参考答案

专题一　集合与不等式

【典例精析】

变式训练

1. D　2. 2　3. C　4. D　5. B　6. C　7. A　8. B　9. B　10. D　11. C　12. A

【真题再现】

选择题

1. D　2. A　3. A　4. B　5. B　6. A　7. C　8. A　9. A　10. D　11. C

【仿真练习】

一、选择题

1. B　2. B　3. B　4. D　5. C　6. A　7. D　8. C　9. B　10. A　11. A

二、填空题

12. $\{-1,3\}$　13. $(-\infty,-2]\cup[8,+\infty)$　14. -12　15. $[-1,9]$　16. 0 或 -1 或 1

三、解答题

17. (1) $A=(-3,2)$, $B=(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$

(2) $A\cap B=\varnothing$, $(\complement_U A)\cup B=(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$

18. (1) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　(2) $\varnothing$　(3) $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$

19. $a=1$, $b=3$　20. $(0,4)$　21. $[1,19)$

专题二　函　数

【典例精析】

变式训练

1. A　2. B　3. $f(x)=2x+7$　4. $f(x)=x^2-7x+15$　5. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$

6. $[-3,1]$　7. $[2,+\infty)$　8. $(2,3]$　9. -1　10. 9　11. (1)略　(2) $-\frac{5}{2}$

12. 1　13. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　14. (1) $(-3,3)$　(2)偶函数　(3) $(1,3)$

【真题再现】

一、选择题

1. B　2. C　3. C　4. C　5. D　6. B　7. C　8. A　9. B

二、填空题

10. -1　11. 6　12. -13

三、解答题

13. (1)奇函数，理由略.　(2) $x=\frac{1}{3}$

14.(1)$m=3$,$f(x)$的定义域为$(-3,+\infty)$. (2)$(-3,13)$

15.(1)略 (2)$[1,3]$

16.(1)$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ (2)-4或-1

17.(1)略 (2)$[\sqrt{2},4]$

【仿真练习】

一、选择题

1. D 2. A 3. C 4. D 5. C 6. B 7. A 8. D 9. D 10. C

二、填空题

11. $2x^2-2x+3$ 12. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ 13. 6 14. $[3,+\infty)$ 15. -6

三、解答题

16.(1)$2\sqrt{2}$. (2)1.

17.(1)$[-3,1)\cup(1,3]$. (2)$[4,5)$.

18.(1)略 (2)$(-\infty,-\sqrt{2}]\cup(2,+\infty)$

19.$(0,1)$.

20.(1)$m=1$,单调递增区间为$[1,+\infty)$. (2)最大值为6,最小值为2.

21.(1)$y=0.92^x,x\in\mathbf{N}^*$. (2)0.7万元.

专题三 三角函数

【典例精析】

变式训练

1. A 2. A 3. $\frac{3}{10}$ 4. $\tan^2\alpha$ 5. $\frac{25\sqrt{3}-48}{11}$ 6. $\cos 2\alpha=\frac{7}{25},\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

7. A 8.(1)$<$ (2)$>$ 9. $\frac{3\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{4}$ 10. $\frac{\pi}{6}+2k\pi$或$\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 解:(1)$\because\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{3}{4},\therefore a=\frac{4}{3}b=4.\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2},\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2)$\because C=\frac{\pi}{3},\therefore\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2},\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=3\sqrt{3}$.

【真题再现】

一、选择题

1. D 2. A 3. C 4. B 5. C 6. C

二、填空题

7. 0 8. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 9. $\frac{1}{2}$

三、解答题

10.(1)$\sqrt{13}$ (2)$\frac{4}{3}$

11.(1)3 (2)$\frac{4-\sqrt{2}}{6}$

12. 解:(1)由题有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,即$\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}$,

解得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又 $a<b$,$\therefore A=45°$.

(2) $\cos C=\cos(180°-45°-60°)=\cos 75°=\cos(45°+30°)$

$$=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

【仿真练习】

一、选择题

1. B　2. A　3. A　4. D　5. C　6. A　7. C　8. A　9. B　10. A

二、填空题

11. 2　12. $\frac{5\pi}{4}$　13. $-\frac{4}{5}$　14. π　15. $-\frac{15}{13}$　16. 1　17. $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$　18. 钝角

三、解答题

19. 解:(1)由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$,两边平方得 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$,解得 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{5}{18}$.

(2)由 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$得 $\cos\alpha-\sin\alpha>0$,$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{14}{9}$,解得 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{14}}{3}$.

20. 解:(1)$\because \sin\alpha-2\cos\alpha=0$,$\therefore \tan\alpha=2$.

(2)$\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+\tan\alpha-2}$

$=\frac{2\times 2}{2^2+2-2}=1$.

21. 解:由题意知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,$\sin\beta=-\frac{5}{13}$,则 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,$\tan\beta=-\frac{5}{12}$,

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{33}{56}$.

22. 解:(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,$\therefore \sin B=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

(2)$\because b<a$,$\therefore 0<B<\frac{\pi}{3}$,$\sin B=\frac{1}{3}$,$\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6}+B\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos B+\cos\frac{\pi}{6}\sin B=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$.

专题四　数　列

【典例精析】

变式训练

1. A　2. 5

3. 解：(1)∵$\begin{cases}a_1+4d=12,\\2a_1+d=38,\end{cases}$

∴$a_1=20$，$d=-2$，∴$a_n=-2n+22$.

(2)由 $a_n=-2n+22>0$ 得 $n<11$，

∴$S_{10}=10\times 20+\frac{1}{2}\times 10\times 9\times(-2)=110$.

4. A　5. C　6. $63\sqrt{2}$

7. 解：(1)∵$\begin{cases}a_2=a_1+d=5,\\a_3=a_1+2d=8,\end{cases}$

∴$a_1=2$，$d=3$，∴$a_n=a_1+(n-1)d=3n-1$.

(2)∵$c_n=a_n+b_n=3n-1+2^{n-1}$，∴ $S_n=(2+5+\cdots+3n-1)+(1+2+\cdots+2^{n-1})=2^n-1+2n+\frac{1}{2}n(n-1)\times 3=2^n+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$.

8. 7　9. 12　10. 40 min

【真题再现】

一、填空题

1. -16　2. 2^n-1　3. 50

二、解答题

4. (1)$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　(2)$S_n=2^n-1$

5. (1)$a_{10}=19$.　(2)S_4，S_8，S_{16} 成等比数列，理由略.

6. (1)$a_n=2^{n-1}$.　(2)$S_n=\frac{n^2-n}{2}$.

7. (1)$a_n=2^{n-1}$　(2)6

8. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $d=a_2-a_1=2$，

故 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

(2)$b_n=(-1)^n(2n-1)$，

$T_{100}=-1+3-5+7-9+\cdots-197+199$

$=(-1+3)+(-5+7)+(-9+11)+\cdots+(-197+199)=2\times 50=100$.

【仿真练习】

一、选择题

1. A　2. D　3. B　4. C　5. B　6. B　7. B　8. C　9. C　10. C　11. C　12. B

二、填空题

13. 120　14. 17　15. $\frac{11}{400}$　16. 7　17. -7　18. 3

三、解答题

19. 解：(1)$a_8=S_8-S_7=13$，$a_n=\begin{cases}0, n=1,\\2n-3, n>1.\end{cases}$

(2)$a_8=S_8-S_7=128$，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$.

20. 解：∵(1) $\frac{a_5+a_7}{a_6+a_8}=\frac{2a_6}{2a_6+2d}=\frac{1}{3}$，∴公差 $d=2,a_1=-9$，$a_n=2n-11$.

(2)$S_n=n^2-10n$.

21.(1)$a_n=n$.　(2)$S_n=\frac{n^2+n}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

22. 解：设数列$\{a_n\}$的公差为 d，数列$\{b_n\}$的公比为 q，

由题意有$\begin{cases}b_2+S_2=10,\\a_5-2b_2=a_3,\end{cases}$即$\begin{cases}q+6+d=10,\\3+4d-2q=3+2d,\end{cases}$

解得 $d=2,q=2$. ∴$a_n=2n+1,b_n=2^{n-1}$.

23. 解：(1)由已知得$\{a_n\}$是 $a_1=1,d=3$ 的等差数列，

∴$S_m=m+3\times\frac{m(m-1)}{2}=376$，解得 $m=16$.

(2)∵$a_n=3n-2$，

$$\therefore T_n=\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}.$$

24. 解：(1)由题意知 $q^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$，$q>0$，∴$q=\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{a_3}{q^2}=1$. ∴$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{1\ 023}{512}$.

(2)$T_{20}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)+2\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\right]+\cdots+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20}+40\right]=421-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

专题五　平面向量

【典例精析】

变式训练

1. B　2. D　3. $-\frac{7}{12}\boldsymbol{a}+\frac{13}{12}\boldsymbol{b}$　4. B　5. (6,13)　6. (1)24　(2)−16

7. (1)−5　(2)$\frac{3\pi}{4}$

8. 解：(1)$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

(2)$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=-|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

9. 2　10. (1,−2)

【真题再现】

一、选择题

1. B　2. A　3. B

二、填空题

4. $\sqrt{10}$　5. 4　6. 27

【仿真练习】

一、选择题

1. D　2. D　3. C　4. C　5. D　6. A　7. B　8. B　9. D　10. C

二、填空题

11. -1　12. -6　13. $\sqrt{29}$　14. $(1,2)$　15. $-4,-12$　16. -10

三、解答题

17. 解:(1)$\because \boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(2k-3,5-8k)$,$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,

$\therefore(2k-3)\times(-3)+5\times(5-8k)=0$,解得 $k=\dfrac{17}{23}$.

(2)$\because k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2-3k,5k-8)$,$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{b}$,$\therefore\dfrac{2-3k}{2}=\dfrac{5k-8}{-8}$,解得 $k=0$,

$\therefore\dfrac{2-3k}{2}=1>0$,$\therefore k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向.

18. 解:由$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$,$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$,

得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,$\therefore\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,$\therefore\theta=60^\circ$.

19. 解:(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120^\circ=-6$.

(2)$(3\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=3|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-14|\boldsymbol{b}|^2=-191$.

20. 解:设 $C(x,y)$,则 $\overrightarrow{OC}=(x,y)$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(x+1,y-2)$,$\because\begin{cases}\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB},\\ \overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{OA},\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}-x+2y=0,\\ x+1-3(y-2)=0,\end{cases}$解得 $x=14$,$y=7$,$\therefore$点 $C(14,7)$.

21. 解:(1)$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=2\times2\times4\times\dfrac{1}{2}=8$.

(2)$\because(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,$\therefore(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,

$\therefore k|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2|\boldsymbol{b}|^2=0$,

$\therefore 4k-4-8k+32=0$,解得 $k=7$.

专题六　直线与圆的方程

【典例精析】

变式训练

1. C　2. 斜率为 1,倾斜角为 45°　3. $2x-y-7=0$

4. (1)$3x-y+4=0$　(2)$x+3y-2=0$　5. C　6. 2　7. C　8. $x-\sqrt{3}y=0$

9. $3x+4y-25=0$　10. $(x-2)^2+(y-5)^2=8$　11. $4\sqrt{5}$

12. $x-2y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$.

【真题再现】

一、选择题

1. B　2. C　3. B　4. A

二、填空题

5. $\sqrt{2}$　6. $x+y+2=0$　7. $x-2y-2=0$　8. $2x+y-1=0$

【仿真练习】

一、选择题

1. B 2. C 3. C 4. D 5. B 6. A 7. D 8. C 9. B 10. C

二、填空题

11. $\frac{3}{4}$ 12. ±1 13. 0 14. (1,2)或(2,−1) 15. $(x-1)^2+(y-3)^2=2$

三、解答题

16. 解：由 $d=\frac{|2+2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$得弦长 $2\sqrt{5}=2\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$，解得 $r^2=\frac{26}{5}$，

∴圆的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{26}{5}$.

17. 解：由$\begin{cases}x-4=0,\\3x+y+5=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\y=-17,\end{cases}$即点 $P(4,-17)$.

∵直线 $2x-y-3=0$ 的斜率为 2，

∴所求直线的方程为 $y+17=2(x-4)$，即 $2x-y-25=0$.

18. 解：由题可知直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 l：$y-6=k(x-8)$，即 $kx-y+6-8k=0$，

其横截距 $a=\frac{8k-6}{k}$，纵截距 $b=6-8k$.

由$\frac{1}{2}|ab|=12$，得$\frac{(8k-6)^2}{|k|}=24$，整理得 $16k^2-30k+9=0$ 或 $16k^2-18k+9=0$，

解得 $k=\frac{3}{2}$或$\frac{3}{8}$.

∴直线方程为 $3x-2y-12=0$ 或 $3x-8y+24=0$.

19. 解：设圆心 $C(3b,b)$，半径 $r=|3b|$.

圆心 C 到直线 $y=x$ 的距离 $d=\frac{|3b-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|b|$.

∵弦长 $2\sqrt{7}=2\sqrt{(3b)^2-(\sqrt{2}|b|)^2}$，解得 $b=1$ 或 -1.

∴圆 C 的方程为$(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 或$(x+3)^2+(y+1)^2=9$.

20. 解：设圆心 $C(2b+3,b)$，半径为 r，则圆 C 的方程为 $(x-2b-3)^2+(y-b)^2=r^2$.

由 $\begin{cases}(2-2b-3)^2+(-3-b)^2=r^2,\\(-2-2b-3)^2+(-5-b)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\r^2=10,\end{cases}$

∴圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y+2)^2=10$.

21. 解：当直线的斜率不存在时，此时直线方程为 $x=-3$，显然不与圆相切；

当直线的斜率存在时，设切线方程为 $y=k(x+3)$，即 $kx-y+3k=0$.

又圆心 $C(1,2)$，半径 $r=2$，

∵$d=\frac{|k-2+3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=\frac{4}{3}$或 0，

∴切线方程为 $4x-3y+12=0$ 或 $y=0$.

专题七　二次曲线

【典例精析】

变式训练

1. C　2. D

3. (1)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.　(2)$\frac{1}{3}$或$\frac{4}{3}$.

4. C　5. D

6. 解：∵(1)$\begin{cases}2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3},\\ \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$　∴$a=\sqrt{2}$，$b=1$，∴双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

(2)设 $P(x,y)$，∴$|PA|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+\frac{x^2}{2}-1}=\sqrt{\frac{3}{2}(x-2)^2+2}$，

∴当 $x=2$ 时，$|PA|$的值最小为$\sqrt{2}$，此时点 P 的坐标为$(2,\pm1)$.

7. B　8. $y^2=\pm12x$

【真题再现】

解答题

1. (1)由题知$\frac{p}{2}=1$，得 $p=2$. ∴抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$，准线方程为 $y=-1$.

(2)证明：设直线 AB 的斜率为 k，则直线 AB 的方程为 $y=kx+1$ 且 $E(0,-1)$.

又设交点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_1=\frac{y_1+1}{x_1}$，$k_2=\frac{y_2+1}{x_2}$.

又由$\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2=4y\end{cases}$消元整理得 $x^2-4kx-4=0$.

则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$.

$$\therefore k_1+k_2=\frac{y_1x_2+x_2+y_2x_1+x_1}{x_1x_2}=\frac{(kx_1+1)x_2+x_2+(kx_2+1)x_1+x_1}{x_1x_2}$$

$$=\frac{2kx_1x_2+2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{-8k+8k}{x_1x_2}=0.$$

2. $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.　(2)$4\sqrt{3}$.

3. (1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.　(2)$\frac{1}{5}$.

4. 解：(1)由题有$(-2\sqrt{2})^2=2p\times2$，解得 $p=2$，所以抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2)设交点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y^2=4x,\\ 2x-3y-8=0\end{cases}$消元整理得 $y^2-6y-16=0$，

由韦达定理得 $y_1y_2=-16$，又 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=16$，

由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=16+(-16)=0$，∴$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，即 $OA\perp OB$.

5. (1)$\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(2)$\frac{4}{3}$.

【仿真练习】

一、选择题

1. C　2. B　3. B　4. C　5. C　6. A　7. A　8. D　9. A　10. C　11. D

二、填空题

12. 4　13. $\pm 4\sqrt{2}$　14. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$　15. $-\frac{1}{2}$　16. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$　17. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

18. $x^2+(y-2)^2=100$　19. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},-1\right)$

三、解答题

20. 解:(1)设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

由题意有$\begin{cases} c=2, \\ a^2-b^2=c^2, \\ \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{3\sqrt{77}}{8}\right)^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a^2=16, \\ b^2=12, \end{cases}$∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)设椭圆的方程为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0,m\neq n)$,由题意有$\begin{cases} \frac{4}{m}+\frac{1}{n}=1, \\ \frac{1}{m}+\frac{\frac{7}{4}}{n}=1, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} m=8, \\ n=2, \end{cases}$

∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

(3)设椭圆的方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由题意有$\begin{cases} c=3, \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \\ a^2-b^2=c^2, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a^2=36, \\ b^2=27, \end{cases}$

∴椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{27}=1$.

21. 解:(1)设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,依题意得 $2a=8$,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴$a=4$,$c=2\sqrt{3}$, $b^2=a^2-c^2=4$,故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)由$\begin{cases} y=x+n, \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$得 $5x^2+8nx+4n^2-16=0$,

设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8n}{5}$,$y_1+y_1=(x_1+x_2)+2n=\frac{2n}{5}$,

∴弦 AB 的中点坐标为$\left(-\frac{4n}{5},\frac{n}{5}\right)$,代入圆的方程得$\frac{16n^2}{25}+\frac{n^2}{25}=\frac{17}{25}$,∴$n^2=1$,故 $n=\pm 1$.

22. 解：(1) $y^2=4x$.

(2)过 A,B 两点分别作准线的垂线，设垂足分别为 $C,D,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

∴圆 M 的圆心坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，

直径 $|AB|=|AF|+|BF|=|AC|+|BD|=(x_1+1)+(x_2+1)$，

∴圆 M 的半径 $r=\frac{|AB|}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+1>$圆心的横坐标 $\frac{x_1+x_2}{2}$.

∴以 AB 为直径的圆 M 与 y 轴相交.

23. 解：(1)设 $P(x,y)$，∴ $\begin{cases}\frac{y}{x+\sqrt{10}}\times\frac{y}{x-\sqrt{10}}=-1,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x=\frac{4\sqrt{10}}{5},\\ y=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5},\end{cases}$

∴点 P 的坐标为 $\left(\frac{4\sqrt{10}}{5},\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{4\sqrt{10}}{5},-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

(2)∵椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$，∴ $\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2\times4,\\ |PF_1|^2+|PF_2|^2=4\times(16-6),\end{cases}$

∴ $|PF_1|=6,|PF_2|=2$，∴ $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=3$，

设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则 $\begin{cases}a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2,\\ \frac{b}{a}=3,\end{cases}$ ∴ $a^2=2,b^2=18$，∴双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{18}=1$.

专题八　立体几何

【典例精析】

变式训练

1. D　2. C　3. D　4. C　5. 略　6. B　7. 略　8. A　9. 100°

10. 60°　11. (1)略　(2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　12. 27　13. $\frac{64\pi}{9}$

【真题再现】

一、选择题

1. A　2. D　3. D　4. B　5. D

二、填空题

6. 29.3

三、解答题

7. (1)证明：∵ AC∥平面 α，且平面 $ACGH\cap$平面 $\alpha=GH$，

∴ $AC\parallel GH$，同理可证 $AC\parallel EF$，则 $EF\parallel GH$，同理可证 $GH\parallel FG$，

又∵ $AC\perp BD$，∴ $EF\perp FG$，∴四边形 $EFGH$ 为矩形.

(2)解：在 $\triangle ABD$ 中，令 $\frac{EH}{BD}=\frac{AH}{AD}=x$，∵ $BD=2$，∴ $EH=2x$.

在$\triangle ACD$中，$\dfrac{GH}{AC}=\dfrac{DH}{AD}=1-x$，$\because AC=2$，$\therefore GH=2(1-x)$.

则$S=2x\times 2(1-x)=-4x^2+4x$，$x\in(0,1)$，

故当$x=\dfrac{1}{2}$时，矩形$EFGH$面积的最大值为1.

8.(1)略　(2)$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

9.(1)证明：连接BD交AC于点O，连接EO，

$\because ABCD$是矩形，$\therefore$点O为BD的中点，则EO是$\triangle DPB$的中位线，$\therefore EO/\!/PB$.

且$PB\not\subset$平面ACE，$EO\subset$平面ACE，$\therefore PB/\!/$平面ACE.

(2)解：$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore\angle PBA$即为直线PB与平面$ABCD$所成的角，

即$\angle PBA=45^\circ$，$\therefore$在直角$\triangle PBA$中，$AB=PA=1$，

则四棱锥P-$ABCD$的体积为$V=\dfrac{1}{3}\times 1\times\sqrt{3}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

10.(1)略　(2)$\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

【仿真练习】

一、选择题

1. D　2. C　3. B　4. D　5. C　6. D　7. C　8. A　9. C　10. D

二、填空题

11. 8　12. 6　13. $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ cm　14. 3 cm　15. 45

三、解答题

16. 解：(1)$\because CE=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. $\therefore C_1E=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

(2)$\because AD/\!/BC$，$\therefore$异面直线AD_1与BC所成的角为$\angle D_1AD$，为45°.

17.(1)证明：$\because E$为BD的中点，$AB=AD$，$BC=CD$，

$\therefore AE\perp BD$，$CE\perp BD$，$AE\cap ED=E$，$\therefore BD\perp$平面ACE.

(2)由(1)得$\angle AEC$为二面角A-BD-C的平面角.

又$CE=\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{2}$，$\therefore\cos\angle AEC=\dfrac{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2-\sqrt{6}^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore\angle AEC=120^\circ$.

18. 解：(1)$l=16$ (cm)，$r=8\sqrt{3}$ (cm).

(2)$S=\pi\times(8\sqrt{3})^2+\pi\times 8\sqrt{3}\times 16=(192+128\sqrt{3})\pi$ (cm^2)，

$V=\dfrac{1}{3}\pi(8\sqrt{3})^2\times 8=512\pi$ (cm^3).

19. 解：(1)$\because PA\perp$平面ABC，$\therefore PA\perp BC$，又$\because BC\perp AC$，$\therefore BC\perp$平面ACP.

(2)$\because BC\perp$平面ACP，$\therefore\angle PCA$即为二面角P-BC-A的平面角.

$\because\tan\angle PCA=\dfrac{5\sqrt{3}}{5}=\sqrt{3}$，$\therefore\angle PCA=60^\circ$.

20.(1)略　(2)$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

专题九　排列、组合与二项式定理

【典例精析】

变式训练

1.180　2.24　3.7 200　4.160　5.136　6.26　7.240　8.50　9.144　10.24　11.B

12.112　13.−2　14.6

【真题再现】

一、选择题

1. A

二、填空题

2.12　3.15　4.2

【仿真练习】

一、选择题

1.D　2.B　3.D　4.B　5.A　6.C　7.B　8.D　9.C　10.D　11.A　12.B　13.B

二、填空题

14.24　15.60　16.7　2或3　6　17.36　144　18.8　19.−27　20.1 011

三、解答题

21. 解：(1)$P_4^3=24$.

(2)$P_4^3+C_3^2P_4^2=60$.

(3)$C_3^2P_4^2+C_4^1=40$.

22. 解：(1)$P_5^4P_5^1=600$.

(2)$P_3^1P_4^1P_4^3=288$.

(3)$P_5^4P_1^1+P_2^1P_4^1P_4^3=312$ 或 $600-288=312$.

(4)$P_3^1P_4^1P_4^1-P_2^1P_4^1=40$.

23. 解：(1)$C_8^4C_4^4=70$.

(2)$C_2^1C_6^2C_4^4=30$.

(3)$P_2^2C_6^3C_3^3=40$(或 $C_8^4C_4^4-C_2^1C_6^2C_4^4=70-30=40$).

专题十　概率与统计

【典例精析】

变式训练

1.C　2.B　3.D　4. $\dfrac{9}{25}$　5.B　6. $\dfrac{5}{18}$　7.0.9　8.0.3　9. $\dfrac{1}{10}$　10.17

11.1　12.0.8　13.360　14.55　15.15

16. 解：(1)ξ 可能的值为 0,1,2,3.

$\therefore P(\xi=0)=\dfrac{C_3^0C_4^4}{C_7^4}=\dfrac{1}{35}$；$P(\xi=1)=\dfrac{C_3^1C_4^3}{C_7^4}=\dfrac{12}{35}$；

$P(\xi=2)=\dfrac{C_3^2C_4^2}{C_7^4}=\dfrac{18}{35}$；$P(\xi=3)=\dfrac{C_3^3C_4^1}{C_7^4}=\dfrac{4}{35}$.

∴ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

(2)$P(\xi\leqslant 2)=1-P(\xi=3)=\frac{31}{35}$.

【真题再现】

一、选择题

1. D　2. D

二、填空题

3. 96　4. 169　5. 8.5

三、解答题

6. 解:(1)甲在每批次中被抽中的概率为 $P_1=\frac{C_5^1}{C_6^2}=\frac{1}{3}$,

故在这 3 批次支教活动中,教师甲恰有 2 次被抽中的概率为 $P=C_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

(2)ξ 的可能取值为 0,1,2.

$P(\xi=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$,$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$.

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

7. 解:(1)ξ 的可能取值为 0,1,2,3

$P(\xi=0)=\frac{C_3^0C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$,$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$,

$P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$,$P(\xi=3)=\frac{C_3^3C_5^0}{C_8^3}=\frac{1}{56}$.

∴ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

(2)$P(\xi\geqslant 2)=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\frac{2}{7}$.

8. 解:(1)ξ 的可能取值是 0,1,2,

∴$P(\xi=0)=\frac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$,$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$,$P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\frac{1}{5}$,

∴ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)$P(\xi\geqslant1)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=\dfrac{4}{5}$.

【仿真练习】

一、选择题

1. D　2. D　3. A　4. B　5. A　6. C　7. D　8. A　9. C　10. D

二、填空题

11. 1.9　12. $\dfrac{7}{15}$　13. $\dfrac{3}{7}$　14. 30,45,15　15. -0.2

三、解答题

16. 解:(1)$P=\dfrac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{12}{45}=\dfrac{4}{15}$.

(2)∵甲、乙都未抽到选择题的概率为$\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}=\dfrac{6}{45}=\dfrac{2}{15}$,∴甲、乙两人中至少有一人抽到选择题的概率 $P=1-\dfrac{2}{15}=\dfrac{13}{15}$.

17. 解:(1)$P=\dfrac{C_8^3}{C_{12}^3}=\dfrac{56}{220}=\dfrac{14}{55}$.

(2)$P=\dfrac{C_4^3}{C_{12}^3}=\dfrac{4}{220}=\dfrac{1}{55}$.

(3)$P=\dfrac{C_4^1\cdot C_8^2}{C_{12}^3}=\dfrac{4\times28}{220}=\dfrac{28}{55}$.

(4)$P=\dfrac{C_4^2\cdot C_8^1}{C_{12}^3}=\dfrac{6\times8}{220}=\dfrac{12}{55}$.

18. 解:(1)设 $A=\{$甲、乙都中奖且丙没有中奖$\}$,则 $P(A)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{125}$.

(2)随机变量 ξ 的可能取值有 0,1,2,3,

∴$P(\xi=0)=C_3^0\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{125}$,$P(\xi=1)=C_3^1\times\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{48}{125}$,

$P(\xi=2)=C_3^2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{125}$,$P(\xi=3)=C_3^3\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=\dfrac{1}{125}$,

∴随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{64}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{1}{125}$

∴$E(\xi)=0\times\dfrac{64}{125}+1\times\dfrac{48}{125}+2\times\dfrac{12}{125}+3\times\dfrac{1}{125}=\dfrac{3}{5}$.

19. 解:(1)设 $A=\{$当天小王的该银行卡被锁定$\}$,则 $P(A)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$.

(2)X 的可能取值是 1,2,3,

∴$P(X=1)=\dfrac{1}{6}$,$P(X=2)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}$,$P(X=3)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{5}\times1=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore X$ 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

$\therefore X$ 的数学期望为 $E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{2}{3}=\frac{5}{2}$.

专题十一　复数与线性规划

【典例精析】

变式训练

1. (1) $z=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$　(2) -64

2. 生产甲产品 50 件,乙产品 25 件时,销售收入最大为 10 万元.

【真题再现】

解答题

1. 公司应配备 A 型车 20 辆,B 型车 8 辆,才能使公司的营运成本最低,最低是 43 200 元.

2. 每天生产 3 件甲产品,2 件乙产品,才能使工厂每天利润最大,最大值为 2.2 万元.

3. 该学校租 A 型车 12 辆,B 型车 5 辆,才能使租金最少,租金的最小值为 55 200 元.

4. 每天生产 3 件上衣,2 条裤子时,获得的利润最大,为 190 元.

【仿真练习】

一、选择题

1. D　2. C　3. D　4. A　5. A　6. B　7. C　8. C　9. B　10. C

二、填空题

11. 2　$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$　12. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　13. -1　14. 2　15. 2

三、简答题

16. $-\frac{1}{4}$　17. (1) $-5\sqrt{3}+5\mathrm{i}$　(2) $\frac{5\sqrt{5}}{2}+\frac{5\sqrt{15}}{2}\mathrm{i}$　(3) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$　(4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

18. 买桌子 25 张,椅子 37 张.

19. 黄瓜和韭菜的种植面积分别为 30 亩、20 亩.

20. 购买甲、乙、丙三种食品各 2 kg,2 kg,3 kg 时,支付总金额最少.

专题十二　选择题解题技巧

一、直接法

1. C　2. B　3. C　4. C　5. C

二、特例法

1. C　2. C　3. B　4. C　5. B

三、数形结合法

1. C　2. A　3. C　4. C　5. C

四、验证法

1. C　2. D　3. B　4. C　5. D

五、排除法

1. A　2. D　3. B　4. B　5. C

选择题专项训练(1)

1. D　2. C　3. C　4. D　5. D　6. C　7. D　8. C　9. D　10. B

选择题专项训练(2)

1. B　2. B　3. A　4. C　5. B　6. C　7. D　8. B　9. C　10. D

选择题专项训练(3)

1. B　2. A　3. D　4. C　5. C　6. C　7. C　8. C　9. D　10. C

选择题专项训练(4)

1. C　2. D　3. C　4. B　5. D　6. C　7. A　8. B　9. C　10. C

选择题专项训练(5)

1. D　2. C　3. C　4. D　5. B　6. C　7. B　8. C　9. D　10. B

专题十三　填空题解题技巧

一、直接法

1. $5x-4y+13=0$　2. 1　3. -3　4. $3x-2y-4=0$　5. $60x^2$

二、特例法

1. 204　2. $\frac{4}{5}$　3. $\log_{ab}b<\log_a b<\log_b a$　4. $\frac{13}{16}$　5. $\frac{5}{32}$

三、数形结合法

1. 3　2. $\frac{\pi}{4}$　3. 4　4. $[0,2]$　5. 16

填空题专项训练(1)

1. $3\sqrt{5}$　2. 1　3. 1或-9　4. $-\frac{3}{5}$　5. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=1$或$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=1$
6. 0　7. $10n-9$　8. 1　9. $x^2=8y$　10. $\frac{1}{6}$

填空题专项训练(2)

1. $\left[\frac{1}{3},3\right]$　2. -9　3. $\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$　4. $2x-y-3=0$　5. $\frac{1}{35}$　6. $3x^2+1$　7. $-\frac{1}{2}$
8. $-\frac{24}{25}$　9. $\frac{\pi}{4}$　10. 1

填空题专项训练(3)

1. -27　2. 1 023　3. $-\frac{1}{4}$　4. 120°　5. $[4,+\infty)$　6. $\frac{16}{65}$　7. $\frac{1}{8}$　8. 96　9. 36π, 36π
10. 90°

填空题专项训练(4)

1. $[4,+\infty)$　2. -31　3. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$　4. $\frac{5}{7}$　5. 88　6. $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

7.(6,27)　8.0.79　9. $\frac{3}{500}$　10.9 604

填空题专项训练(5)

1. 3　2. 1　3. 240　4. $\pm\sqrt{2}$　5. $\frac{1}{3}$　6. 20π　7.13 440　8. $\frac{9\sqrt{3}}{5}$　9. 充分不必要

10.0.590 4

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(一)

一、选择题

1.D　2.D　3.D　4.A　5.D　6.C　7.A　8.B　9.B　10.D

二、填空题

11.3　12. $\left\{-1,\frac{1}{2},2\right\}$　13. $\{2,7,8\}$　14. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$

15. $(-\infty,-1]\cup[0,2)\cup(2,+\infty)$

三、解答题

16. $\varnothing$.　17. $(2,3)$.　18. $(8,+\infty)$.　19. (1) $a=2,b=1$.　(2) $(-1,2)$.

20. $(-\infty,3]$.　21. $[0,+\infty)$.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(二)

一、选择题

1.C　2.A　3.B　4.D　5.D　6.B　7.B　8.D　9.D　10.D

二、填空题

11.1　12. 2　13. $[-2,-1)$　14. $\frac{1}{3}$　15. -5

三、解答题

16. (1) $\left(-\frac{3}{4},1\right)\cup(1,2]$.　(2) $(0,100]$.

17. (1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$.　(2) $[-4,3]$.

18. (1) $a=1$.　(2) $f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数. 理由略.

19. $(4,6)$.

20. (1) $(-1,1)$.　(2)偶函数, $f(x)$在$(-1,0]$上是增函数,在$[0,1)$上是减函数.

21. $(0,1)$.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(三)

一、选择题

1.D　2. B　3. B　4. D　5. B　6.C　7. C　8. D　9. B　10. C

二、填空题

11. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　12. $\sqrt{3}$　13. $\frac{2}{5}$　14. $\frac{5}{2}$　15. $\frac{\pi}{3}$

三、解答题

16. 解:(1)由题可得$\frac{1-\cos\theta}{-\cos\theta}=3$,解得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$,又∵$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$,∴$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$.

17. 解:(1)$\tan x=\tan\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{1}{3}$.

(2)原式$=\frac{2\sin x\cos x-\cos^2 x}{2\cos^2 x}=\frac{2\tan x-1}{2}=-\frac{5}{6}$.

18. 解:(1)由题得 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$,故最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$时,$y$ 的最大值为$\frac{1}{2}$.

19. 解:由题意可知$-\sin\theta+2\cos\theta=0$,∴$\tan\theta=2$.

$3\cos^2(\pi-\theta)+4\sin 2\theta=\frac{3\cos^2\theta+8\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{3+8\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{19}{5}$.

20. 解:(1)$\tan 2(\alpha-\beta)=\frac{2\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan^2(\alpha-\beta)}=\frac{4}{3}$.

(2)$\tan(2\alpha-\beta)=\tan[2(\alpha-\beta)+\beta]=1$.

21. 解:依题意,$B=\frac{\pi}{3}$,$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,由正弦定理$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$,得 $AB=8$,

∴$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

∴$\triangle ABC$ 的面积为$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=6\sqrt{2}+8\sqrt{3}$.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(四)

一、选择题

1. C 2. C 3. A 4. B 5. B 6. C 7. B 8. B 9. D 10. D

二、填空题

11. 180 12. 33 13. $\log_2 5$ 14. 8 或-8 15. $\frac{1}{2}$

三、解答题

16. 解:依题意,$a_2a_{n-1}=a_1a_n=16$,$a_1+a_n=17$,解得 $a_1=1$,$a_n=16$.

∴$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=31$,解得 $q=2$,∴$a_n=2^{n-1}$.

17. 解:(1)∵$a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=12$,得 $d=2$,∴$a_n=2n$.

(2) $S_{20}=(2+3^1)+(4+3^2)+(6+3^3)+\cdots+(40+3^{20})$

$=\frac{2+40}{2}\times 20+\frac{3(1-3^{20})}{1-3}=420+\frac{3(3^{20}-1)}{2}=\frac{3^{21}+837}{2}$.

18. 解:(1) ∵$a_{10}=S_{10}-S_9=19+k$,$b_{10}=T_{10}-T_9=55$,∴$55=19+k$,解得 $k=36$.

(2)$\because b_n=T_n-T_{n-1}=6n-5$，$\therefore c_n=12n-5$，$\therefore G_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=7n+\frac{1}{2}n(n-1)\times 12=6n^2+n$.

19.(1)$a_n=7-n$.　(2)$a_8+a_9+\cdots+a_{18}=-66$.

20.(1)$a_n=2^{n-1}$.　(2)$T_n=\frac{3n(n+1)}{2}\ln 2$.

21. 解：购买时付出150元，余欠款1 000元，按题意分20次付清，设每次付款数构成数列$\{a_n\}$，则

$a_1=50+1\ 000\times 0.01=60$元，

$a_2=50+(1\ 000-50)\times 0.01=59.5$元，

$a_3=50+(1\ 000-50\times 2)\times 0.01=59$元，

……

$a_n=60-(n-1)\times 0.5$.

$\therefore\{a_n\}$是一个以60为首项，$d=-0.5$的等差数列.

$\therefore a_{10}=60-9\times 0.5=55.5$元.

(2)由(1)可知$S_n=60n+\frac{n(n+1)}{2}\times(-0.5)$，

$S_{20}=20\times 60-\frac{20\times 19}{2}\times 0.5=1\ 105$元.

实际总花费为$150+1\ 105=1\ 255$元.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(五)

一、选择题

1.B　2.C　3.C　4.D　5.D　6.B　7.C　8.C　9.D　10.C

二、填空题

11. $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　12. -1　13. 5　14. $-\frac{1}{7}$　15. $\left(-\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$或$\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$

三、解答题

16. 解：$\because\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$.

17. 解：(1)$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=2\times 2\times 4\times\cos 60°=8$.

(2)$\because(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

$\therefore(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，

$\therefore 2k\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=0$，

$\therefore k=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2}{2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\frac{8-16}{8-4}=-2$.

18. 解：(1)$\because\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\therefore 2m+2=0$，$\therefore m=-1$.

(2)钝角. $\because\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，$m<2$，又$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4+m<0$，

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$,

$\therefore \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$是钝角.

19. 解:(1)$\because m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(3m,2m)+(-n,2n)=(3m-n,2m+2n)=(4,1)$.

$\therefore \begin{cases}3m-n=4,\\2m+2n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\dfrac{9}{8},\\n=-\dfrac{5}{8}.\end{cases}$

(2)$\because \boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c}=(3+4k,2+k)$,$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-5,2)$,

又$\because (\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c})/\!/(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,$\therefore (3+4k)\times 2-(2+k)\times(-5)=0$,解得$k=-\dfrac{16}{13}$.

20. 解:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times 3-5=1$. $\because \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-1,11)$,$\therefore |\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+121}=\sqrt{122}$.

$\because \cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{290}}$.

又$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,$\therefore \sin\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{17\sqrt{290}}{290}$.

21. 解:$\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,$\therefore \sqrt{3}\cos x+3\sin x=0$,

$\therefore \tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,又$\because x\in[0,\pi]$,$\therefore x=\dfrac{5\pi}{6}$.

(2)$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

$\therefore$当$x+\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,即$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$时,$f(x)_{\max}=2\sqrt{3}$.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(六)

一、选择题

1. A　2. D　3. C　4. A　5. D　6. C　7. C　8. B　9. D　10. D

二、填空题

11. $(x-3)^2+(y-1)^2=8$　12. 3　13. $\pm\sqrt{2}$　14. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$

15. $x^2+y^2-8x+6y=0$

三、解答题

16. $5x-3y-15=0$.

17. $(x-4)^2+(y-5)^2=10$.

18. $3x-y-3=0$.

19. $\sqrt{3}x+y-4=0$.

20. $(x-9)^2+(y+18)^2=338$或$(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

21. $x+y-1=0$或$x+y+3=0$.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(七)

一、选择题

1. C　2. C　3. C　4. D　5. C　6. A　7. D　8. D　9. A　10. B

二、填空题

11. 2　12. $4x+9y-13=0$　13. 1　14. $\left(\frac{3}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$　15. 8

三、解答题

16. 解：(1)由题意知$\begin{cases}2c=8\sqrt{5},\\2a+2b=40,\\c^2=a^2-b^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=144,\\b^2=64.\end{cases}$又∵椭圆的焦点在 x 轴上，

∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{64}=1$.

(2)由(1)知顶点坐标为 $A(\pm12,0)$，$B(0,\pm8)$，焦点坐标为 $F(\pm4\sqrt{5},0)$.

17. 解：(1)设双曲线的方程为 $mx^2+ny^2=1(mn<0)$.

由题有$\begin{cases}16m+\frac{35}{9}n=1,\\\frac{256}{9}m+\frac{875}{81}n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{1}{9},\\n=-\frac{1}{5},\end{cases}$

∴双曲线的方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$.

(2)设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，∵$c=\sqrt{6}$，过点 $P(-5,2)$，

∴$\begin{cases}a^2+b^2=6,\\\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=5,\\b^2=1,\end{cases}$

∴双曲线的方程为$\frac{x^2}{5}-y^2=1$.

18. 解：(1)由题知，椭圆的焦点坐标分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，则直线 MN 的方程为 $y=x+1$，即 $x-y+1=0$.

(2)由题有 $4-m=1$，解得 $m=3$. ∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(3)设交点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，满足$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\x-y+1=0,\end{cases}$整理得 $7x^2+8x-8=0$.

由韦达定理有$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8}{7},\\x_1x_2=-\frac{8}{7},\end{cases}$∴$|MN|=\sqrt{(1+1)\left[\left(-\frac{8}{7}\right)^2-4\times\left(-\frac{8}{7}\right)\right]}=\frac{24}{7}$. 又 $h=d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $S=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{24}{7}=\frac{6\sqrt{2}}{7}$.

19. 解：(1)设抛物线的方程为 $y^2=mx$ 或 $x^2=ny$，

由题有 $(-2)^2=2m$ 或 $2^2=-2n$，

解得 $m=2$ 或 $n=-2$.

所以抛物线的方程为 $y^2=2x$ 或 $x^2=-2y$.

(2)由题知圆心为(4,0),则抛物线的焦点坐标为(4,0),

所以抛物线的标准方程为 $y^2=16x$.

20. 解:(1)设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. ∴$\begin{cases}a^2-b^2=3^2,\\2\times(2b)=2a+2\times3,\end{cases}$

∴$a^2=25,b^2=16$. ∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)由$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\\\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得 $P\left(\frac{5\sqrt{5}}{3},\frac{8}{3}\right)$,

∴$\overrightarrow{PF_1}=\left(-\frac{5\sqrt{5}}{3}-3,-\frac{8}{3}\right)$,$\overrightarrow{PF_2}=\left(-\frac{5\sqrt{5}}{3}+3,-\frac{8}{3}\right)$,

∴$\cos\angle F_1PF_2=\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|}=\frac{3}{5}$.

21. 解:(1)由题可知$\begin{cases}a^2+b^2=25-16=9,\\\frac{9}{a^2}-\frac{25}{4b^2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=4,\\b^2=5,\end{cases}$∴双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

(2)由题可知$\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=\pm4,\\|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=36,\end{cases}$解得$|PF_1|\cdot|PF_2|=10$,

∴$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=5$.

湖南省 2024 年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(八)

一、选择题

1. D　2. D　3. D　4. C　5. C　6. A　7. C　8. C　9. D　10. C

二、填空题

11. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　12. $\sqrt{5}$　13. 60°　14. 50°或 130°　15. 60°

三、解答题

16. 略

17. (1)略　(2) 45°

18. 证明:取 BD 中点为 F,连接 QF,AC,

∵Q 是 PA 的中点,∴$PC/\!/QF$.

又 $QF\subseteq$平面 QBD,∴$PC/\!/$平面 QBD.

19. (1)圆柱的侧面积为 36 cm^2,表面积为 $36+\frac{18}{\pi}cm^2$.

(2)圆柱的体积为$\frac{54}{\pi}cm^3$.

20. (1)略

(2)直线 BP 与平面 PAC 所成的角为 30°.

21. 略

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(九)

一、选择题

1. A　2. C　3. A　4. D　5. A　6. C　7. A　8. C　9. A　10. D

二、填空题

11. 3 或 4　12. 8　13. 9　14. 4 050　15. 20

三、解答题

16. 解:(1)$C_4^1C_{46}^2=4\ 140$.

(2)$C_{46}^3=15\ 180$.

(3)$C_{50}^3-C_{46}^3=4\ 420$.

17. 解:由题可知第 6 项为 $T_6=C_8^5\cdot(x^2)^3\cdot\left(\frac{1}{ax}\right)^5=C_8^5\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^5\cdot x$,

∵第 6 项的系数是$-\frac{7}{4}$,

∴$C_8^5\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^5=-\frac{7}{4}$,解得 $a=-2$.

18. 解:令 $x=1$,则展开式中各项系数之和为$(3-1)^n=2^n=64$,解得 $n=6$.

∴展开式的常数项为 $C_6^3\times(3\sqrt{x})^3\times\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3=-540$.

19. 解:(1)偶数的个数有 $2\times4\times3=24$.

(2)奇数的个数有 $3\times4\times3=36$.

(3)比 480 小的三位数的个数有 $3\times4\times3+4\times3=48$.

20. 解:(1)$P_5^5P_2^2=240$ 种.

(2)$P_4^4P_5^2=480$ 种.

(3)①甲在第 2 个位置排法有 $C_4^1P_4^4=96$ 种;②甲在第 3 个位置排法有 $P_5^5=120$ 种;③甲在第 4 个位置排法有 $C_4^1P_4^4=96$ 种;④甲在第 5 个位置排法有 $C_4^1P_4^4=96$ 种. 所以甲不站在两端,乙不站在第 3 个位置的排法有 $96\times3+120=408$ 种.

21. 解:(1)由题意将取出 4 个球分成三类:①取 4 个红球,没有白球,有 $C_4^4=1$ 种;②取 3 个红球,1 个白球,有 $C_4^3C_6^1=24$ 种;③取 2 个红球,2 个白球,有 $C_4^2C_6^2=90$ 种. 故取法共有 $1+24+90=115$ 种.

(2)设取 x 个红球,y 个白球,则$\begin{cases}x+y=5,0\leqslant x\leqslant4,\\2x+y\geqslant7,0\leqslant y\leqslant6,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$

∴总分不少于 7 分的取法共有 $C_4^2C_6^3+C_4^3C_6^2+C_4^4C_6^1=186$ 种.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(十)

一、选择题

1. A　2. C　3. C　4. D　5. C　6. D　7. C　8. B　9. A　10. C

二、填空题

11. 1　12. $\frac{5}{36}$　13. 0.5　14. 0.141 6　15. $\frac{2}{13}$

三、解答题

16. 解：(1)随机变量 ξ 的所有取值为 1，2，3，取这些值的概率依次为

$P(\xi=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^2}{C_6^3}=0.2$；$P(\xi=2)=\frac{C_4^2\cdot C_2^1}{C_6^3}=0.6$；$P(\xi=3)=\frac{C_4^3\cdot C_2^0}{C_6^3}=0.2$.

故 ξ 的概率分布为

ξ	1	2	3
P	0.2	0.6	0.2

(2)任取 3 支中至少有 2 支白色粉笔的概率为

$P(\xi=2)+P(\xi=3)=0.6+0.2=0.8$.

17. 解：(1)5 次预报中恰好有 4 次准确的概率是 $C_5^4 0.8^4\times0.2\approx0.41$.

(2)5 次预报中至少有 4 次不准确的概率是 $C_5^1 0.8\times0.2^4+C_5^0 0.2^5\approx0.006\ 7$.

18. 解：设事件 A 表示“甲射击一次，击中目标”；事件 B 表示“乙射击一次，击中目标”.

(1)$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.7\times0.8=0.56$.

(2)$P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.7\times0.2+0.3\times0.8=0.38$.

(3)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.8-0.56=0.94$.

19. 解：ξ 的取值为 3，4，5，6，则 $P(\xi=k)=\frac{C_{k-1}^2}{C_6^3}(k=3,4,5,6)$.

故 ξ 的分布列为

ξ	3	4	5	6
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

$E(\xi)=3\times\frac{1}{20}+4\times\frac{3}{20}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{2}=\frac{21}{4}=5.25$.

20. 解：均值都是 100，$s_{甲}^2=4$，$s_{乙}^2=166.67$，$\because s_{甲}^2<s_{乙}^2$，$\therefore$甲车间的产品较稳定.

21. (1)$\because X$ 的可能取值为 0，1，2，3，

$\therefore P(X=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$；

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{7}{18}$；

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{7}{18}$；

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$.

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

(2)该学校所得分数的期望值为

$E(X)=6\times\frac{1}{9}+9\times\frac{7}{18}+12\times\frac{7}{18}+15\times\frac{1}{9}=10.5$.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学专题测试卷(十一)

一、选择题

1. D　2. D　3. B　4. C　5. B　6. B　7. D　8. A　9. C　10. B

二、填空题

11. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　12. $-1+\sqrt{3}i$　13. $13+3i$　14. $-\frac{25}{2}$　15. 11

三、解答题

16. $\frac{3}{4}+i$.　17. -1.

18. (1) $z=2x+3y+300$.

(2)每天生产A种玩具20个,B种玩具60个,C种玩具20个时,利润最大,为520元.

19. 生产甲产品2吨,乙产品3吨时,每天获得的利润最大为23万元.

20. 生产A种糖果120箱,B种糖果300箱时,可获得最大利润.

21. 当调出A型车8辆,B型车0辆时,公司每天花费的成本最少.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学模拟试卷(一)

一、选择题

1. D　2. A　3. C　4. B　5. D　6. A　7. B　8. B　9. A　10. D

二、填空题

11. 600　12. $\sqrt{3}$　13. $\frac{10}{3}$　14. $b+1-a$　15. 2

三、解答题

16. 解:(1)$\because f(x)$是偶函数,$\therefore f(-x)=f(x)$,$\therefore m=2$.

$\because f(x)=-x^2+1$,

$\therefore x$ 在$(-\infty,0]$上单调递增,在$[0,+\infty)$上单调递减.

(2)$\because f(x)$是偶函数,且$m=2$,$f(x)$的定义域为$x\in[-2,2]$,

$\therefore n-1=-2$,

$\therefore n=-1$. $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 中,$x\in[-1,2]$,且$g(x)$在$[-1,2]$上单调递减,

$\therefore f(x)\in\left[\frac{1}{4},2\right]$.

17. 解:(1)$P=1-\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{34}{55}$.

(2)ξ的可能取值为0,1,2,3. $P(\xi=0)=\frac{C_9^1}{C_{12}^1}=\frac{3}{4}$;$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_9^1}{C_{12}^1C_{11}^1}=\frac{9}{44}$;$P(\xi=2)=\frac{C_3^1C_2^1C_9^1}{C_{12}^1C_{11}^1C_{10}^1}=\frac{9}{220}$;$P(\xi=3)=\frac{C_3^1C_2^1C_1^1C_9^1}{C_{12}^1C_{11}^1C_{10}^1C_9^1}=\frac{1}{220}$.

$\therefore \xi$的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

$E(\xi)=\frac{3}{10}$.

18. (1)$\frac{5}{7}$　(2)$\sqrt{74}$ cm

19. 解：(1)∵$\{a_n\}$为等差数列，∴$\begin{cases}a_1+d=2,\\a_1+3d=8,\end{cases}$∴$\begin{cases}a_1=-1,\\d=3,\end{cases}$∴$a_n=3n-4$，$S_{10}=125$.

(2)∵$\{a_n\}$为等比数列，各项为正，公比$q>0$.

$\begin{cases}a_1\cdot q=2,\\a_1\cdot q^3=8,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}a_1=1,\\q=2,\end{cases}$ ∴$a_n=2^{n-1}$，$S_{10}=1\ 023$.

20. 解：(1)∵$2a=6$，∴$a=3$，又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，∴$c=\sqrt{5}$，$b^2=a^2-c^2=4$.

∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)当直线AB的斜率k不存在时，则直线AB为$x=2$，显然$M(2,-1)$不可能是直线AB中点. 当直线AB的斜率k存在时，设直线AB：$y+1=k(x-2)$.　由$\begin{cases}y+1=k(x-2),\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$化简得$(9k^2+4)x^2+(-36k^2-18k)x+(36k^2+36k-27)=0$. 由$x_1+x_2=\frac{36k^2+18k}{9k^2+4}=4$，解得$k=\frac{8}{9}$，∴直线$AB$的方程为$8x-9y-25=0$.

21. (1)$\frac{63}{65}$　(2)$\frac{315}{8}$

22. 预订4个单位的午餐，3个单位的晚餐.

湖南省2024年普通高等学校对口招生考试数学模拟试卷(二)

一、选择题

1. C　2. D　3. A　4. D　5. B　6. A　7. B　8. B　9. B　10. D

二、填空题

11. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$　12. 13　13. 0.99　14. 35　15. $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$

三、解答题

16. 解：(1)由$3-x^2>0$，得$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$，∴定义域为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(2)∵定义域$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$关于原点对称，且$f(-x)=\lg[3-(-x)^2]=\lg(3-x^2)=f(x)$，

∴$f(x)$为偶函数.

(3)由 $f(x)<0$,即 $\lg(3-x^2)<0$,则 $\lg(3-x^2)<\lg 1$,得 $\begin{cases}3-x^2<1,\\3-x^2>0,\end{cases}$ 解得 $-\sqrt{3}<x<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$,∴不等式的解集是 $(-\sqrt{3},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

17.(1)

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

(2) $\frac{3}{5}$

18. 解:(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,∵ $a_3=a_2+4$,则 $a_1q^2=a_1q+4$,∵ $a_1=2$,∴ $2q^2=2q+4$,得 $q=2$ 或 -1,又由 $q>0$,则 $q=2$,∴通项公式 $a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$.

(2)由(1)可知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_{a_n}=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$,等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $S_{b_n}=1\times n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2$. ∵数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n=S_{a_n}+S_{b_n}$,∴ $S_n=S_{a_n}+S_{b_n}=2^{n+1}-2+n^2$.

19.(1)略. (2) $\frac{2}{3}$.

20. 解:(1)由抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x$ 的焦点为 $(\sqrt{5},0)$ 可知:椭圆焦点在 x 轴上,且 $a=\sqrt{5}$,由离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,得 $c=\frac{\sqrt{30}}{3}$,所以 $b^2=a^2-c^2=\frac{5}{3}$,故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1$,即 $x^2+3y^2=5$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题意可知直线 AB 的斜率存在,设其斜率为 k,则直线 AB 的方程为 $y=k(x+1)$,把 $y=k(x+1)$ 代入到 $x^2+3y^2=5$,则 $(3k^2+1)x^2+6k^2x+3k^2-5=0$,∵直线与圆有两个不同的交点 A,B,且 AB 中点的横坐标为 $-\frac{1}{2}$,

∴ $\begin{cases}36k^4-4(3k^2+1)(3k^2-5)>0,\\x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+1}=-\frac{1}{2}\times 2,\end{cases}$ 解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

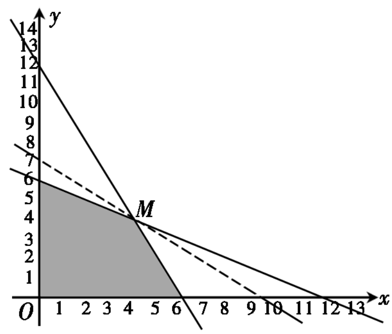
∴直线 AB 的方程为 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 或 $x+\sqrt{3}y+1=0$.

21. 解:(1)∵ $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=3\sqrt{7}$,∴ $\sin C=3\sqrt{7}\cos C$. ∵ $\sin^2C+\cos^2C=1$,

∴ $(3\sqrt{7}\cos C)^2+\cos^2C=1$,得 $\cos C=\pm\frac{1}{8}$. 由 $\tan C=3\sqrt{7}>0$,且角 C 在第一、二象限,则角 C 在第一象限,∴ $\cos C>0$,故 $\cos C=\frac{1}{8}$.

(2)∵ $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos C$,∴ $a\times b\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$,得 $a\times b=20$. 又∵ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=81-40=41$,∴ $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{41-2\times 20\times\frac{1}{8}}=6$.

22.(1)设生产 x 桶甲产品，y 桶乙产品，总利润为 z，则约束条件为$\begin{cases}x+2y\leqslant 12,\\2x+y\leqslant 12,\\x,y>0,\end{cases}$目标函数 $z=300x+400y$，可行域如图所示：



由$\begin{cases}x+2y=12,\\2x+y=12,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\y=4.\end{cases}$

所以当 $x=4$，$y=4$ 时，$z_{\max}=300\times4+400\times4=2\ 800$.

公司每天生产的甲、乙两种产品各 4 桶时，可获得最大利润 2 800 元.

湖南省 2024 年普通高等学校对口招生考试数学模拟试卷(三)

一、选择题

1.B　2.B　3.B　4.A　5.D　6.D　7.A　8.C　9.A　10.A

二、填空题

11. 15　12. $4n-5$　13. 15　14. $\dfrac{23}{28}$　15. -3

三、解答题

16. 解：(1)∵由 $x^2-3x+2>0$，得 $x<1$ 或 $x>2$，

∴函数的定义域是 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

(2)由 $f(x)<1$ 得 $0<x^2-3x+2<6$，解得 $-1<x<1$ 或 $2<x<4$.

∴原不等式的解集是 $(-1,1)\cup(2,4)$.

17. 解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d=\dfrac{a_3-a_1}{3-1}=\dfrac{2-0}{2}=1$，

∴数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=0+(n-1)\times1=n-1$.

(2)设数列 $\{b_n\}$ 的公比是 q，∵$b_1=a_2=2-1=1$，$b_2=a_3=2$，∴$q=\dfrac{b_2}{b_1}=2$，

∴$S_5=\dfrac{2^5-1}{2-1}=31$.

18. 解：(1)设 $A=\{$抽取 3 次未中奖$\}$，则 $P(A)=\dfrac{4\times4\times4}{5\times5\times5}=\dfrac{64}{125}$.

(2)ξ 的可能取值是 0，1，2，3，则 $P(\xi=0)=C_3^0\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{125}$；$P(\xi=1)=C_3^1\ \dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{48}{125}$；

$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$；$P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$.

ξ 的分布列是

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$E(\xi)=0\times\frac{64}{125}+1\times\frac{48}{125}+2\times\frac{12}{125}+3\times\frac{1}{125}=\frac{3}{5}$.

19.(1)证明：$\because PA\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，$\therefore PA\perp BC$，$\because \angle BCA=90°$，$\therefore BC\perp AC$，

$\because PA\cap AC=A$，$BC\not\subset$平面 PAC，$\therefore BC\perp$平面 PAC.

(2)解：$\because D,E$ 分别是 PB,PC 的中点，$\therefore DE/\!/BC$. 由(1)得 $DE\perp$平面 PAC，

$\therefore \angle DAE$ 为 AD 与平面 PAC 所成的角，设 $PA=AB=2a$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，$PA=AB=2a$，$PD=BD=\sqrt{2}a$，$\therefore AD=\sqrt{2}a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=60°$，$\angle ACB=90°$，$\therefore BC=a$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$. $\therefore \sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

20.(1)由题知$\begin{cases}2b=2,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ c^2=a^2-b^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线的斜率为 k，则直线的方程为 $y=kx+2$，又设交点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

满足$\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消元整理得$(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$，

由韦达定理有$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-16k}{4k^2+1},\\ x_1x_2=\frac{12}{4k^2+1},\end{cases}$

又 $y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=\frac{4-4k^2}{1+4k^2}$，

由题可知 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$，所以$\frac{12}{4k^2+1}+\frac{4-4k^2}{4k^2+1}=0$，

解得 $k^2=4$，$k=\pm2$，经检验为所求，

所以直线的方程为 $y=\pm2x+2$.

21. 解：(1)$f(x)=-\sin 2\omega x+\frac{2\sqrt{3}(\cos 2\omega x+1)}{2}=-\sin 2\omega x+\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sqrt{3}$

$=2\sin\left(2\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$.

$\because T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \omega=\frac{3}{2}$.

(2)由 $f(x)=0$,得 $2\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$,即 $\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore 3x+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ 或 $3x+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,即 $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$.

$\because x\in[0,2\pi]$,$\therefore x=\frac{2\pi}{9}$ 或 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{8\pi}{9}$ 或 π 或 $\frac{14\pi}{9}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$.

22. 解:设需租赁甲种设备 x 天,乙种设备 y 天,则 x,y 满足约束条件

$$\begin{cases}5x+6y\geqslant 50,\\10x+20y\geqslant 140,\\x\in\mathbf{N},\\y\in\mathbf{N},\end{cases}$$

目标函数为 $z=200x+300y$,

作出可行域(略)知:当 $x=4$,$y=5$ 时,$z_{\min}=200\times4+300\times5=2\ 300$(元).

故公司租赁甲设备 4 天,乙设备 5 天时,费用最低为 2 300 元.

湖南省 2024 年普通高等学校对口招生考试数学模拟试卷(四)

一、选择题

1. B　2. D　3. A　4. C　5. C　6. D　7. D　8. B　9. D　10. C

二、填空题

11. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$　12. $2x+3y-21=0$　13. 2　14. 8　15. 48

三、解答题

16. 解:(1)由 $f(3)=\frac{3}{3}-3^a=-2$,解得 $a=1$.

(2)$\because f(x)=\frac{3}{x}-x$,又定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,关于原点对称且 $f(-x)+f(x)=-\frac{3}{x}+x+\left(\frac{3}{x}-x\right)=0$,$\therefore f(-x)=-f(x)$,$\therefore f(x)$ 在定义域上为奇函数.

17. (1)$a_5=21$.　(2)$S_3=2\ 114$.

18. 解:(1)$P(\xi\geqslant1)=1-P(\xi=0)=0.92$.

(2)ξ 的可能取值为 0,1,2,

ξ 的概率分布为

ξ	0	1	2
P	0.08	0.44	0.48

$E(\xi)=0.44+2\times0.48=1.4$.

19. (1)证明:$\because D$ 为中点,$\therefore AD\perp BC$,又 $\because PC\perp$ 平面 ABC,$AD\subset$ 平面 ABC,$\therefore AD\perp PC$,又 PC,BC 是平面 PBC 中的两条相交直线,$\therefore AD\perp$ 平面 PBC.

(2)解:$\because AD\perp$ 平面 PBC,连接 AE,$\therefore AD\perp PB$,又 $DE\perp PB$,$\therefore PB\perp$ 平面 ADE,即 $\angle AED$ 为二面角 $A\text{-}PB\text{-}C$ 的平面角,在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,又 $AD=\sqrt{3}$,$DE=1$,由 $\tan\angle AED=$

$\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，∴$\angle AED=60°$.

20. 解：(1)∵由题意有$\begin{cases}\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ c^2=4-b^2,\end{cases}$ 解得 $b^2=1$.

∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)∵$A(0,-1)$，又$|PA|=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}=\frac{2a}{2}=2$.设 $P(x_1,y_1)(x_1<0,y_1<0)$，

则$\begin{cases}\frac{x_1{}^2}{4}+y_1{}^2=1,\\ \sqrt{x_1{}^2+(y_1+1)^2}=2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_1=-\frac{4\sqrt{2}}{3},\\ y_1=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

设抛物线方程为 $y^2=mx(m\neq0)$，

由题有$\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)m$，解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{24}$.

∴抛物线的方程为 $y^2=-\frac{\sqrt{2}}{24}x$.

21. 解：(1)由已知有$\sqrt{2}\cos A=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，∴$\cos A=\frac{3}{4}$，

∴$\cos 2A=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$.

(2)∵$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

∴$16=25+c^2-10c\times\frac{3}{4}$，解得 $c=6$ 或 $c=\frac{3}{2}$(舍去，c 为最大边).

22. 解：设每周生产甲产品 x 件，乙产品 y 件，则目标函数 $z=30x+50y$，

约束条件为$\begin{cases}2x+2y\leqslant80,\\ 2x+4y\leqslant120,\\ x>0,y>0,x,y\in\mathbf{Z},\end{cases}$

作出可行域如图：(图略)

由$\begin{cases}2x+2y=80,\\ 2x+4y=120,\end{cases}$ 解得最优点坐标为 $A(20,20)$，

∴$z_{\max}=30\times20+50\times20=1\ 600$(元)，所以当每周生产甲、乙产品各 20 件时，最大利润为 1 600 元.

湖南省 2024 年普通高等学校对口招生考试数学模拟试卷(五)

一、选择题

1. C　2. B　3. B　4. C　5. A　6. D　7. C　8. D　9. A　10. A

二、填空题

11. 15　12. $\pm\sqrt{2}$　13. $\frac{125}{4\pi}$　14. $4x+3y+3=0$ 或 $4x-3y-3=0$　15. $-2n+1$

三、解答题

16. 解：(1)∵$2^x-1>0$，∴$x>0$，

∴函数的定义域为$(0,+\infty)$.

(2)∵$\log_a(2^2-1)=-1$，∴$a=\frac{1}{3}$.

17. 解：(1)$P=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$.

(2)ξ 的可能取值为 3，7，11，

$P(\xi=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$；$P(\xi=7)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$；$P(\xi=11)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$.

ξ 的分布列为

ξ	3	7	11
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(\xi)=7$.

18. 解：(1)∵$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(2,-4)+2(-1,3)-(3,2)=(-3,0)$，

∴$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=|(-3,0)|=3$.

(2)$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-7}{5\sqrt{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

19. 解：(1)∵$\begin{cases}a_2^2=a_1a_4,\\a_3=6,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d),\\a_1+2d=6,\\d\neq0,\end{cases}$

∴$\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$ ∴$a_n=2n$.

(2)∵$b_1=a_1=2$，$b_2=a_2=4$，∴公比 $q=2$，∴$b_n=2^n$.

$S_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=\left[2n+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot2\right]+\frac{2(1-2^n)}{1-2}$

$=2^{n+1}+n^2+n-2$.

20. 解：(1)∵$\begin{cases}\frac{b}{a}=\sqrt{3},\\2a=\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ ∴$\begin{cases}a^2=\frac{1}{3},\\b^2=1,\end{cases}$ ∴双曲线的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{3}}-y^2=1$.

(2)当直线 l 的斜率 k 不存在时，则直线 $l:x=0$，显然直线 l 不可能与双曲线相交；当直线 l 的斜率 k 存在时，设直线 $l:y=kx+1$，由$\begin{cases}y=kx+1,\\\frac{x^2}{\frac{1}{3}}-y^2=1\end{cases}$化简得

$(3-k^2)x^2-2kx-2=0$，则 $x_1+x_2=\frac{2k}{3-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-2}{3-k^2}$，$y_1y_2=1$.

设 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

由 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 解得 $k=\pm1$.

∴直线 l：$y=\pm x+1$.

21.(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\sqrt{2}$ 22. $\frac{1}{4}$

湖南省 2024 年普通高等学校对口招生考试数学模拟试卷(六)

一、选择题

1.C 2.B 3.A 4.B 5.D 6.D 7.D 8.B 9.B 10.A

二、填空题

11.16π $\frac{32}{3}\pi$ 12.48 13.10 或 -68 14.4 15. $\frac{341}{512}$

三、解答题

16. 解：(1)要使函数 $f(x)$ 有意义，则需 $x\neq0$，∴函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由题意有 $f(2)=2^m-1=1$，解得 $m=1$.

(2)由(1)可知，函数的定义域关于原点对称且 $f(-x)+f(x)=\left(x-\frac{2}{x}\right)+\left(-x+\frac{2}{x}\right)=0$，

∴函数 $f(x)$ 是奇函数.

17. 解：(1)

ξ	6	8	10
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(2)$\frac{2}{3}$.

18. 解：(1)设公差为 d，则 $d=\frac{21-9}{3}=4$，∴$a_n=4n+1$.

$T_{10}=5^{a_1}\cdot5^{a_2}\cdot5^{a_3}\cdot\cdots\cdot5^{a_{10}}=5^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}}=5^{\frac{a_1+a_{10}}{2}\times10}=5^{230}$.

(2)∵$b_n=2^{a_n}=2^{4n+1}=2\times16^n$，∴$b_n$ 是一个以 16 为公比的等比数列，则 $S_{10}=\frac{32(1-16^{10})}{1-16}$

$=\frac{32}{15}(16^{10}-1)$.

19. 解：(1)60° (2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. 解：(1)∵$\begin{cases}\frac{b}{a}=\sqrt{2},\\ c=\sqrt{3},\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=1,\\ b^2=2,\end{cases}$

∴双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设交点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,且满足$\begin{cases}x_1^2-\dfrac{y_1^2}{2}=1,\\ x_2^2-\dfrac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$两式相减,得$(x_1-x_2)(x_1+x_2)-\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{2}=0$,又由已知$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\ y_1+y_2=2,\end{cases}$则 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$,则直线方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $2x-y-1=0$,由$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{2}=1,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}$消元整理得 $2x^2-4x+3=0$,$\because \Delta<0$,$\therefore$直线不存在.

21. 解:(1)$\because f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,$\therefore f(x)$的值域为$[-2,2]$,最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)$\because f(A)=2\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$,则 $A=\dfrac{\pi}{6}$,$\dfrac{\pi}{2}$(舍),由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $4=b^2+9-3\sqrt{3}b$,解得 $b=\dfrac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$,$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{9\sqrt{3}\pm 3\sqrt{7}}{8}$.

22. A,B 型车分别租 5 辆、12 辆时,租金最小为 36 800 元.

湖南省 2024 年普通高等学校对口招生考试数学模拟试卷(七)

一、选择题

1. D　2. B　3. A　4. C　5. C　6. D　7. C　8. D　9. C　10. B

二、填空题

11. 18　12. $2\sqrt{19}$　13. $(2-2\sqrt{3},6]$　14. 1 120　15. $\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\pi$

三、解答题

16. 解:(1)$(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$.

(2)$\because g(x)=f(x+1)=\log_3[(x+1)^2-2(x+1)-8]=\log_3(x^2-9)$,其定义域为$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$,关于原点对称,又 $g(-x)=\log_3[(-x)^2-9]=\log_3(x^2-9)=g(x)$,$\therefore g(x)$是偶函数.

17. 解:(1)ξ 的分布列为

ξ	3	4	5	6	7	8	9
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(2)$\because E(\xi)=\dfrac{3}{10}+\dfrac{4}{10}+1+\dfrac{6}{5}+\dfrac{7}{5}+\dfrac{8}{10}+\dfrac{9}{10}=6$,

$E(\xi^2)=\dfrac{9}{10}+\dfrac{16}{10}+5+\dfrac{36}{5}+\dfrac{49}{5}+\dfrac{64}{10}+\dfrac{81}{10}=39$,

$\therefore D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=3$.

18. (1)$m=-4$.　(2)是锐角,因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$.

19. (1)$a_n=3n-1$.　(2)$S_5=102$.

20. (1) $y^2=4x$. (2) $P\left(\frac{3}{2},\sqrt{6}\right)$, $Q\left(\frac{3}{2},-\sqrt{6}\right)$. (3) $S=\frac{1}{2}|F_1F_2||PF_1|=\sqrt{6}$.

21. (1) $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ (2) $z^5=2^5(\cos 300°+\mathrm{i}\sin 300°)=16-16\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

22. 解：设甲、乙原料的量分别为 x_1，x_2，成本为 z，则 $z_{\min}=10x_1+20x_2$，满足$\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 10,\\3x_1+x_2\geqslant 15,\\x_1+6x_2\geqslant 15,\\x_1\geqslant 0,\\x_2\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $x_1=9$，$x_2=1$ 时，$z_{\min}=110$.

湖南省 2024 年普通高等学校对口招生考试数学模拟试卷(八)

一、选择题

1. C　2. C　3. B　4. D　5. C　6. A　7. D　8. A　9. B　10. C

二、填空题

11. 7　12. 2　13. 19　14. $y=2$　15. $3x^2-4y^2=11$

三、解答题

16. 解：(1) 设二次函数为 $f(x)=ax^2+c$，一次函数为 $g(x)=kx+b$，

$\because f(0)=0$，$f(1)=1$，$\therefore \begin{cases}c=0,\\a+c=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\c=0.\end{cases}$

$\because f[g(x)]=4x^2-20x+25$，$\therefore f(kx+b)=(kx+b)^2=4x^2-20x+25$，

$\therefore k^2=4$，$2kb=-20$，$b^2=25$，

$\because g(x)$ 为增函数，$\therefore k=2$，$b=-5$.

综上可得 $f(x)=x^2$，$g(x)=2x-5$.

(2) 由 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)+2}>2^{g(x)}$ 得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2}>2^{2x-5}$，

$\therefore 2^{-x^2-2}>2^{2x-5}$，

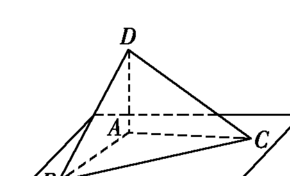
$\therefore -x^2-2>2x-5$，即 $x^2+2x-3<0$，

解得 $-3<x<1$，即原不等式的解集为 $(-3,1)$.

17. 解：(1) 设公差为 d，则 $d=\frac{39-3}{9}=4$，$\therefore S_{50}=50a_1+\frac{1}{2}\times 50\times 49\times d=5\ 050$.

(2) $\because b_2=a_4=3+3\times 4=15$，$\therefore b_1=20-b_2=5$. $\therefore q=\frac{b_2}{b_1}=3$，$\therefore b_5=5\times 3^4=405$.

18. 解：(1) 略　(2) 如图所示，由题意可得



$AB=\frac{DA}{\tan 30°}=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}a$，同理 $AC=\sqrt{3}a$，

$\because \angle BAC=90°$，$\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{6}a$.

19. 解：(1) 由概率分布的性质得 $0.1+0.3+2x+x=1$，解得 $x=0.2$.

(2) 由 (1) 得 ξ 的概率分布为

ξ	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.4	0.2

$\therefore E(\xi)=0\times0.1+1\times0.3+2\times0.4+3\times0.2=1.7.$

$D(\xi)=1.7^2\times0.1+0.7^2\times0.3+0.3^2\times0.4+1.3^2\times0.2=0.81.$

20. 解：(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}y=2x+m,\\y^2=4x,\end{cases}$得 $4x^2+4(m-1)x+m^2=0$，

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=1-m$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{m^2}{4}$，

$\therefore |AB|=\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{(1-m)^2-m^2}=\sqrt{5(1-2m)}=3\sqrt{5}$，

解得 $m=-4$.

(2)设 P 到直线 AB 的距离为 d，

$\because S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d$，$\therefore d=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，

设 $P(a,0)$，则 $d=\dfrac{|2a-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，

解得 $a=5$ 或 $a=-1$，故点 P 的坐标为$(5,0)$或$(-1,0)$.

21. 解：(1)由题意可知 $a^2+b^2-c^2=-ab$，

$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{-ab}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)由题意根据正弦定理可得 $\sin^2B\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}=\sin^2A\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

$\therefore \sin B\cos B=\sin A\cos A$，$\therefore \sin 2B=\sin 2A$，

$\because A,B\in(0,\pi)$，$\therefore 2A,2B\in(0,2\pi)$，$\therefore 2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，

$\therefore A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

22. 解：设工厂每日采用甲、乙两种原料分别为 x,y 吨，才能使产品的日产量 z 最大. 则 $z=90x+100y$，且满足$\begin{cases}1\ 000x+1\ 500y\leqslant6\ 000,\\500x+400y\leqslant2\ 000,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0,\end{cases}$ 解得当 $x=\dfrac{12}{7}$，$y=\dfrac{20}{7}$时，产品的日产量最大.