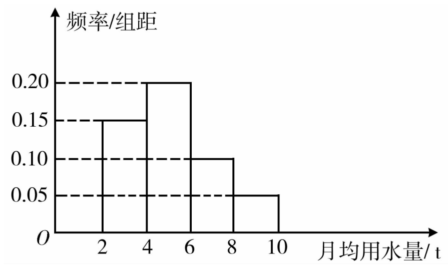
A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【变式训练 8】某学员在一次射击测试中射靶 10 次，命中环数为 7,8,7,9,5,4,9,10,7,4，则平均命中环数为__7__，命中环数的标准差为__2__.

模拟演练

1. (2016·湖南)某社区有 300 户居民. 为了解该社区居民的用水情况，从中随机抽取一部分住户某年每月的用水量(单位:t)进行分析，得到这些住户月均用水量的频率分布直方图(如图). 由此可以估计该社区居民月均用水量在[4,6)的住户数为　　(C)



A. 50　　B. 80　　C. 120　　D. 150

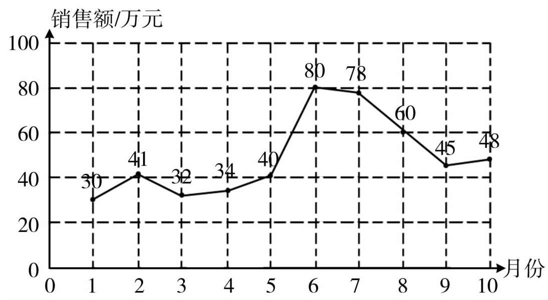
2. 一组样本数据为 18,22,11,13,13,16,9,11,18,13,26，则这组数据的众数为　　(C)

A. 11　　B. 12　　C. 13　　D. 18

3. (2022·湖南)某学生 2022 年前 5 个月参加社会实践活动的次数依次为 3,2,2,1,1，则该组数据的第 50 百分位数是　　(C)

A. 3　　B. 2.5　　C. 2　　D. 1

4. 如图是某公司 2021 年 1 月到 10 月的销售额(单位:万元)的折线图，销售额在 35 万元以下为亏损，超过 35 万元为盈利，则下列说法错误的是　　(B)



A. 这 10 个月中销售额最低的是 1 月份

B. 从 1 月到 6 月销售额逐渐增加

C. 这 10 个月中有 3 个月是亏损的

D. 这 10 个月销售额的中位数是 43 万元

5. 在一次模拟考试后，从高三某班随机抽取了 20 名学生的数学成绩，其分布如下表：

分组	[90，100)	[100，110)	[110，120)	[120，130)	[130，140)	[140，150]
频数	1	2	6	7	3	1

分数在 130 分以上(包括 130 分)者为优秀，据此估计该班的优秀率约为（ B ）

A. 10%　　B. 20%

C. 30%　　D. 40%

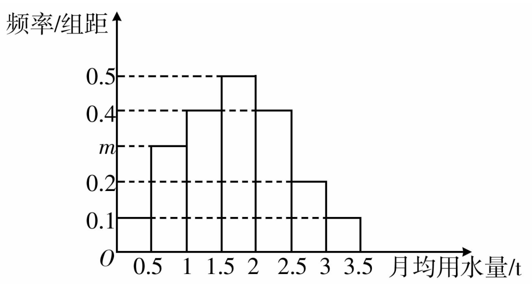
6. (2021·湖南)样本数据 1，5，2，3，0 的中位数是__2__.

7. 已知 1，2，3，4，a 这五个数的平均数是 3，则 a＝__5__，这五个数的方差是__2__.

8. (2021·湖南)我国是世界上严重缺水的国家之一，城市缺水问题更为突出. 某市政府为了节约生活用水，计划在本市试行生活用水定额管理，即确定一个居民月用水量标准 a(单位：t)，用水量不超过 a 的部分按平价收费，超过 a 的部分按议价收费，为了解居民用水情况，通过抽样，收集了部分居民的月均用水量(单位：t)，得到如图所示的频率分布直方图.

(1)求频率分布直方图中 m 的值；

(2)若使该市 85%的居民月用水量不超过标准 a，试估计 a 的值.



【解析】(1)根据频率分布直方图可知小长方形的面积之和为 1，

所以 $0.5\times(0.1+m+0.4+0.5+0.4+0.2+0.1)=1$，

所以 $m=0.3$.

(2)$0.1\times0.5+0.3\times0.5+0.4\times0.5+0.5\times0.5+0.4\times(a-2)=0.85$.

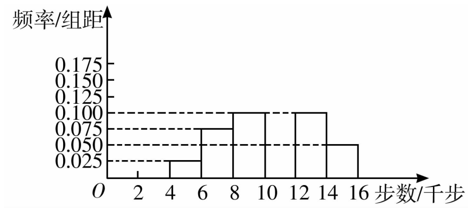
所以 $a=2.5$.

9. (2022·湖南)生命在于运动，随着国民生活水平不断提高，人们越来越注重体育锻炼. 某人通过计步仪器，记录了自己 100 天每天走的步数(单位：千步)，将数据进行整理，得到了频率分布表，如表所示，并据此作出了频率分布直方图的一部分，如图所示.

(1)求频率分布表中 a，b 的值，并请补全频率分布直方图.

(2)估计此人每天行走步数不少于 10 千步的概率.

分组	频数	频率
[4，6)	5	0.05
[6，8)	15	0.15
[8，10)	20	0.20
[10，12)	a	b
[12，14)	20	0.20
[14，16)	10	0.10
合计	100	1.00



【解析】(1)由表可知 $a=100-(5+15+20+20+10)=30$，$b=1-(0.05+0.15+0.20+0.20+0.10)=0.30$. 图略.

(2)此人每天行走步数不少于 10 千步的概率为

$P=0.3+0.2+0.1=0.6$.

第十章 概 率

第1课时 随机事件与概率

考试指导

1. 结合具体实例，理解样本点和有限样本空间的含义，理解随机事件与样本点的关系.

2. 了解随机事件的并、交与互斥的含义，并能够结合实例进行随机事件的交、并运算.

3. 结合具体实例理解古典概型，能够计算古典概型中简单随机事件的概率.

4. 能够通过实例理解概率的性质，掌握随机事件概率的运算法则.

考点梳理

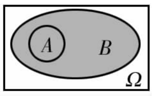
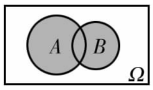
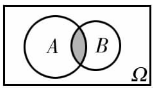
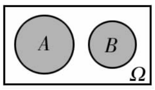
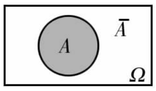
1. 样本点和样本空间

我们把随机试验 E 的每个可能的<u>基本结果</u>称为样本点，<u>全体样本点</u>的集合称为试验 E 的样本空间.

2. 三种事件的定义

随机事件	我们将样本空间 Ω 的<u>子集</u>称为随机事件，简称事件，并把只包含<u>一个</u>样本点的事件称为基本事件. 随机事件一般用大写字母 A，B，C，…表示. 在每次试验中，当且仅当 A 中某个样本点出现时，称为事件 A 发生
必然事件	Ω 作为自身的子集，包含了所有的样本点，在每次试验中总有一个样本点发生，所以 Ω 总会发生，我们称 Ω 为必然事件
不可能事件	空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，我们称 $\varnothing$ 为不可能事件

3. 事件的关系和运算

事件关系	含义	符号表示	图形表示
包含关系	若事件 A 发生，则事件 B <u>一定发生</u>	$B\supseteq A$（或 $A\subseteq B$）	
并事件（和事件）	事件 A 与事件 B <u>至少有一个</u>发生	<u>$A\cup B$</u>（或 <u>$A+B$</u>）	
交事件（积事件）	事件 A 与事件 B <u>同时</u>发生	<u>$A\cap B$</u>（或<u>AB</u>）	
互斥（互不相容）	事件 A 与事件 B <u>不能同时发生</u>	<u>$A\cap B=\varnothing$</u>	
互为对立	事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，事件 A 的对立事件记为 $\bar{A}$	$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$	

4. 古典概型

(1)古典概型的特征

①有限性：样本空间的样本点只有<u>有限个</u>.

②等可能性：每个样本点发生的可能性<u>相等</u>.

(2)古典概型的概率计算公式

一般地，设试验 E 是古典概型，样本空间 Ω 包含 n 个样本点，事件 A 包含其中的 k 个样本点，则定义事件 A 的概率 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$. 其中，$n(A)$ 和 $n(\Omega)$ 分别表示事件 A 和

样本空间Ω包含的样本点个数.

5. 概率的基本性质

性质1:对任意的事件A,都有$P(A)\geq 0$.

性质2:必然事件的概率为1,不可能事件的概率为0,即$P(\Omega)=$__1__,$P(\varnothing)=$__0__.

性质3:如果事件A与事件B互斥,那么$P(A\cup B)=$__$P(A)+P(B)$__.

性质4:如果事件A与事件B互为对立事件,那么$P(B)=$__$1-P(A)$__,$P(A)=$__$1-P(B)$__.

性质5:如果$A\subseteq B$,那么$P(A)$__$\leq$__$P(B)$.

性质6:设A,B是一个随机试验中的两个事件,我们有$P(A\cup B)=$__$P(A)+P(B)-P(A\cap B)$__.

典例剖析

1. 随机事件

【例1】给出下列四个命题:①“三个球全部放入两个盒子,其中必有一个盒子有一个以上的球”是必然事件;②“当x为某一实数时,可使$x^2\leq 0$”是不可能事件;③“明天长沙市要下雨”是必然事件;④“从100个灯泡(含有10个次品)中取出5个,5个全是次品”是随机事件.其中正确命题的个数是 (C)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】对于①,三个球全部放入两个盒子,有两种情况:1+2和3+0,故必有一个盒子有一个以上的球,所以该事件是必然事件,①正确;

对于②,$x=0$时$x^2=0$,所以该事件不是不可能事件,②错误;

对于③,“明天长沙市要下雨”是偶然事件,所以该事件是随机事件,③错误;

对于④,“从100个灯泡(含有10个次品)中取出5个,5个全是次品”,发生与否是随机的,所以该事件是随机事件,④正确.故正确命题有2个.

故选C.

【点拨】判断一个事件是哪类事件的方法

(1)看条件,因为三种事件都是相对于一定条件而言的;

(2)看结果是否发生,一定发生的是必然事件,不一定发生的是随机事件,一定不发生的是不可能事件.

【变式训练1】下列事件:①任取一个整数,被2整除;②小明同学在某次数学测试中成绩一定不低于120分(总分150分);③甲、乙两人进行竞技比赛,甲的实力远胜于乙,在一次比赛中甲获胜;④当圆的半径变为原来的2倍时,圆的面积是原来的4倍.其中随机事件的个数是 (B)

A. 1　　B. 3　　C. 0　　D. 4

【变式训练2】在200件产品中,有192件一级品,8件二级品,有下列事件:①“在这200件产品中任意选9件,全部是一级品”;②“在这200件产品中任意选9件,全部是二级品”;③“在这200件产品中任意选9件,不全是一级品”.其中__①③__是随机事件,__②__是不可能事件.

2. 事件的关系和运算

【例2】抛掷一枚骰子,“向上的点数是1或2”为事件A,“向上的点数是2或3”为事件B,则 (C)

A. $A\subseteq B$

B. $A=B$

C. $A\cup B$表示向上的点数是1或2或3

D. $A\cap B$表示向上的点数是1或2或3

【解析】设$A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,$A\cap B=\{2\}$,$A\cup B=\{1,2,3\}$,∴$A\cup B$表示向上的点数为1或2或3.

【点拨】判断事件间关系的方法

(1)考虑试验的前提条件,无论是包含、相等,还是互斥、对立,其发生的条件都是一样的;

(2)考虑事件间的结果是否有交事件,可考虑利用Venn图分析,对较难判断关系的,也可列出全部结果,再进行分析.

【变式训练3】许洋说:“本周我至少做完3套练习题.”设许洋所说的事件为A,则A的对立事件为 (B)

A. 至多做完3套练习题　　B. 至多做完2套练习题

C. 至多做完4套练习题　　D. 至少做完3套练习题

【变式训练4】从装有两个红球和两个黑球的口袋内任取两个球,那么互斥而不对立的两个事件是 (C)

A. “至少有一个黑球”与“都是黑球”

B. “至少有一个黑球”与“至少有一个红球”

C. “恰有一个黑球”与“恰有两个黑球”

D. “至少有一个黑球”与“都是红球”

3. 古典概型

【例3】从3男3女共6名学生中任选2名(每名同学被选中的概率均相等),则2名都是女同学的概率等于__$\frac{1}{5}$__.

【解析】用 A,B,C 表示 3 名男同学，用 a,b,c 表示 3 名女同学，则从 6 名同学中选出 2 人的样本空间 $\Omega=\{AB,AC,Aa,Ab,Ac,BC,Ba,Bb,Bc,Ca,Cb,Cc,ab,ac,bc\}$，其中事件"2 名都是女同学"包含样本点的个数为 3，故所求的概率为 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

【点拨】求解古典概型的概率的步骤

读 → 反复阅读题目，收集整理题目中的各种信息

判 → 判断试验是否为古典概型

列 → 求出试验的样本空间和所求事件包含的样本点的个数

算 → 计算出古典概型的概率，对应用题还要作答

【变式训练 5】下列关于古典概型的说法中正确的是（ B ）

①试验中所有可能出现的样本点只有有限个；②每个事件出现的可能性相等；③每个样本点出现的可能性相等；④样本点的总数为 n，随机事件 A 若包含 k 个基本事件，则 $P(A)=\frac{k}{n}$.

A. ②④　　B. ①③④

C. ①④　　D. ③④

【变式训练 6】从甲、乙、丙三人中任选两人担任课代表，甲被选中的概率为（ C ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

4. 概率的基本性质

【例 4】甲、乙两名乒乓球运动员在一场比赛中甲获胜的概率是 0.2，若不出现平局，那么乙获胜的概率为（ B ）

A. 0.2　　B. 0.8

C. 0.4　　D. 0.1

【解析】乙获胜的概率为 $1-0.2=0.8$.

【点拨】互斥事件、对立事件的概率公式的应用

(1)互斥事件的概率加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ 是一个非常重要的公式.运用该公式解题时，首先要分清事件间是否互斥，同时要学会把一个事件分拆为几个互斥事件，然后求出各事件的概率，用加法公式得出结果.

(2)当直接计算符合条件的事件个数比较烦琐时，可间接地先计算出其对立事件的个数，求得对立事件的概率，然后利用对立事件的概率加法公式 $P(A)+P(B)=1$，求出符合条件的事件的概率.

【变式训练 7】中国羽毛球队中的甲、乙两名队员参加奥运会羽毛球女子单打比赛，甲夺得冠军的概率为 $\frac{3}{7}$，乙夺得冠军的概率为 $\frac{1}{4}$，那么中国队夺得女子羽毛球单打冠军的概率为 $\underline{\frac{19}{28}}$.

【解析】由于事件"中国队夺得女子羽毛球单打冠军"包括事件"甲夺得冠军"和"乙夺得冠军"，但这两个事件不可能同时发生，即彼此互斥，所以可按互斥事件概率的加法公式进行计算，即中国队夺得女子羽毛球单打冠军的概率为 $\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=\frac{19}{28}$.

【变式训练 8】若 $P(A\cup B)=0.7$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，则 $P(A\cap B)=$ $\underline{0.3}$.

【解析】因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，所以 $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.6-0.7=0.3$.

模拟演练

1.(2020·湖南)盒子里装有大小相同的 2 个红球和 1 个白球，从中随机取出 1 个球，取到白球的概率是（ A ）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

2.(2018·湖南)从 1,2,3,4,5 这五个数中任取一个数，则取到的数为偶数的概率是（ C ）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

3.(2021·湖南)甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$，甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$，则乙获胜的概率是（ A ）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{6}$

4.先后抛掷质地均匀的硬币三次，则至少出现一次正面朝上的概率是（ D ）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{7}{8}$

5. 有 3 位男生和 2 位女生在周日去参加社区志愿活动，从这 5 位同学中任选 3 人，至少有 1 名女生的概率为　（ D ）

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{9}{10}$

【解析】 将 3 位男生分别记为 A,B,C，2 位女生分别记为 a，b，从这 5 位同学中任取 3 人，所有的基本事件有：ABC，ABa，ABb，ACa，ACb，Aab，BCa，BCb，Bab，Cab 共 10 种，其中，事件“从这 5 位同学中任取 3 人，至少有 1 名女生”包含的基本事件有：ABa，ABb，ACa，ACb，Aab，BCa，BCb，Bab，Cab 共 9 种，因此，所求概率为 $P=\frac{9}{10}$. 故选 D.

6. 一个口袋内装有形状大小相同的 2 个白球和 3 个黑球，从中任意摸出 1 个球，则摸到黑球的概率为 $\underline{\frac{3}{5}}$.

7. (2016・湖南)从一个装有 3 个红球 A_1，A_2，A_3 和 2 个白球 B_1，B_2 的盒子中，随机取出 2 个球.

(1)用球的标号列出所有可能的取出结果；

(2)求取出的 2 个球都是红球的概率.

【解析】(1)所有可能的取出结果共有 10 个：A_1A_2，A_1A_3，A_1B_1，A_1B_2，A_2A_3，A_2B_1，A_2B_2，A_3B_1，A_3B_2，B_1B_2.

(2)取出的 2 个球都是红球的基本事件共有 3 个：A_1A_2，A_1A_3，A_2A_3.

所以，取出的 2 个球都是红球的概率为 $\frac{3}{10}$.

第2课时 事件的相互独立性、频率与概率

考试指导

1. 结合有限样本空间了解两个事件相互独立的含义，结合古典概型、利用相互独立性计算概率.

2. 结合实例会用频率估计概率.

3. 了解随机数的含义，会用模拟方法估计概率，理解用模拟方法估计概率的实质.

考点梳理

1. 事件的相互独立性

(1)相互独立事件的定义

设 A，B 为任意两个事件，如果 $P(AB)=$ <u>$P(A)P(B)$</u>，则称事件 A 与事件 B 相互独立.

(2)相互独立事件的性质

如果事件 A 与 B 相互独立，那么 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

2. 频率的稳定性

一般地，随着试验次数 n 的增大，频率偏离概率的幅度会缩小，即事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于事件 A 发生的概率 $P(A)$. 因此我们可用 <u>频率 $f_n(A)$</u> 估计 <u>概率 $P(A)$</u>.

3. 随机模拟中产生随机数的方法

(1)利用计算器或计算机软件产生随机数.

(2)构建模拟试验产生随机数.

典例剖析

1. 事件的相互独立性

【例1】袋内有3个白球和2个黑球，从中有放回地摸球，用 A 表示"第一次摸到白球". 如果"第二次摸到白球"记为 B，否则记为 C，那么事件 A 与 B，A 与 C 的关系是 (A)

A. A 与 B，A 与 C 均相互独立

B. A 与 B 相互独立，A 与 C 互斥

C. A 与 B，A 与 C 均互斥

D. A 与 B 互斥，A 与 C 相互独立

【解析】由于摸球过程是有放回的，所以第一次摸球的结果对第二次摸球的结果没有影响，故事件 A 与 B，A 与 C 均相互独立，且 A 与 B，A 与 C 均有可能同时发生，说明 A 与 B，A 与 C 均不互斥，故选 A.

【点拨】判断事件是否相互独立的方法

(1)定义法：事件 A，B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

(2)利用性质：A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

【变式训练1】(2022·湖南)天气预报端午假期甲地的降雨概率是0.5，乙地的降雨概率是0.4，假定在这段时间内两地是否降雨相互之间没有影响，则甲、乙两地都降雨的概率为 (A)

A. 0.2　　B. 0.3

C. 0.5　　D. 0.8

【变式训练2】甲袋中有8个白球、4个红球，乙袋中有6个白球、6个红球，从每袋中任取一球，则取到相同颜色的球的概率是 <u>$\frac{1}{2}$</u>.

【解析】由题意知 $P=\frac{8}{8+4}\times\frac{6}{6+6}+\frac{4}{8+4}\times\frac{6}{6+6}=\frac{1}{2}$.

2. 频率的稳定性

【例2】某人将一枚硬币连掷10次，正面朝上的情况出现了8次，若用 A 表示"正面朝上"这一事件，则 A 的 (B)

A. 概率为 $\frac{4}{5}$　　B. 频率为 $\frac{4}{5}$

C. 频率为8　　D. 概率接近于8

【解析】做 n 次随机试验，事件 A 发生了 m 次，则事件 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$. 如果多次进行试验，事件 A 发生的频率总在某个常数附近摆动，那么这个常数才是事件 A 的概率. 故 $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ 为事件 A 的频率.

【点拨】理解概率与频率应关注的三个方面

(1)概率是随机事件发生可能性大小的度量，是随机事件 A 的本质属性. 随机事件 A 发生的概率是大量重复试验中事件 A 发生的频率的近似值.

(2)由频率的定义我们可以知道随机事件 A 在一次试验中发生与否是随机的，但随机中含有规律性，而概率就是其规律性在数量上的反映.

(3)正确理解概率的意义，要清楚概率与频率的区别与联系. 对具体的问题要从全局和整体上去看待，而不是局限于某

一次试验或某一个具体的事件.

【变式训练 3】每道选择题有 4 个选项,其中只有 1 个选项是正确的,某次考试共 12 道选择题,某同学说:"每个选项正确的概率是$\frac{1}{4}$,若每题都选择第一个选项,则一定有 3 道题的选择结果正确."这句话 (B)

A. 正确　　B. 错误

C. 有一定道理　　D. 无法解释

【解析】从四个选项中正确选择选项是一个随机事件,$\frac{1}{4}$是指这个事件发生的概率,实际上,做 12 道选择题相当于做 12 次试验,每次试验的结果是随机的,因此每题都选择第一个选项可能没有一个正确,也可能有 1 个、2 个、3 个、…、12 个正确.因此该同学的说法是错误的.

【变式训练 4】经过市场抽检,质检部门得知市场上食用油合格率为 80%.经调查,某市市场上的食用油大约有 80 个品牌,则不合格的食用油品牌大约有 (C)

A. 64 个　B. 640 个　C. 16 个　D. 160 个

【解析】由题意得 $80\times(1-80\%)=80\times20\%=16$ 个.

3. 随机模拟

【例 3】抛掷两枚骰子,用随机模拟方法估计出现点数之和为 9 的概率时,产生的整数值随机数中,每几个数字为一组 (B)

A. 1　　B. 2　　C. 9　　D. 12

【解析】因为抛掷两枚骰子,所以产生的整数随机数中,每 2 个数字为一组.

【点拨】设计随机模拟试验时的注意点

(1)要根据具体的事件设计恰当的试验,使试验能够真正地模拟随机事件;

(2)注意用不同的随机数来表示不同的随机事件的发生.

【变式训练 5】下列不能产生随机数的是 (D)

A. 抛掷骰子试验

B. 抛硬币

C. 计算器

D. 正方体的六个面上分别写有 1,2,2,3,4,5,抛掷该正方体

【解析】D 项中,出现 2 的概率为$\frac{2}{6}$,出现 1,3,4,5 的概率均是$\frac{1}{6}$,则 D 项不能产生随机数.

【变式训练 6】已知某运动员每次投篮命中的概率都为 40%.现采用随机模拟的方法估计该运动员三次投篮恰有两次命中的概率:先由计算器产生 0 到 9 之间取整数值的随机数,指定 1,2,3,4 表示命中,5,6,7,8,9,0 表示未命中;再以每三个随机数为一组代表三次投篮的结果.经随机模拟产生了如下 20 组随机数:

907　966　191　925　271　932　812　458　569　683

431　257　393　027　556　488　730　113　537　989

据此估计,该运动员三次投篮恰有两次命中的概率为 (B)

A. 0.35　B. 0.25　C. 0.20　D. 0.15

【解析】易知 20 组随机数中表示恰有两次命中的数据有 191,271,932,812,393,

所以 $P=\frac{5}{20}=0.25$.

模拟演练

1. 袋子中放有 3 个白球,2 个黑球,从中进行不放回地取球两次,每次取一球,用事件 A_1 表示第一次取得白球,事件 A_2 表示第二次取得白球,则 A_1 和 A_2 是 (D)

A. 互斥的事件　　B. 相互独立的事件

C. 对立的事件　　D. 不相互独立的事件

2. 甲、乙、丙三人独立地去破译一个密码,破译的概率分别为$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,则此密码能被破译的概率是 (C)

A. $\frac{1}{60}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{59}{60}$

3. 抛掷一枚质地均匀的硬币 1 000 次,那么第 999 次出现正面朝上的概率是 (D)

A. $\frac{1}{999}$　　B. $\frac{1}{1\,000}$

C. $\frac{999}{1\,000}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 甲、乙两名同学相约学习某种技能,该技能需要通过两项考核才能拿到证书,每项考核结果互不影响.已知甲同学通过第一项考核的概率是$\frac{4}{5}$,通过第二项考核的概率是$\frac{1}{2}$;乙同学拿到该技能证书的概率是$\frac{1}{3}$,那么甲、乙两人至少有一人拿到该技能证书的概率是 (D)

A. $\frac{13}{15}$　　B. $\frac{11}{15}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

5. 某工厂生产了一批节能灯泡,这批产品按质量分为一等品、

二等品、不合格品.从这批产品中随机抽取一件进行检测,设“抽到一等品”的概率为 0.75,“抽到二等品”的概率为 0.2,则“抽到不合格品”的概率为　　　　(A)

A. 0.05　　　　B. 0.25

C. 0.8　　　　D. 0.95

6. 暑假期间,甲外出旅游的概率是$\frac{1}{4}$,乙外出旅游的概率是$\frac{1}{5}$,假定甲、乙两人的行动相互之间没有影响,则暑假期间两人中至少有一人外出旅游的概率是__$\frac{2}{5}$__.

【解析】设“暑假期间两人中至少有一人外出旅游”为事件 A,则其对立事件 $\overline{A}$ 为“暑假期间两人都未外出旅游”,则

$P(\overline{A})=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$,

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

7. 某医院派出医生下乡开展诊疗活动,派出医生人数及其概率如下表:

医生人数	0	1	2	3	4	5 人及以上
概率	0.1	0.16	0.3	0.2	0.2	0.04

则至少派出医生 2 人的概率是__0.74__.

【解析】由题意可知,事件“至少派出医生 2 人”包含“派出的医生数是 2,3,4,5 人及以上”,这几个事件是互斥的,概率之和为 $0.3+0.2+0.2+0.04=0.74$,故至少派出医生 2 人的概率是 0.74.

8. 某班甲、乙、丙三名同学竞选班委,甲当选的概率为$\frac{4}{5}$,乙当选的概率为$\frac{3}{5}$,丙当选的概率为$\frac{7}{10}$.

(1)求恰有一名同学当选的概率;

(2)求至多有两人当选的概率.

【解析】设甲、乙、丙当选的事件分别为 A,B,C,

则有 $P(A)=\frac{4}{5}$,$P(B)=\frac{3}{5}$,$P(C)=\frac{7}{10}$.

(1)因为事件 A,B,C 相互独立,所以恰有一名同学当选的概率为 $P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$

$=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{47}{250}$.

(2)至多有两人当选的概率为

$1-P(ABC)=1-P(A)P(B)P(C)$

$=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{83}{125}$.